Независимые испытания и формула Бернулли

Сегодня на уроке мы познакомимся с ещё одним распространённым следствием теорем сложения и умножения вероятностей, которое касается ***независимых испытаний***, и рассмотрим многочисленные примеры на использование ***формулы Бернулли***. Данная задача входит в «обязательный комплект» типовой самостоятельной/контрольной работы потеории вероятностей, поэтому ваше ближайшее времяпровождение будет крайне полезным. Кроме того, я расскажу, в чём заблуждается **подавляющее большинство**участников лотерей и азартных игр. …Нееет, вера или слабая надежда «сорвать куш» тут совершенно не при чём ;-) Не успев и глазом моргнуть, погружаемся в тему:

Что такое ***независимые испытания***? Практически всё понятно уже из самого названия. Пусть производится несколько испытаний. Если вероятность появления некоего события A в каждом из них **не зависит** от исходов остальных испытаний, то… заканчиваем фразу хором =) Молодцы. При этом под словосочетанием «независимые испытания» часто подразумевают***повторные независимые испытания*** – когда они осуществляются друг за другом.

Простейшие примеры:
– монета подбрасывается 10 раз;
– игральная кость подбрасывается 20 раз.

Совершенно ясно, что вероятность выпадения орла либо решки в любом испытании не зависит от результатов других бросков. Аналогичное утверждение, естественно, справедливо и для кубика.

А вот последовательное извлечение карт из колоды не является серией независимых испытаний – как вы помните, это цепочка зависимых событий. Однако если карту каждый раз возвращать обратно, то ситуация станет «такой, какой надо».

Спешу обрадовать – у нас в гостях очередной Терминатор, который абсолютно равнодушен к своим удачам/неудачам, и поэтому его стрельба представляет собой образец стабильности =):

Задача 1

Стрелок совершает 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна p. Найти вероятность того, что:

а) стрелок попадёт только один раз;
б) стрелок попадёт 2 раза.

Решение: условие сформулировано **в общем виде** и вероятность попадания в мишень при каждом выстреле считается известной. Она равна p *(если совсем тяжко, присвойте параметру какое-нибудь конкретное значение, например,* $p = 0{,}6$*).*

Коль скоро, мы знаем p, то легко найти вероятность промаха в каждом выстреле:
$q=1-p$, то есть, «ку» – это тоже известная нам величина.

а) Рассмотрим событие *«Стрелок попадёт только один раз»* и обозначим его вероятность через P_4^1 *(индексы понимаются как «одно попадание из 4-х»)*. Данное событие состоит в 4-х несовместных исходах: стрелок попадёт в 1-й **или** во 2-ой **или** в 3-й **или** в 4-й попытке.

По **теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий**:
$P_4^1 = pqqq + qpqq + qqpq + qqqp$

Внимание! *Если вам НЕ ПОНЯТНА эта запись, пожалуйста, вернитесь к предыдущему уроку по вышеприведённой ссылке!*

Упростим результат с помощью комбинаторной **формулы количества сочетаний**:
$C_4^1 = 4$ способами можно выбрать попытку, в которой стрелок попал.

И, поскольку в каждом случае имеет место 1 попадание и 3 промаха, то:
$P_4^1 = C_4^1 pq^3 = 4pq^3$ – вероятность того, что стрелок попадёт только один раз из 4-х

…Как-то так «с лёгкой руки» я начал называть повторные независимые испытания «попытками», что не в каждой задаче может быть корректным… …ну да ладно.

б) Рассмотрим событие *«Стрелок попадёт два раза»* и обозначим его вероятность через P_4^2 *(«два попадания из 4-х»)*. Здесь вариантов становится больше, попадания возможны:

в 1-й и 2-й попытках
или
в 1-й и 3-й попытках
или
в 1-й и 4-й попытках
или
во 2-й и 3-й попытках
или
во 2-й и 4-й попытках
или
в 3-й и 4-й попытках.

Таким образом, по тем же **теоремам сложения и умножения вероятностей**:
$P_4^2 = ppqq + pqpq + pqqp + qppq + qpqp + qqpp$

Можно ли так решать задачу? Безусловно, можно. Но что делать, если серия состоит из 5, 6 или бОльшего количества выстрелов? Тут уже будут получаться десятки слагаемых, запись которых отнимет много времени и места. В этой связи рациональнее придерживаться более компактной схемы:

$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ способами *(перечислены выше)* можно выбрать 2 попытки, в которых произойдут попадания.

И, поскольку в любом исходе ровно 2 попадания и 2 промаха, то:
$P_4^2 = C_4^2 p^2 q^2 = 6p^2 q^2$ – вероятность того, что стрелок попадёт 2 раза из 4-х.

Ответ: а) $4pq^3$, б) $6p^2q^2$

Итак – вероятность того, что будет 1 попадание из 4-х, равна $P_4^1 = C_4^1 pq^3$, вероятность того, что будет 2 попадания из 4-х, равна $P_4^2 = C_4^2 p^2 q^2$ … не замечаете ли вы закономерности?

Только что на конкретном примере мы повторили путь Якоба Бернулли, который несколько веков назад вывел формулу, названную позже в его честь:

– Вероятность P_n^m того, что **в** n **независимых испытаниях** некоторое случайное событие A наступит **ровно** m **раз**, равна:

$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, где:

p – вероятность появления события A в каждом испытании;
$q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A в каждом испытании.

Коэффициент C_n^m часто называют ***биномиальным коэффициентом***.

Примечание*: формула Бернулли справедлива только для тех независимых испытаний,*
в которых вероятность p *события* A *сохраняется постоянной. Но на практике в результате испытаний могут появляться разные события с разными вероятностями – в этом случае работает другая формула. Соответствующие примеры можно найти, например, в типовых* ***расчётах из сборника Чудесенко*** *(Задача 18).*

За примером далеко ходить не будем:

Задача 2

Найти вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет 3 раза.

Решение: сначала немного порассуждаем: всего проводится 10 повторных независимых испытаний. Сколькими способами можно выбрать 3 испытания, в которых выпадет орёл?
$C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$ способами!

Это что же получается – записывать 120 слагаемых, в каждом из которых 10 множителей? =)

Используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, в данном случае:
$n = 10$ – всего испытаний;
$m = 3$ – количество испытаний, в которых должен появиться орёл;

$p = \frac{1}{2}$ – вероятность появления орла в каждом испытании;

$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ – вероятность появления решки в каждом испытании.

Таким образом:

$P_{10}^{3} = C_{10}^{3} p^{3} q^{7} = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{120}{1024} = 0{,}1171875$ – вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет ровно 3 раза.

Ответ: $P_{10}^{3} \approx 0{,}12$

Следует отметить, что *повторный характер* независимых испытаний не является «жизненно важным» (необходимым) условием для применения формулы Бернулли. Рассмотрим похожую задачу *(которая, кстати, эквивалентна Задаче 8 урока о* ***классическом определении вероятности****)*:

Найти вероятность того, что при броске 10 монет орёл выпадет на 3-х монетах.

Здесь испытания не повторяются, а скорее, производятся одновременно, но, тем не менее, работает та же самая формула: $P_{10}^{3} = C_{10}^{3} p^{3} q^{7} = \ldots = 0{,}1171875$.

Решение будет отличаться смыслом и некоторыми комментариями, в частности:

$C_{10}^{3} = 120$ способами можно выбрать 3 монеты, на которых выпадет орёл.

$p = \frac{1}{2}$ – вероятность выпадения орла на каждой из 10-ти монет

и т.д.

Однако на практике подобные задачи встречаются не столь часто, и, видимо, по этой причине формула Бернулли чуть ли не стереотипно ассоциируется только с повторными испытаниями. Хотя, как только что было показано, повторяемость вовсе не обязательна.

Следующая задача для самостоятельного решения:

Задача 3

Игральную кость бросают 6 раз. Найти вероятность того, что 5 очков:

а) не выпадут *(выпадут 0 раз)*;
б) выпадут 2 раза;
в) выпадут 5 раз.

Результаты округлить до 4-х знаков после запятой.

Краткое решение и ответ в конце урока.

Очевидно, что в рассматриваемых примерах некоторые события более вероятны, а некоторые – менее вероятны. Так, например, при 6 бросках кубика даже безо всяких расчётов интуитивно понятно, что вероятности событий пунктов «а» и «бэ» значительно больше вероятности того, что «пятёрка» выпадет 5 раз. А теперь поставим задачу найти

НАИВЕРОЯТНЕЙШЕЕ число появлений события A в n независимых испытаниях

Опять же на уровне интуиции в Задаче №3 можно сделать вывод о том, что наивероятнейшее количество появлений «пятёрки» равно единице – ведь всего граней шесть, и при 6 бросках кубика каждая из них должна выпасть в среднем по одному разу. Желающие могут вычислить вероятность P_6^1 и посмотреть, будет ли она больше «конкурирующих» значений P_6^0 и P_6^2.

Сформулируем строгий критерий: для отыскания наивероятнейшего числа m_0 появлений случайного события A в n независимых испытаниях *(с вероятностью p в каждом испытании)* руководствуются следующим двойным неравенством:

$np - q \le m_0 < np + p$, причём:

1) если значение $np - q$ – дробное, то существует единственное наивероятнейшее число m_0;
в частности, если np – целое, то оно и есть наивероятнейшее число: $m_0 = np$;

2) если же $np - q$ – целое, то существуют **два** наивероятнейших числа: m_0 и $m_0 + 1$.

Наивероятнейшее число появлений «пятёрки» при 6 бросках кубика подпадает под частный случай первого пункта:

$$m_0 = np = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

В целях закрепления материала решим пару задач:

Задача 4

Вероятность того, что при броске мяча баскетболист попадёт в корзину, равна 0,3. Найти наивероятнейшее число попаданий при 8 бросках и соответствующую вероятность.

А это уже если и не Терминатор, то, как минимум, хладнокровный спортсмен =)

Решение: для оценки наивероятнейшего числа попаданий используем двойное неравенство $np - q \le m_0 < np + p$. В данном случае:

$n = 8$ – всего бросков;
$p = 0{,}3$ – вероятность попадания в корзину при каждом броске;
$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ – вероятность промаха при каждом броске.

Таким образом, наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках находится в следующих пределах:

$$8 \cdot 0{,}3 - 0{,}7 \le m_0 < 8 \cdot 0{,}3 + 0{,}3$$

$$2{,}4 - 0{,}7 \le m_0 < 2{,}4 + 0{,}3$$

$$1{,}7 \le m_0 < 2{,}7$$

Поскольку левая граница – дробное число *(пункт №1)*, то существует единственное наивероятнейшее значение, и, очевидно, что оно равно $m_0 = 2$.

Используя формулу Бернулли $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, вычислим вероятность того, что при 8 бросках будет ровно 2 попадания:

$$P_8^2 = C_8^2 \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^6 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^6 = \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^6 = 0{,}29647548$$

Ответ: $m_0 = 2$ – наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках, $P_8^2 \approx 0{,}2965$ – соответствующая вероятность.

Аналогичное задание для самостоятельного решения:

Задача 5

Монета подбрасывается 9 раз. Найти вероятность наивероятнейшего числа появлений орла

Примерный образец решения и ответ в конце урока.

А сейчас весьма любопытная ситуация: предположим, что во всех 9 испытаниях выпал орёл. Это, кстати, не являются каким-то уж сильно невероятным событием: $P_9^9 = C_9^9 \cdot p^9 \cdot q^0 = (0{,}5)^9 \approx 0{,}002$;-)

Вопрос: какая сторона монеты вероятнее всего выпадет в 10-м испытании?

Решка? Глубокое заблуждение!

Правильный ответ: вероятности останутся равными! Почему? Причина была сформулирована ещё в самом начале урока: поскольку испытания **независимы**, то вероятность выпадения орла либо решки в любом испытании **не зависит от результатов других испытаний**!

Однако игры разума таковы, что у многих людей напрашивается следующий вывод: «раз орёл выпал много раз подряд, то теперь выпадение решки **гораздо (!)** вероятнее». В теории и на практике этот психологический феномен получил название «Ошибка игрока». Если подбрасывать монету тысячи, десятки тысяч раз, то соотношение орлов/решек будет примерно равным *(о чём мы ещё поговорим в статье **Статистическое определение вероятности**)*. Но в этом процессе неоднократно встретятся эпизоды, когда монету «заклинит» на какой-то одной грани; и КАК ИМЕННО распределятся эти «необычные» случаи на длинной дистанции – никто не знает.

К слову, о «необычности». Любая случайная последовательность девяти орлов/решек**так же вероятна**, как и выпадение 9 орлов! Проверить данный факт легче лёгкого: запишем произвольную последовательность исходов, например:
Орёл/Решка/Решка/ Орёл /Решка/ Орёл /Решка/ Орёл /Орёл

По **теореме умножения вероятностей независимых событий**, вероятность появления этой цепочки:
$\tilde{p} = pqqpqpqpp = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = (0{,}5)^9$, что в точности равно вероятности выпадения девяти орлов $P_9^9 = (0{,}5)^9$!

И здесь мы сталкиваемся со второй иллюзией – человек склонен считать «красивые» комбинации чем-то из ряда вон выходящим и чуть ли не фантастическим. Но на самом деле ничего «необычного», например, в комбинации *О/О/О/Р/Р/Р/О/О/О* – нет, и она может запросто появиться в серии испытаний. Вероятность получить, скажем, пиковый «Ройял-флеш» в покере составляет 1:2598960, однако мало кто задумывается, что **с той же вероятностью** приходит ЛЮБАЯ, в том числе, совершено «мусорная» комбинация из пяти карт! И с этой точки зрения «сверхъестественная» комбинация *10, В, Д, К, Т пик* ничем не примечательна – встречалась «в истории» наряду с другими очень много раз.

Кстати, к теме нашего разговора относятся и типичные ситуации в карточных играх – когда «карта идёт» и наоборот – когда «постоянно сдают один мусор» или «фатально не везёт». Такие «полосы» бывают у каждого игрока, и никакой мистики в этом нет.

На просторах Интернета часто встречается популярный «секрет выигрыша» в рулетку, также известный под названием «Мартингейл». Примерная суть состоит в следующем:*«Ставьте на красное. Если выпало чёрное, удваивайте ставку и снова ставьте на красное. Если снова выпало чёрное, то ещё раз удваивайте ставку и снова ставьте на красное и т.д.»*. Казалось бы – вот оно, золотое дно, ведь красных секторов целых 18-ть из 37-ми *(18 черных и 1 зеро в европейской рулетке)*! И уж «красное» должно выпасть если не на 5-й, то на 10-й раз точно, что позволит отыграть всё ранее поставленное с прибылью!

Ничего подобного! Вероятность выпадения красного сектора в любом испытании<u>постоянна</u> $p = \frac{18}{37} \approx 0{,}4865$ <u>и никак не зависит от результатов предыдущих испытаний</u>. Постоянна – **и проигрышна** *(т.к. поставленные на «красное» деньги с вероятностью* $q = \frac{19}{37} \approx 0{,}5135$ *проигрываются, а в случае успеха – всего лишь удваиваются)*. Длинные серии «чёрного» вполне вероятны, и, кроме того, чтобы отыграть маленькую первоначальную ставку, игрок часто рискует куда более значительными суммами. Результат предсказуем. Поэтому данный «секрет», как и все остальные системы игры в рулетку – не работает. Заведению даже не надо как-то «подкручивать алгоритмы» или ограничивать игроков в размере ставок *(хотя, как правило, существует ограничение на размер депозита)*.

Остаётся вопрос: так почему же этот «удивительный способ» рекламируется в Сети на каждом шагу? Ответ прост: казино распиливает с владельцем сайта-лохотрона проигранные деньги каждого привлечённого Буратино. И что совсем забавляет – «благодетель» просит, чтобы особо везучие лохи отблагодарили его материально (обычно депозит сливается далеко не сразу и поначалу можно даже неплохо подняться). Кто виноват? Конечно же, мошенническая «шарашка», которая специально настроила программное обеспечение на «невероятный» проигрыш. Что делать? Попытать удачи в других заведениях.

«Ошибка игрока» совершается и многими участниками лотерей. На сайте одной лотереи на самом видном месте расположена информация о том, «какие номера давно не выпадали». И вот – целая армия энтузиастов начинает собирать статистику тиражей, подгадывать определённые комбинации и т.д. Чистой воды химера и пустая трата времени – если, например, №8 не выпадал 50 раз подряд, то он с таким же успехом может не выпасть ещё 150 розыгрышей *(это не ирония – я в прямом смысле)*. Однако если провести десятки тысяч тиражей, то количество появлений всех номеров будет примерно равным. Но В КАКОМ ПОРЯДКЕ И КАКИМИ СЕРИЯМИ будет выпадать та же «восьмёрка» на длинной дистанции – никто предсказать не может.

«Русское лото» в этом смысле честнее – оно призывает «поставить на любимые номера», т.е. приобрести билет (онлайн), в котором присутствуют понравившиеся числа.
Но в действительности **нет никакой разницы – покупаете ли вы билет наугад, или выбираете билет с определёнными числами, или даже если заполняете бланк самостоятельно**. Это если не учитывать потусторонние силы =)

После увлекательного отступления рассмотрим ещё несколько задач, а затем я поделюсь секретом правильной игры в азартные игры и лотереи.

Задача 6

Среди изделий, произведенных на станке-автомате, в среднем бывает 60% изделий первого сорта. Какова вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет:

а) от 2 до 4-х изделий первого сорта;
б) не менее 5 изделий первого сорта;
в) хотя бы одно изделие более низкого сорта.

Вероятность производства первосортного изделия не зависит от качества других выпущенных изделий, поэтому здесь идёт речь о независимых испытаниях. Старайтесь не пренебрегать анализом условия, а то может статься – события-то **зависимые** или задача вообще о другом.

Решение: вероятность зашифрована под проценты, которые, напоминаю, нужно разделить на сто: $p = \frac{60}{100} = 0{,}6$ – вероятность того, что выбранное изделие будет 1-го сорта.
Тогда: $q = 1 - p = 0{,}4$ – вероятность того, что оно не будет первосортным.

а) Событие *«Среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4-х изделий первого сорта»* состоит в трёх несовместных исходах:

среди $n = 6$ изделий будет 2 первосортных **или** 3 первосортных **или** 4 первосортных.

С исходами удобнее разделаться по отдельности. Трижды используем формулу Бернулли $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$:

$$P_6^2 = C_6^2 \cdot (0,6)^2 \cdot (0,4)^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 0,36 \cdot 0,0256 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 0,009216 = 0,13824;$$

$$P_6^3 = C_6^3 \cdot (0,6)^3 \cdot (0,4)^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 0,216 \cdot 0,064 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} \cdot 0,013824 = 0,27648;$$

$$P_6^4 = C_6^4 \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 0,1296 \cdot 0,16 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 0,020736 = 0,31104.$$

По **теореме сложения вероятностей несовместных событий**:
$P_6(2 \le m \le 4) = P_6^2 + P_6^3 + P_6^4 = 0,13824 + 0,27648 + 0,31104 = 0,72576$ – вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4-х изделий первого сорта.

Решение можно было записать и «одной строкой», что мы, впрочем, сделаем в следующем пункте:

б) Событие «*Среди 6 наудачу отобранных изделий будет не менее 5 изделий первого сорта»* состоит в 2-х несовместных исходах: первосортных изделий будет пять **или** шесть.

По **теореме сложения вероятностей несовместных событий**:
$P_6(m \ge 5) = P_6^5 + P_6^6 = C_6^5 \cdot (0,6)^5 \cdot (0,4)^1 + C_6^6 \cdot (0,6)^6 \cdot (0,4)^0 = 6 \cdot (0,6)^5 \cdot 0,4 + (0,6)^6 =$
$= 0,186624 + 0,046656 = 0,23328$ – искомая вероятность.

в) Вероятность того, что *«Среди 6 наудачу отобранных изделий будет хотя бы одно изделие более низкого сорта»* удобно найти через **вероятность противоположного события** *(«Все изделия будут первосортными»)*, которая уже известна:
$P_6(0 \le m \le 5) = 1 - P_6^6 = 1 - 0,046656 = 0,953344$ – вероятность того, что среди шести отобранных изделий окажется хотя бы одно низкосортное.

Ответ: а) 0,72576; б) 0,23328; в) 0,953344

Давайте заодно вспомним такое полезное понятие, как **полная группа событий**. Что осталось не найденным? Остались не найденными вероятности двух событий.

Не знаю кому как, а мне порядком поднадоел микрокалькулятор, и я предлагаю воспользоваться **расчётным макетом по теории вероятностей** – это подарок для самых прилежных студентов, которые не уходят курить во время моих занятий =)

Вводим исходные данные и получаем:
$P_6^0 = 0,004096$ – вероятность того, что все изделия окажутся более низкого сорта;
$P_6^1 = 0,036864$ – вероятность того, что среди 6 изделий будет только одно первосортное.

Проверка: $P_6^0 + P_6^1 + P_6^2 + P_6^3 + P_6^4 + P_6^5 + P_6^6 =$
$= 0,004096 + 0,036864 + 0,13824 + 0,27648 + 0,31104 + 0,186624 + 0,046656 = 1$,
что и требовалось проверить.

Небольшое задание для самостоятельного решения:

Задача 7

Производится 8 выстрелов по цели, в каждом из которых вероятность попадания равна 0,1. Найти вероятность того, что цель будет поражена хотя бы два раза.

Краткое решение и ответ в конце урока.

Следует отметить, что задачи на формулу Бернулли «хорошо узнаются» и обычно не вызывают затруднений. С дополнительными, в том числе весьма интересными примерами по теме можно ознакомиться в **этой pdf-ке с готовыми решениями**. И одну из таких задач я разберу в заключение урока:

Задача 8

Для нормальной работы вычислительного центра необходима безотказная работа в течение дня, как минимум, 5 компьютеров. Сколько компьютеров нужно установить, чтобы с вероятностью, не меньшей $\gamma = 0{,}99$ обеспечить нормальную работу центра, если вероятность отказа компьютера в течение дня равна 0,05?

Решение: из условия легко найти, что вероятность безотказной работы любого компьютера в течение дня составляет $p = 1 - q = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. Однако сам вопрос поставлен нетривиально – сколько компьютеров нужно установить? Иными словами, в формуле Бернулли $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$ нам не известно значение «эн».

Поскольку для нормальной работы центра необходима безотказная работа, **как минимум, 5 компьютеров**, то может быть пяти и хватит?

1) Если в вычислительном центре установить $n = 5$ компьютеров, то в течение дня безотказно должны работать они все. По формуле Бернулли:

$$P_5^5 = C_5^5 \cdot (0{,}95)^5 \cdot (0{,}05)^0 = (0{,}95)^5 \approx 0{,}7738$$

Но по условию нормальную работу центра нужно обеспечить **с вероятностью, не меньшей, чем** $\gamma = 0{,}99$ **!** А полученная нами вероятность P_5^5 безотказной работы всех пяти компьютеров – заметно меньше. Значит, необходимо увеличить количество машин:

2) Предположим, что в вычислительном центре установлено $n = 6$ компьютеров. Тогда для нормальной его работы в течение дня безотказно должны работать 5 или 6 компьютеров.

По **теореме сложения вероятностей несовместных событий**:

$$P_6(m \geq 5) = P_6^5 + P_6^6 = C_6^5 \cdot (0{,}95)^5 \cdot (0{,}05)^1 + C_6^6 \cdot (0{,}95)^6 \cdot (0{,}05)^0 = 6 \cdot (0{,}95)^5 \cdot 0{,}05 + (0{,}95)^6 =$$
$$= 0{,}232134281 + 0{,}735091891 = 0{,}967226172 \approx 0{,}9672$$ – вероятность того, что в течение дня безотказно будут работать, как минимум, 5 компьютеров из шести.

Данное значение нас тоже не устроит, так как оно меньше требуемой надёжности работы вычислительного центра: $0{,}9672 < \gamma$

Таким образом, шести компьютеров тоже не достаточно. Добавляем ещё один:

3) Пусть в вычислительном центре $n=7$ компьютеров. Тогда безотказно должны работать 5, 6 или 7 компьютеров. Используя формулу Бернулли и **теорему сложения вероятностей несовместных событий**, найдём вероятность того, что в течение дня безотказно будут работать, как минимум, 5 компьютеров из семи:

$$P_7(m \geq 5) = P_7^5 + P_7^6 + P_7^7 = C_7^5 \cdot (0{,}95)^5 \cdot (0{,}05)^2 + C_7^6 \cdot (0{,}95)^6 \cdot (0{,}05)^1 + C_7^7 \cdot (0{,}95)^7 \cdot (0{,}05)^0 =$$
$$= 21 \cdot (0{,}95)^5 \cdot (0{,}05)^2 + 7 \cdot (0{,}95)^6 \cdot 0{,}05 + (0{,}95)^7 =$$
$$= 0{,}040623499 + 0{,}257282162 + 0{,}698337296 = 0{,}996242957 \approx 0{,}9962 > \gamma$$

Есть! Требуемый уровень надёжности достигнут.

Можно, конечно, поставить и бОльшее количество компьютеров, но зачем переплачивать? =)

Ответ: чтобы обеспечить нормальную работу вычислительного центра в течение дня с вероятностью, не меньшей $\gamma = 0{,}99$, нужно установить не менее семи компьютеров.

Формула Бернулли очень удобна, но с другой стороны, обладает и рядом недостатков. Так, например, при достаточно больших значениях «эн» и «эм» её применение затруднено ввиду огромных значений факториалов. В этом случае используют **теоремы Лапласа**, которые мы рассмотрим на следующем уроке. Другая распространённая на практике ситуация – когда вероятность p некоторого события в отдельно взятом испытании достаточно мала, а количество испытаний n велико. Вопрос разрешается с помощью **формулы Пуассона**.

И, наконец, обещанный секрет:

…Так всё-таки – как правильно играть в азартные игры и лотереи?

Наверное, многие ожидали услышать от меня что-нибудь вроде: «Лучше вообще не играть», «Открыть собственное казино», «Организовать лотерею» и т.п.

Ну почему же не играть? Игра – это одно из развлечений, а за развлечения, как известно, нужно… совершенно верно! Поэтому средства, на которые вы играете, следует считать платой за развлечение, но ни в коем случае трагической потерей.

Тем не менее, каждый участник азартной игры хочет выиграть. И выиграть хорошую сумму. Какой тактики *(о стратегии речи не идет вообще)* выгоднее всего придерживаться в игре с заведомо проигрышным **математическим ожиданием**, например, в рулетке? Лучше всего сразу поставить **все** фишки, как вариант, на «красное» либо «чёрное». С вероятностью $p = \frac{18}{37} \approx 0{,}4865$ вы удвоитесь *(и быстро, и много!)*, и если это произойдёт – обязательно потратьте выигрыш на другие развлечения =)

Не имеет смысла играть по какой-то «системе» *(хотя бы потому, что это глупо)* и тратить на это часы/дни/недели – в той же рулетке заведение имеет минимальное преимущество, и проигрываться можно ооооочень долго. Если в оффлайновом казино это ещё как-то можно понять (общение, выпивка, девочки и т.д.), то онлайн игра оставит вас с красными глазами и чувством глубокой досады.

Что касается лотерей, то билет лучше покупать опять же ради развлечения и… наобум. Или «по наитию». Правда, лично я почему-то никогда не слышал об экстрасенсах и предсказателях, которые выигрывают в лотереи =) Не иначе, как шифруются.

Естественно, перечисленные советы не относятся к хроническим лудоманам и им как раз таки «Лучше вообще не играть». Ну а тем посетителям, которые мечтают разбогатеть на гэмблинге, настоятельно рекомендую прочитать либо ещё раз перечитать вводную статью по**теории вероятностей**.

Везения в главном!

Решения и ответы:

Задача 3: ***Решение****: используем формулу Бернулли:* $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$ *, в данной задаче:*

$n = 6$ *– всего испытаний;*

$p = \frac{1}{6}$ *– вероятность выпадения «пятёрки» в каждом испытании;*

$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ *– вероятность того, что «пятёрка» не выпадет (для каждого испытания).*

а) $m = 0$

$P_6^0 = C_6^0 p^0 q^6 = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}3349$ *– вероятность того, что в результате 6 бросков кубика «пятёрка» не появится.*

б) $m = 2$

$P_6^2 = C_6^2 p^2 q^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5^4}{6^4} = \frac{5^5}{2 \cdot 6^5} \approx 0{,}2009$ *– вероятность того, что в 6 испытаниях «пятёрка» выпадет ровно 2 раза.*

в) $m = 5$

$P_6^5 = C_6^5 p^5 q^1 = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6^5} \approx 0{,}0006$ *– вероятность того, что в 6 испытаниях «пятёрка» выпадет ровно 5 раз.*

Ответ*:* а) $\approx 0{,}3349$; б) $\approx 0{,}2009$; в) $\approx 0{,}0006$

Задача 5: ***Решение****: в данной задаче речь идёт о независимых испытаниях, при этом:*

Задачи на классическое определение вероятности. Примеры решений

На третьем уроке мы рассмотрим различные задачи, касающиеся непосредственного применения классического определения вероятности. Для эффективного изучения материалов данной статьи рекомендую ознакомиться с базовыми понятиями **теории вероятностей** и **основами комбинаторики**. Задача на классическое определение вероятности с вероятностью, стремящейся к единице, будет присутствовать в вашей самостоятельной/контрольной работе по терверу, поэтому настраиваемся на серьёзную работу. Вы спросите, чего тут серьёзного? …всего-то одна примитивная формула $p = \frac{m}{n}$. Предостерегаю от легкомыслия – тематические задания достаточно разнообразны, и многие из них запросто могут поставить в тупик. В этой связи помимо проработки основного урока, постарайтесь изучить дополнительные задачи по теме, которые находятся в копилке **готовых решений по высшей математике**. Приёмы решения приёмами решения, а «друзей» всё-таки «надо знать в лицо», ибо даже богатая фантазия ограничена и типовых задач тоже хватает. Ну а я постараюсь в хорошем качестве разобрать максимальное их количество.

Вспоминаем классику жанра:

Вероятность наступления события A в некотором испытании равна отношению $P(A) = \frac{m}{n}$, где:

n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов данного испытания, которые образуют полную группу событий;

m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

И сразу незамедлительный пит-стоп. Понятны ли вам подчёркнутые термины? Имеется ввиду чёткое, а не интуитивное понимание. Если нет, то всё-таки лучше вернуться к 1-й статье по**теории вероятностей** и только после этого ехать дальше.

Пожалуйста, не пропускайте первые примеры – в них я повторю один принципиально важный момент, а также расскажу, как правильно оформлять решение и какими способами это можно сделать:

Задача 1

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Решение: важнейшей предпосылкой для использования классического определения вероятности является **возможность подсчёта общего количества исходов**.

Всего в урне: 15 + 5 + 10 = 30 шаров, и, очевидно, справедливы следующие факты:

– извлечение любого шара одинаково возможно (***равновозможность*** *исходов)*, при этом исходы ***элементарны*** и образуют ***полную группу событий*** *(т.е. в результате испытания обязательно будет извлечён какой-то один из 30-ти шаров)*.

Таким образом, общее число исходов: $n = 30$

Рассмотрим событие: A – из урны будет извлечён белый шар. Данному событию благоприятствуют $m = 15$ элементарных исходов, поэтому по классическому определению:
$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар.

Как ни странно, даже в такой простой задаче можно допустить серьёзную неточность, на которой я уже заострял внимание в первой статье по **теории вероятностей**. Где здесь подводный камень? Здесь некорректно рассуждать, что *«раз половина шаров белые, то вероятность извлечения белого шара* $P(A) = \frac{1}{2}$ *»*. В классическом определении вероятности речь идёт об **ЭЛЕМЕНТАРНЫХ** исходах, и дробь $\frac{15}{30}$ следует обязательно прописать!

С другими пунктами аналогично, рассмотрим следующие события:

B – из урны будет извлечён красный шар;
C – из урны будет извлечён чёрный шар.

Событию B благоприятствует 5 элементарных исходов, а событию C – 10 элементарных исходов. Таким образом, соответствующие вероятности:
$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$;
$P(C) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Типичная проверка многих задач по терверу осуществляется с помощью **теоремы о сумме вероятностей событий, образующих полную группу**. В нашем случае события A, B, C образуют полную группу, а значит, сумма соответствующих вероятностей должна обязательно равняться единице: $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

Проверим, так ли это: $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$, в чём и хотелось убедиться.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{3}$

В принципе, ответ можно записать и подробнее, но лично я привык ставить туда только числа – по той причине, что когда начинаешь «штамповать» задачи сотнями и тысячами, то стремишься максимально сократить запись решения. К слову, о краткости: на практике распространён «скоростной» вариант оформления **решения**:

Всего: 15 + 5 + 10 = 30 шаров в урне. По классическому определению:
$p_Б = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар;

$p_к = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён красный шар;

$p_ч = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён чёрный шар.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{3}$

Однако если в условии несколько пунктов, то решение зачастую удобнее оформить первым способом, который отнимает чуть больше времени, но зато всё «раскладывает по полочкам» и позволяет легче сориентироваться в задаче.

Разминаемся:

Задача 2

В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Выберите целесообразный вариант оформления и сверьтесь с образцом внизу страницы.

В простейших примерах количество общих и количество благоприятствующих исходов лежат на поверхности, но в большинстве случаев картошку приходится выкапывать самостоятельно. Каноничная серия задач о забывчивом абоненте:

Задача 3

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

Примечание*: ноль – это чётное число (делится на 2 без остатка)*

Решение: сначала найдём общее количество исходов. По условию, абонент помнит, что одна из цифр – ноль, а другая цифра – нечётная. Здесь рациональнее не мудрить с**комбинаторикой** и воспользоваться ***методом прямого перечисления исходов***. То есть, при оформлении решения просто записываем все комбинации:
01, 03, 05, 07, 09
10, 30, 50, 70, 90

И подсчитываем их – всего: 10 исходов.

Благоприятствующий исход один: верный номер.

По классическому определению:
$p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ – вероятность того, что абонент наберёт правильный номер

Ответ: 0,1

Десятичные дроби в теории вероятностей смотрятся вполне уместно, но можно придерживаться и традиционного вышматовского стиля, оперируя только обыкновенными дробями.

Продвинутая задача для самостоятельного решения:

Задача 4

Абонент забыл пин-код к своей сим-карте, однако помнит, что он содержит три «пятёрки», а одна из цифр – то ли «семёрка», то ли «восьмёрка». Какова вероятность успешной авторизации с первой попытки?

Здесь ещё можно развить мысль о вероятности того, что абонента ждёт кара в виде пук-кода, но, к сожалению, рассуждения уже выйдут за рамки данного урока

Решение и ответ внизу.

Иногда перечисление комбинаций оказывается весьма кропотливым занятием. В частности, так обстоят дела в следующей, не менее популярной группе задач, где подкидываются 2 игральных кубика *(реже – бОльшее количество)*:

Задача 5

Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет:

а) пять очков;
б) не более четырёх очков;
в) от 3-х до 9 очков включительно.

Решение: найдём общее количество исходов:

$C_6^1 = 6$ способами может выпасть грань 1-го кубика **и** $C_6^1 = 6$ способами может выпасть грань 2-го кубика; по **правилу умножения комбинаций**,

всего: $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$ возможных комбинаций. Иными словами, **каждая** грань 1-го кубика может составить упорядоченную пару **с каждой** гранью 2-го кубика. Условимся записывать такую пару в виде (a, b), где a – цифра, выпавшая на 1-м кубике, b – цифра, выпавшая на 2-м кубике. Например:

$(3, 5)$ – на первом кубике выпало 3 очка, на втором – 5 очков, сумма очков: 3 + 5 = 8;
$(6, 1)$ – на первом кубике выпало 6 очков, на втором – 1 очко, сумма очков: 6 + 1 = 7;
$(2, 2)$ – на обеих костях выпало 2 очка, сумма: 2 + 2 = 4.

Очевидно, что наименьшую сумму даёт пара $(1, 1)$, а наибольшую – две «шестёрки».

а) Рассмотрим событие: A – при бросании двух игральных костей выпадет 5 очков. Запишем и подсчитаем количество исходов, которые благоприятствуют данному событию:
$(1, 4); (4, 1); (2, 3); (3, 2)$

Итого: 4 благоприятствующих исхода. По классическому определению:
$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ – искомая вероятность.

б) Рассмотрим событие: B – выпадет не более 4-х очков. То есть, либо 2, либо 3, либо 4 очка. Снова перечисляем и подсчитываем благоприятствующие комбинации, слева я буду записывать суммарное количество очков, а после двоеточия – подходящие пары:

$2\ \textit{очка}:\quad (1,1)$

$3\ \textit{очка}:\quad (1,2);\ (2,1)$

$4\ \textit{очка}:\quad (1,3);\ (3,1);\ (2,2)$

Итого: 6 благоприятствующих комбинаций. Таким образом:

$P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ – вероятность того, что выпадет не более 4-х очков.

в) Рассмотрим событие: C – выпадет от 3-х до 9 очков включительно. Здесь можно пойти прямой дорогой, но… что-то не хочется. Да, некоторые пары уже перечислены в предыдущих пунктах, но работы все равно предстоит многовато.

Как лучше поступить? В подобных случаях рациональным оказывается окольный путь. Рассмотрим **противоположное событие**: $\overline{C}$ – выпадет 2 или 10 или 11 или 12 очков.

В чём смысл? Противоположному событию благоприятствует значительно меньшее количество пар:

$2\ \textit{очка}:\quad (1,1)$

$10\ \textit{очков}:\quad (4,6);\ (6,4);\ (5,5)$

$11\ \textit{очков}:\quad (5,6);\ (6,5)$

$12\ \textit{очков}:\quad (6,6)$

Итого: 7 благоприятствующих исходов.

По классическому определению:

$P(\overline{C})=\frac{7}{36}$ – вероятность того, что выпадет меньше трёх или больше 9-ти очков.

Далее пользуемся тем, что **сумма вероятностей противоположных событий** равна единице:

$P(C)+P(\overline{C})=1 \quad\Rightarrow\quad P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{7}{36}=\frac{29}{36}$ – вероятность того, что выпадет от 3-х до 9 очков включительно.

Особо щепетильные люди могут перечислить все 29 пар, выполнив тем самым проверку.

Ответ: а) $\frac{1}{9}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{29}{36}$

В следующей задаче повторим таблицу умножения:

<u>Задача 6</u>

Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков:

а) будет равно семи;
б) окажется не менее 20-ти;
в) будет чётным.

Краткое решение и ответ в конце урока.

Рассмотренная задача встречается и в других вариациях, несколько дополнительных примеров по сабжу можно найти в соответствующем сборнике на странице **Готовые решения по высшей математике**.

Помимо прямого перечисления и подсчёта исходов, в ходу также различные **комбинаторные формулы**. И снова эпичная задача про лифт:

Задача 7

В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что:

а) они выйдут на разных этажах
б) двое выйдут на одном этаже;
в) все выйдут на одном этаже.

Следует отметить, что **случайность** здесь имеет место быть лишь с точки зрения стороннего наблюдателя *(т.к. человек обычно едет на вполне определённый этаж)*.

Решение: вычислим общее количество исходов: $C_{19}^1 = 19$ способами может выйти из лифта 1-й пассажир **и** $C_{19}^1 = 19$ способами – 2-й пассажир **и** $C_{19}^1 = 19$ способами – третий пассажир. По правилу умножения комбинаций: $C_{19}^1 \cdot C_{19}^1 \cdot C_{19}^1 = 19 \cdot 19 \cdot 19 = 6859$ возможных исходов. То есть,**каждый** этаж выхода 1-го человека может комбинироваться **с каждым** этажом выхода 2-го человека и **с каждым** этажом выхода 3-го человека.

Второй способ основан на **размещениях с повторениями**:
$A_{19(повт)}^3 = 19^3$ – кому как понятнее.

а) Рассмотрим событие: A – пассажиры выйдут на разных этажах. Вычислим количество благоприятствующих исходов:
$A_{19}^3 = 17 \cdot 18 \cdot 19 = 5814$ способами могут выйти 3 пассажира на разных этажах.
Рассуждения по формуле $C_{19}^3 \cdot P_3$ проведите самостоятельно.

По классическому определению:
$$P(A) = \frac{5814}{6859} = \frac{306}{361}$$

Теперь подумаем вот над какой вещью: пункт «бэ» достаточно сложен *(см. Задачу 11* ***урока по комбинаторике****)*, и значительная часть студентов, которые не в теме, просто не справится с этим пунктом. Но только не те, которые прочитают пару следующих абзацев!

в) Рассмотрим событие: B – пассажиры выйдут на одном этаже. Данному событию благоприятствуют $C_{19}^{1} = 19$ исходов и по классическому определению, соответствующая вероятность: $P(B) = \frac{19}{6859} = \frac{1}{361}$.

Заходим с чёрного хода:

б) Рассмотрим событие: C – два человека выйдут на одном этаже *(и, соответственно, третий – на другом)*.

События A, B, C образуют **полную группу** *(считаем, что в лифте никто не уснёт и лифт не застрянет =))*, а значит, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

В результате, искомая вероятность:

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{306}{361} - \frac{1}{361} = \frac{54}{361}$$

Таким образом, **теорема о сложении вероятностей событий, образующих полную группу**, может быть не только удобной, но и стать самой настоящей палочкой-выручалочкой!

Ответ: а) $\frac{306}{361} \approx 0{,}8476$, б) $\frac{54}{361} \approx 0{,}1496$, в) $\frac{1}{361} \approx 0{,}0028$

Когда получаются большие дроби, то хорошим тоном будет указать их приближенные десятичные значения. Обычно округляют до 2-3-4-х знаков после запятой.

Поскольку события пунктов «а», «бэ», «вэ» образуют полную группу, то есть смысл выполнить контрольную проверку, причём, лучше с приближенными значениями:

$0{,}8476 + 0{,}1496 + 0{,}0028 = 1$, что и требовалось проверить

Иногда по причине погрешности округлений может получиться 0,9999 либо 1,0001, в этом случае одно из приближенных значений следуют «подогнать» так, чтобы в сумме нарисовалась «чистая» единица.

Самостоятельно:

Задача 8

Подбрасывается 10 монет. Найти вероятность того, что:

а) на всех монетах выпадет орёл;
б) на 9 монетах выпадет орёл, а на одной – решка;
в) орёл выпадет на половине монет.

Краткое решение и ответ в конце урока.

Ничего страшного, если не получаются какие-то задачи или отдельные пункты – главное, стремитесь РАССУЖДАТЬ, ДУМАЙТЕ (пусть и не всегда успешно). В теории вероятностей плохо работает принцип «если дано то-то, то решать нужно так-то». И следующий пример – хорошее тому подтверждение:

Задача 9

На семиместную скамейку случайным образом рассаживается 7 человек. Какова вероятность того, что два определённых человека окажутся рядом?

Решение: с общим количеством исходов проблем не возникает:
$P_7 = 7! = 5040$ способами могут рассесться 7 человек на скамейке.

Но вот как подсчитать количество благоприятствующих исходов? Тривиальные формулы не подходят и единственный путь – это логические рассуждения. Сначала рассмотрим ситуацию, когда Саша и Маша оказались рядом на левом краю скамейки:

*	*					

Очевидно, что порядок имеет значение: слева может сидеть Саша, справа Маша и наоборот. Но это ещё не всё – **для каждого** из этих двух случаев остальные люди могут рассесться на свободных местах $5! = 120$ способами. Выражаясь комбинаторно, Сашу и Машу можно переставить на соседних местах $P_2 = 2!$ способами **и** для каждой такой перестановки других людей можно переставить $P_5 = 5! = 120$ способами.

Таким образом, по правилу умножения комбинаций, выходит $2! \cdot 5!$ благоприятствующих исходов.

Но и это ещё не всё! Перечисленные факты справедливы **для каждой** пары соседних мест:

*	*					
	*	*				
		*	*			
			*	*		
				*	*	
					*	*

Интересно отметить, что если скамейку «скруглить» *(соединяя левое и правое место)*, то образуется дополнительная, седьмая пара соседних мест. Но не будем отвлекаться. Согласно тому же принципу умножения комбинаций, получаем окончательное количество благоприятствующих исходов: $6 \cdot 2! \cdot 5!$

По классическому определению:
$p = \dfrac{6 \cdot 2! \cdot 5!}{7!} = \dfrac{6 \cdot 2}{6 \cdot 7} = \dfrac{2}{7}$ – вероятность того, что два определённых человека окажутся рядом.

Ответ: $\dfrac{2}{7} \approx 0,2857$

Советую всегда снабжать подобные задачи схематическим рисунком, поскольку «голые» словесные комментарии чреваты ошибками – даже если и не запутаетесь, то можете запросто обсчитаться.

Пожалуй, самая трудная задача урока:

<u>Задача 10</u>

На шахматную доску из 64 клеток ставят наудачу две ладьи белого и чёрного цвета. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга?

Справка*: шахматная доска имеет размер* 8×8 *клеток; черная и белая ладьи «бьют» друг друга, когда располагаются на одной горизонтали или на одной вертикали*

Обязательно выполните схематический чертёж доски, а ещё лучше, если неподалёку есть шахматы. Одно дело рассуждения на бумаге, и совсем другое – когда расставляешь фигуры собственными руками.

Моя версия решения в конце урока. Говорю так, потому что, возможно, существуют другие способы. И они действительно существует! – прошло совсем немного времени со дня публикации статьи, и один из посетителей сайта прислал более короткое и рациональное решение, которое тоже приведено ниже.

В заключительной части урока рассмотрим очень распространённый тип задач на классическое определение вероятности, который встречается чуть ли не в половине случаев:

Задача 11

Какова вероятность того, что в четырех сданных картах будет один туз и один король?

Решение: коль скоро неизвестный автор умолчал о колоде, будем считать, что в ней 36 карт. Ну а зачем нам больше? =)

Вычислим общее количество исходов. Сколькими способами можно извлечь 4 карты из колоды? Наверное, все поняли, что речь идёт о **количестве сочетаний**:

$C_{36}^4=\frac{36!}{32!\cdot4!}=\frac{33\cdot34\cdot35\cdot36}{24}=58905$ способами можно выбрать 4 карты из колоды.

Теперь считаем благоприятствующие исходы. По условию, в выборке из 4-х карт должен быть один туз, один король и, о чём не сказано открытым текстом, – **две другие карты**:

$C_4^1=4$ способами можно извлечь одного туза;

$C_4^1=4$ способами можно выбрать одного короля.

Исключаем из рассмотрения тузов и королей: 36 – 4 – 4 = 28

$C_{28}^2=\frac{28!}{26!\cdot2!}=\frac{27\cdot28}{2}=378$ способами можно извлечь две другие карты.

По правилу умножения комбинаций:

$C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_{28}^2=4\cdot4\cdot378=6048$ способами можно извлечь искомую комбинацию карт (1-го туза **и**1-го короля **и** две другие карты).

Прокомментирую комбинационный смысл записи $C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_{28}^2$ другим способом: **каждый** туз комбинируется **с каждым** королем и **с каждой** возможной парой других карт.

По классическому определению:
$p = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{28}^2}{C_{36}^4} = \frac{6048}{58905} = \frac{96}{935}$ – вероятность того, что среди четырех сданных карт будет один туз и один король.

Если хватает времени и терпения, максимально сокращайте большие дроби.

Ответ: $\frac{96}{935} \approx 0{,}1027$

Более простая задача для самостоятельного решения:

Задача 12

В ящике находится 15 качественных и 5 бракованных деталей. Наудачу извлекаются 2 детали. Найти вероятность того, что:

а) обе детали будут качественными;
б) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной;
в) обе детали бракованны.

События перечисленных пунктов образуют полную группу, поэтому проверка здесь напрашивается сама собой. Краткое решение и ответ в конце урока. А вообще, всё самое интересное только начинается!

Следующая задача очень распространена и актуальна для многих читателей. Когда она встречается, то я всегда думаю: «чего же он так много выучил-то?!». Поэтому сделаю пример более реалистичным =):

Задача 13

Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60-ти. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3-х вопросов?

Решение: итак, расклад таков: всего 60 вопросов, среди которых 25 «хороших» и, соответственно, 60 – 25 = 35 «плохих». Ситуация шаткая и не в пользу студента. Давайте узнаем, насколько хороши его шансы:

$C_{60}^3 = \frac{60!}{57! \cdot 3!} = \frac{58 \cdot 59 \cdot 60}{6} = 34220$ способами можно выбрать 3 вопроса из 60-ти *(общее количество исходов)*.

Для того чтобы сдать экзамен, нужно ответить на 2 **или** 3 вопроса. Считаем благоприятствующие комбинации:

$C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 = \frac{25!}{23! \cdot 2!} \cdot 35 = \frac{24 \cdot 25}{2} \cdot 35 = 10500$ способами можно выбрать 2 «хороших» вопроса **и** один «плохой»;

$C_{25}^3 = \frac{25!}{22! \cdot 3!} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{6} = 2300$ способами можно выбрать 3 «хороших» вопроса.

По **правилу сложения комбинаций**:
$C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3 = 10500 + 2300 = 12800$ способами можно выбрать

благоприятствующую для сдачи экзамена комбинацию 3-х вопросов *(без разницы с двумя или тремя «хорошими» вопросами)*.

По классическому определению:
$p = \frac{C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3}{C_{60}^3} = \frac{12800}{34220} = \frac{640}{1711}$ – вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Ответ: $\frac{640}{1711} \approx 0{,}37$

Да, конечно, «не фонтан», но и не всё так безнадёжно, к тому же всегда есть шансы что-нибудь родить и при ответе на «плохие» вопросы.

Популярная игра для самостоятельного исследования:

Задача 14

Игроку в покер сдаётся 5 карт. Найти вероятность того, что:

а) среди этих карт будет пара десяток и пара валетов;
б) игроку будет сдан флеш (5 карт одной масти);
в) игроку будет сдано каре (4 карты одного номинала).

Какую из перечисленных комбинаций вероятнее всего получить?

! Внимание! Если в условии задан подобный вопрос, то на него **необходимо** дать ответ.
В противном случае задание с высокой вероятностью не зачтут.

Справка*: в покер традиционно играют 52-х карточной колодой, которая содержит карты 4-х мастей номиналом от «двоек» до тузов.*

Покер – игра самая что ни на есть математическая (кто играет, тот знает), в которой можно обладать заметным преимуществом перед менее квалифицированными соперниками. Хотя, по моему субъективному впечатлению, «звёзды» покера, «набившие» миллионные состояния, не столько расчётливы, сколько сверхобострённо чувствуют своих оппонентов.

Хотел ещё разобрать 15-й задачей вероятность выигрыша в какую-нибудь из известных лотерей, но выкладки оказались достаточно сложными. В лотереях, которые я рассмотрел, фигурируют дополнительные условия и ограничения, словно специально призванные затруднить использование комбинаторных формул =) Впрочем, переживать не будем, поскольку на поставленный вопрос быстро и эффективно ответит **статистическое определение вероятности**.

Наше увлекательное занятие подошло к концу, и напоследок ещё раз настоятельно рекомендую если не прорешать, то хотя бы разобраться в **дополнительных задачах на классическое определение вероятности**. Как я уже отмечал, «набивка руки» тоже имеет значение!

Далее по курсу – **Геометрическое определение вероятности** и **Теоремы сложения и умножения вероятностей** и… везения в главном!

Решения и ответы:

*Задача 2: **Решение**: 30 – 5 = 25 холодильников не имеют дефекта.*
По классическому определению:

$p = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ – *вероятность того, что наугад выбранный холодильник не имеет дефекта.*

Ответ: $\frac{5}{6} \approx 0,8333$

Задача 4: ***Решение****: найдём общее число исходов:*

$C_4^1 = 4$ *способами можно выбрать место, на котором расположена сомнительная цифра* ***и на каждом*** *из этих 4-х мест могут располагаться 2 цифры (семёрка или восьмёрка). По правилу умножения комбинаций, общее число исходов:* $C_4^1 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$.

Как вариант, в решении можно просто перечислить все исходы (благо их немного):

7555, 8555, 5755, 5855, 5575, 5585, 5557, 5558

Благоприятствующий исход один (правильный пин-код).

Таким образом, по классическому определению:

$p = \frac{1}{8}$ – *вероятность того, что абонент авторизируется с 1-й попытки*

Ответ: $p = \frac{1}{8}$

Задача 6: ***Решение****: найдём общее количество исходов:*

Задача 6: ***Решение****: найдём общее количество исходов:*

$C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$ *способами могут выпасть цифры на 2-х кубиках.*

а) Рассмотрим событие: A – *при броске двух игральных костей произведение очков будет равно семи. Для данного события не существует благоприятствующих исходов, по классическому определению вероятности:*

$P(A) = \frac{0}{36} = 0$, *т.е. это событие является невозможным.*

б) Рассмотрим событие: B – *при броске двух игральных костей произведение очков окажется не менее 20-ти. Данному событию благоприятствуют следующие исходы:*

$20\ \textit{очков}: \quad (4, 5); (5, 4)$

$24\ \textit{очка}: \quad (4, 6); (6, 4)$

$25\ \textit{очков}: \quad (5, 5)$

$30\ \textit{очков}: \quad (5, 6); (6, 5)$

$36\ \textit{очков}: \quad (6, 6)$

Итого: 8

По классическому определению:

$P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ – *искомая вероятность.*

в) Рассмотрим противоположные события:

C – *произведение очков будет чётным;*

$\overline{C}$ – *произведение очков будет нечётным.*

Перечислим все исходы, благоприятствующие событию $\overline{C}$:

$1\,очко: \quad (1,1)$

$3\,очка: \quad (1,3); (3,1)$

$5\,очков: \quad (1,5); (5,1)$

$9\,очков: \quad (3,3)$

$15\,очков: \quad (3,5); (5,3)$

$25\,очков: \quad (5,5)$

Итого: 9 благоприятствующих исходов.

По классическому определению вероятности: $P(\overline{C}) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

Противоположные события образуют полную группу, поэтому:

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ *– искомая вероятность.*

***Ответ**:* $а)\ 0, \quad б)\ \dfrac{2}{9}, \quad в)\ \dfrac{3}{4}$

*Задача 8: **Решение**: вычислим общее количество исходов:* $A^{10}_{2(мoнет)} = 2^{10} = 1024$ *способами могут упасть 2 монеты.*

Другой путь: $C^1_2 = 2$ *способами может упасть 1-ая монета **и** $C^1_2 = 2$ способами может упасть 2-ая монета **и** … **и** $C^1_2 = 2$ способами может упасть 10-ая монета. По правилу умножения комбинаций, 10 монет могут упасть* $\underbrace{C^1_2 \cdot C^1_2 \cdot \ldots \cdot C^1_2}_{10\ раз} = 2^{10} = 1024$ *способами.*

а) Рассмотрим событие: A – на всех монетах выпадет орёл. Данному событию благоприятствует единственный исход, по классическому определению вероятности: $P(A) = \dfrac{1}{1024}$ *.*

б) Рассмотрим событие: B – на 9 монетах выпадет орёл, а на одной – решка.

Существует $C^1_{10} = 10$ *монет, на которых может выпасть решка. По классическому определению вероятности:* $P(B) = \dfrac{10}{1024} = \dfrac{5}{512}$ *.*

в) Рассмотрим событие: C – орёл выпадет на половине монет.

Существует $C^5_{10} = \dfrac{10!}{5! \cdot 5!} = \dfrac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{120} = 252$ *уникальных комбинаций из пяти монет, на которых может выпасть орёл. По классическому определению вероятности:* $P(C) = \dfrac{252}{1024} = \dfrac{63}{256}$

***Ответ**:* $а)\ \dfrac{1}{1024} \approx 0{,}0010, \quad б)\ \dfrac{5}{512} \approx 0{,}0098, \quad в)\ \dfrac{63}{256} \approx 0{,}2461$

Задача 10: **Способ первый**: вычислим общее количество исходов:
$A_{64}^2 = 63 \cdot 64 = 4032$ способами можно расставить двух ладей на доске.

Другой вариант оформления: $C_{64}^2 = \frac{64!}{62! \cdot 2!} = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$ способами можно выбрать две клетки шахматной доски **и** $P_2 = 2! = 2$ способами поставить белую и чёрную ладью **в каждом** из 2016 случаев. Таким образом, общее число исходов: $C_{64}^2 \cdot P_2 = 2016 \cdot 2 = 4032$.

Теперь подсчитаем исходы, в которых ладьи «бьют» друг друга.
Рассмотрим 1-ую горизонталь. Очевидно, что фигуры можно расставить на ней произвольным образом, например, так:

БЛ					ЧЛ		

Кроме того, ладей можно переставить. Придаём рассуждениям числовую форму: $C_8^2 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$ способами можно выбрать две клетки **и** $P_2 = 2! = 2$ способами переставить ладей **в каждом** из 28 случаев.
Всего: $C_8^2 \cdot P_2 = 28 \cdot 2 = 56$ возможных расположений фигур на горизонтали.

Короткая версия оформления: $A_8^2 = 7 \cdot 8 = 56$ способами можно разместить белую и чёрную ладью на 1-й горизонтали.

Проведённые рассуждения справедливы **для каждой** горизонтали, поэтому количество комбинаций следует умножить на восемь: $8 \cdot A_8^2$. Кроме того, аналогичная история справедлива для любой из восьми вертикалей.
Вычислим итоговое количество расстановок, в которых фигуры «бьют» друг друга:
$8 \cdot A_8^2 + 8 \cdot A_8^2 = 8 \cdot 56 + 8 \cdot 56 = 448 + 448 = 896$
Тогда в оставшихся вариантах расстановки ладьи не будут «бить» друг друга:
4032 – 896 = 3136

По классическому определению вероятности:
$p = \frac{3136}{4032} = \frac{7}{9}$ – вероятность того, что наугад поставленные на доску белая и чёрная ладья не будут «бить» друг друга.

Ответ: $\frac{7}{9} \approx 0{,}78$

Способ второй: $C_{64}^1 = 64$ способами можно поставить на доску одну ладью **и для каждого** из этих 64-х случаев другая ладья может выставлена на любую из $C_{63}^1 = 63$ свободных клеток (проанализируйте, что это рассуждение учитывает все расстановки белой и черной ладей). Таким образом, по правилу умножения комбинаций: $C_{64}^1 \cdot C_{63}^1 = 64 \cdot 63$ – общее число исходов.
Для каждого из 64-х способов расстановки одной ладьи она будет «бить» другую ладью, если последняя окажется на любой из 7 свободных клеток той же горизонтали или 7 свободных клеток той же вертикали (итого 14

клеток). Следовательно, существует $64 \cdot 14$ *расстановок ладей, в которых они «бьют» друг друга. По классическому определению вероятности:*

$$q = \frac{64 \cdot 14}{64 \cdot 63} = \frac{2}{9}$$

– вероятность того, что наугад поставленные на доску белая и чёрная ладья будут «бить» друг друга.

Тогда вероятность противоположного события:

$$p = 1 - q = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

***Ответ**:* $\frac{7}{9} \approx 0{,}78$

*Задача 12: **Решение**: всего: 15 + 5 = 20 деталей в ящике. Вычислим общее число исходов:*

$$C_{20}^{2} = \frac{20!}{18! \cdot 2!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$$

способами можно извлечь 2 детали из ящика.

а) Рассмотрим событие: A *– обе извлечённые детали будут качественными.*

$$C_{15}^{2} = \frac{15!}{13! \cdot 2!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105$$

способами можно извлечь 2 качественные детали.

По классическому определению вероятности: $P(A) = \frac{C_{15}^{2}}{C_{20}^{2}} = \frac{105}{190} = \frac{21}{38}$

б) Рассмотрим событие: B *– одна деталь будет качественной, а одна – бракованной.*

$C_{15}^{1} \cdot C_{5}^{1} = 15 \cdot 5 = 75$ *способами можно извлечь 1 качественную деталь **и** 1 бракованную.*

По классическому определению: $P(B) = \frac{C_{15}^{1} \cdot C_{5}^{1}}{C_{20}^{2}} = \frac{75}{190} = \frac{15}{38}$

в) Рассмотрим событие: C *– обе извлечённые детали бракованны.*

$$C_{5}^{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

способами можно извлечь 2 бракованные детали.

По классическому определению: $P(C) = \frac{C_{5}^{2}}{C_{20}^{2}} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$

***Проверка**: вычислим сумму вероятностей событий, образующих полную группу:* $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{21}{38} + \frac{15}{38} + \frac{2}{38} = \frac{38}{38} = 1$*, что и требовалось проверить.*

***Ответ**:* а) $\frac{21}{38}$, б) $\frac{15}{38}$, в) $\frac{1}{19}$

*Задача 14: **Решение**: найдём общее число исходов:*

$$C_{52}^{5} = \frac{52!}{47! \cdot 5!} = \frac{48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}{120} = 2598960$$

способами можно сдать 5 карт.

а) $C_{4}^{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ *способами можно сдать две десятки;*

$C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ *способами можно сдать 2-х валетов;*
Количество других карт в колоде: 52 – 4 – 4 = 44
$C_{44}^1 = 44$ *способами можно сдать другую карту.*
По правилу умножения комбинаций:
$C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{44}^1 = 6\cdot 6\cdot 44 = 1584$ *способами можно сдать 5 карт, среди которых будет пара десяток и пара валетов.*

По классическому определению: $p = \frac{C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{44}^1}{C_{52}^5} = \frac{1584}{2598960} \approx 0{,}0006$

б) В колоде: 52 / 4 = 13 карт каждой масти.
$C_{13}^5 = \frac{13!}{8!\cdot 5!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{120} = 1287$ *способами можно сдать 5 карт какой-то одной из мастей.*
По правилу сложения комбинаций:
$C_{13}^5 + C_{13}^5 + C_{13}^5 + C_{13}^5 = 1287 + 1287 + 1287 + 1287 = 5148$ *способами можно сдать флеш (без разницы какой масти).*

По классическому определению: $p_{\Phi} = \frac{C_{13}^5 + C_{13}^5 + C_{13}^5 + C_{13}^5}{C_{52}^5} = \frac{5148}{2598960} \approx 0{,}002$

в) Четыре карты одного номинала можно сдать 13-ю способами (2222, 3333, 4444, …, КККК, ТТТТ). Кроме того, ***для каждого*** *из этих 13-ти случаев пятую карту можно сдать* $C_{48}^1 = 48$ *способами. Таким образом, по теореме умножения комбинаций, каре можно сдать* $13\cdot C_{48}^1 = 13\cdot 48 = 624$ *способами.*

По классическому определению: $p_K = \frac{13\cdot C_{48}^1}{C_{52}^5} = \frac{624}{2598960} \approx 0{,}0002$

Ответ: а) $\approx 0{,}0006$, б) $\approx 0{,}002$, в) $\approx 0{,}0002$
Из перечисленных комбинаций вероятнее всего получить флеш.

Относительная частота события
и статистическое определение вероятности

Сегодня мы завершаем изучение первого раздела **теории вероятностей**, который посвящён основным подходам к определению вероятности, теоремам сложения и умножения событий, а также их основным следствиям. В учебной литературе ***статистическое определение вероятности*** обычно рассматривается в первой же главе, но вот мне показалось удачным отложить этот вопрос на заключительный урок по теме. Давайте вспомним, с чего всё начиналось:

Вероятность наступления события A в некотором испытании – есть отношение $P(A) = \frac{m}{n}$, где:

n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, которые образуют полную группу событий;

m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

О некоторых недостатках **классического определения вероятности** заходила речь в статье **Геометрическое определение вероятности**, но это только верхушка айсберга, и сейчас данный вопрос получит интереснейшее продолжение. Начнём опять же с бесхитростных примеров **1-го урока по теории вероятностей**:

$P(A_o) = \frac{1}{2}$ – вероятность того, что в результате броска монеты **выпадет** «орёл»;
$P(B_5) = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости **выпадет** 5 очков;
$P(C_T) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что из колоды **будет извлечена** трефа

Внимательный читатель заметил, что все комментарии о вероятностях сформулированы в**будущем времени**. И это не случайность – **классическое определение**, как правило, оценивает вероятность **ДО** проведения испытаний и даже без их фактического проведения. То есть, монета ещё не подброшена, а вероятность появления орла мы уже прекрасно знаем. Можно дать зарок никогда не брать в руки кубик либо колоду карт, однако, вероятности событий B_5, C_T беспроблемно рассчитываются и без этого.

Примечание*: однако, в отсутствии информации о результате испытания фразу «Вероятность того, что монета* ***упала*** *орлом» (например) всё же нельзя признать некорректной. То есть классическое определение может оценивать вероятность и после реального опыта.*

Почему такое возможно? Такое возможно потому, что **все** элементарные исходы известны и подсчитаны заранее:

орёл и решка – итого 2 элементарных исхода;
1, 2, 3, 4, 5, 6 – 6 элементарных исходов;
6, 7, 8, 9, 10, В, Д, К, Т каждой масти – всего 36 карт.

Кроме того, для применения **классического определения вероятности** необходимаравновозможность элементарных исходов *(см. определение)*. Равновозможность выпадения граней монеты либо кубика обуславливается симметрией и несмещённым центром тяжести, колода же карт должна быть полной, некраплёной и хорошо перемешанной.

И всё было бы ладно, но в реальной жизни подобные модели встречаются нечасто. В большинстве ситуаций элементарные исходы перечислить затруднительно или невозможно, и ещё труднее обосновать их равновозможность. Простой пример:

Штирлиц пошёл в лес за грибами. Найти вероятность того, что он найдёт подберёзовик.

Совершенно понятно, что все грибы в лесу *(общее количество элементарных исходов)*пересчитать практически невозможно, а значит, классическое определение вероятности не срабатывает. И даже если группа разведчиков учтёт все грибы в небольшой роще, классифицирует их по видам, то препятствием станет неравновозможность исходов. Почему? Поляна мухоморов намного заметнее, чем замаскировавшиеся подберёзовики. …Тааaак, кто это там на задней парте предложил покрасить в один цвет? =)

Кстати, каверзная задачка на счёт равновозможности была в конце урока о **теоремах Лапласа**. Краткая суть состоит в следующем: если в городе проживает примерно равное количество мужчин и женщин *(которых подсчитать значительно проще =))*, то это ещё не значит, что вероятность встретить на улице мужчину либо женщину равна $\frac{1}{2}$-й.

Вновь обратим внимание на шаблонные формулировки:

«Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8»;
«Вероятность изготовления бракованной детали на данном станке составляет 0,05».

Возникает вопрос, откуда взялись эти значения? Примеры не так надуманны, как кажется, и ответ один: данные вероятности могли получиться **только на основе проведённых ранее опытов**.

Относительная частота события и статистическая вероятность

Относительной частотой события A называют отношение числа испытаний m, в которых данное событие появилось, к общему числу n фактически проведённых испытаний:

$W(A)=\frac{m}{n}$, или короче: $\omega=\frac{m}{n}$

Относительная частота наряду с ***вероятностью*** является одним из ключевых понятий тервера, но если **классическое** либо **геометрическое определение вероятности** не требуют проведения испытаний, то относительная частота рассчитывается исключительно ПОСЛЕ опытов на основе фактически полученных данных.

В том случае, если серии испытаний проводятся в неизменных условиях, то относительная частота обнаруживает свойство ***устойчивости***, то есть колеблется около определённого значения.

Пусть некий профессиональный стрелок произвёл 100 выстрелов по мишени и попал 83 раза. Тогда относительная частота поражения цели составит: $\omega=\frac{83}{100}=0{,}83$.

Предположим, что тот же самый стрелок в точно такой же «форме» и в приблизительно таких же условиях снова провёл серию из 100 выстрелов. Вероятно ли, что он снова попадёт 83 раза? Не очень. Но количество попаданий вряд ли будет сильно отличаться от предыдущего результата. Пусть, например, стрелок попал 79 раз. Тогда относительная частота поражения цели составит: $\omega=\frac{79}{100}=0{,}79$.

В третьей серии из 100 выстрелов, проведённой при похожих обстоятельствах, данный стрелок попал 81 раз, $\omega = \frac{81}{100} = 0{,}81$ и т.д.

Иногда могут случаться блестящие серии более 90 попаданий, иногда «провалы», но среднее количество попаданий будет варьироваться около 80-ти. И когда количество фактически проведённых испытаний станет достаточно большим, то речь зайдёт о ***статистической вероятности***. Если в одинаковых (примерно одинаковых) условиях проведено достаточно много испытаний, то за ***статистическую вероятность события*** принимают относительную частоту данного события либо близкое число.

Предположим, что на протяжении нескольких лет наш спортсмен, сохраняя стабильный уровень подготовки, совершил 10000 выстрелов и попал 8037 раз. Относительная частота поражения цели составит: $\omega = \frac{8037}{10000} = 0{,}8037$ и за статистическую вероятность его результативности целесообразно принять $p = 0{,}8$, которая становится теоретической оценкой, например, перед грядущими соревнованиями.

Представьте, что во время лекции этот профессионал зашёл с винтовкой аудиторию и прицелился. Теперь вам должен стать окончательно понятен смысл фразы *«Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8»* =) =)

Именно так собирается богатая спортивная статистика в различных видах спорта.

Аналогичная история с утверждением *«Вероятность изготовления бракованной детали на данном станке равна 0,05»*. Эту оценку невозможно получить с помощью **классического определения вероятности** – она следует только из практики! Если на станке произведены десятки тысяч деталей и на каждую, скажем, тысячу выпущенных деталей, приходится в среднем 50 бракованных, то в качестве статистической вероятности брака принимается значения $p = 0{,}05$.

В Задаче 2 урока **Локальная и интегральная теоремы Лапласа** фигурировала вероятность рождения мальчика $p = 0{,}52$. Откуда взялось данное число? Из многолетнего подсчёта фактически рождённых детей в определённом регионе. В указанной статье мы выяснили, что это вовсе не значит, что среди 100 новорожденных будет ровно 52 мальчика. В следующей сотне рождённых их может оказаться, например, 45, и относительная частота $\omega = \frac{45}{100} = 0{,}45$ будет далека от истины. Но если рассмотреть выборку в тысячи и десятки тысяч младенцев, то ω отклонится от $p = 0{,}52$ совсем-совсем незначительно. **И это уже не случайность**. Как известно, такое соотношение новорожденных сложилось эволюционно – по причине бОльшей смертности мужчин.

В учебном пособии *В.Е. Гмурмана* есть весьма удачный пример, в котором продемонстрировано, как при подбрасывании монеты относительная частота появления орла приближается к своей вероятности $p = \frac{1}{2}$ *(полученной* по классическому определению):

Количество бросков монеты, n	Число появлений орла, m	Относительная частота, $\omega = \frac{m}{n}$
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Какой можно сделать вывод? С увеличением количества независимых испытаний**случайность превращается в закономерность**. Однако следует помнить, что порядок выпадения орлов непредсказуем, о чём я подробно рассказывал на уроке Независимые испытания и формула Бернулли.

Вернёмся к европейской рулетке с 18 красными, 18 чёрными секторами и 1 зеро. В самом примитивном варианте игры: ставим на «красное» или «чёрное», и если шарик остановился на секторе другого цвета (вероятность $q = \frac{19}{37} \approx 0{,}5135$) – ставка проигрывается. В случае успеха – удваиваемся (вероятность $p = \frac{18}{37} \approx 0{,}4865$).

В отдельно взятом сеансе игры отдельно взятый человек может выиграть, причём выиграть по-крупному. **Это случайность**. Но, совершая миллионы оборотов, рулетка на протяжении веков приносит неизменную прибыль владельцам казино. И это – **закономерность**. Существует байка о том, что крупный выигрыш не отдадут, а если и отдадут, то «вы с ним не дойдёте до дома». Чистая «киношная» фантазия. Кому-то повезло, но сколько проиграется?! К тому же человек, посещающий подобные заведения, с большой вероятностью придёт снова и «сольёт ещё больше» =) А чтобы он вернулся, казино, скорее наоборот – создаст максимальный комфорт и безопасность для «счастливчика».

Другой, во многом условный, пример: пусть в некой лотерее приняло участие $n = 629911$ билетов, из которых $m = 192833$ выиграли хоть какой-то приз. Таким образом, относительная частота выигрыша составила: $\omega = \frac{192833}{629911} \approx 0{,}306127$. Поскольку билетов продано очень много, то с большой вероятностью можно утверждать, что в будущем при сопоставимых объемах продаж доля выигравших билетов будет примерно такой же, и за статистическую вероятность выигрыша удобно принять значение $p = 0{,}3$.

Организатор лотереи знает, что из миллиона проданных билетов выиграют около 300 тысяч с небольшим отклонением. **И это закономерность**. Но всем участникам лотереи достаётся…. – правильно, **случайность**! То есть, если вы купите 10 билетов, то это ещё не значит, что выиграют 3 билета. Так, например, по формуле Бернулли нетрудно подсчитать, что выигрыш только по одному билету из 10-ти – есть событие вполне вероятное:

$P_{10}^{1} = C_{10}^{1} \cdot (0{,}3)^1 \cdot (0{,}7)^9 = 10 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}7)^9 \approx 0{,}12$

А если учесть тот факт, что ошеломительная доля выигрышей – ~~не~~приятная мелочь, то картина вырисовывается довольно унылая, ибо маловозможные события не происходят. Ситуацию спасают красочные телевизионные розыгрыши и различные психологические трюки.

Желающие могут самостоятельно исследовать вероятность выигрыша в различные лотереи – вся статистика есть в свободном доступе

Практическая часть урока будет тесно связана с только что изложенным материалом:

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности

Вероятность того, что в n **независимых испытаниях** относительная частота $\omega = \frac{m}{n}$ события A отклонится от вероятности p *(появления данного события в каждом испытании)* не более чем на ε, приблизительно равна:

$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – **функция Лапласа**.

Собственно, эта формула и выведена из **интегральной теоремы Лапласа**.

Итак, расклад следующий: в распоряжении имеется вероятность p наступления события A, которая предварительно получена с помощью классического/геометрического определения или посредством серьёзной статистической оценки. Планируется провести n независимых испытаний, в которых событие A может наступить некоторое количество раз, причём значение m, разумеется, предсказать нельзя. Полученная относительная частота $\omega = \frac{m}{n}$ может оказаться как больше, так и меньше вероятности p (поэтому нужен знак модуля).

Требуется найти вероятность того, что в серии из n независимых испытаний, расхождение между относительной частотой и теоретической вероятностью $\left|\frac{m}{n} - p\right|$, будет не больше, чем заранее заданное число, например, не больше, чем $\varepsilon = 0{,}01$ (один процент).

Начнём с самых маленьких :=)

Задача 1

В некотором регионе в результате многолетнего статистического исследования установлена вероятность рождения мальчика $p = 0{,}52$. С какой вероятностью можно утверждать, что среди следующей тысячи новорожденных, относительная частота появления мальчика отклонится от соответствующей вероятности не более чем на 0,02?

Решение: используем формулу $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$

По условию: $p = 0{,}52; \quad n = 1000; \quad \varepsilon = 0{,}02$

Таким образом:

$$P\left(\left|\frac{m}{1000} - 0{,}52\right| \le 0{,}02\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0{,}02 \cdot \sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}52 \cdot 048}}\right) \approx 2\Phi(1{,}27) \approx 2 \cdot 0{,}3980 = 0{,}7959$$

– искомая вероятность.

Напоминаю, что значения функции Лапласа можно найти по соответствующей таблице или с помощью **расчётного макета** *(пункт 5)*.

Ответ: $\approx 0{,}7959$

Каков смысл полученного результата? Если рассмотреть достаточно много групп по 1000 новорожденных в каждой, то примерно в 79,59% этих групп доля мальчиков будет находиться в пределах:

$$p - \varepsilon \le \frac{m}{n} \le p + \varepsilon$$

$$0{,}52 - 0{,}02 \le \frac{m}{1000} \le 0{,}52 + 0{,}02$$

$$0{,}50 \le \frac{m}{1000} \le 0{,}54$$

Или, умножая все три части на тысячу: от 500 до 540 мальчиков.

На самом деле рассмотренная задача эквивалентна следующей: *«Найти вероятность того, что среди 1000 новорожденных будет от 500 до 540 мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0,52»*. А эта задача как раз и решается через известную вам**интегральную теорему Лапласа**.

Посмотрим на правую часть формулы $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$ и проанализируем, как при прочих равных условиях рассматриваемая вероятность зависит от размера выборки?

При росте «эн», дробь $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$ будет увеличиваться, а, как вы знаете, $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0{,}5$. То есть, вероятность отклонения $\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon$ рано или поздно приблизится к единице. И это неудивительно – как неоднократно показано в предыдущих примерах, при росте n относительная частота события $\omega = \frac{m}{n}$ всё ближе и ближе стремится к вероятности p данного события, а значит, при достаточно большом количестве испытаний разница $\left|\frac{m}{n} - p\right|$ практически достоверно будет не больше наперёд заданного числа ε.

Наоборот – при уменьшении «эн» дробь $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$ тоже будет уменьшаться, следовательно, значение $\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$ будет приближаться к нулю $(\Phi(0)=0)$. Нетрудно понять, что при слишком малой выборке **теорема Лапласа** работать перестанет. И действительно – ведь все $n=10$ детей в семье могут вообще оказаться девочками. Такое бывает.

Пара задач для самостоятельного решения:

Задача 2

Производится некоторый опыт, в котором случайное событие A может появиться с вероятностью 0,6. Опыт повторяют в неизменных условиях 800 раз. Определить вероятность того, что в 800 независимых испытаниях относительная частота появления события A отклонится от вероятности не более чем: а) на 0,05, б) на 0,03

Условие сформулировано в общем виде, как оно чаще всего и бывает. Ещё раз повторим суть задания: проводится $n=800$ опытов, в результате чего событие A наступит m раз – сколько именно, предугадать невозможно. Относительная частота составит $W(A)=\frac{m}{n}=\frac{m}{800}$. С другой стороны, известна вероятность $p=0{,}6$ события A, которая установлена ранее с помощью классического/геометрического определения или путём сбора солидной статистики. Требуется найти вероятность того, что относительная частота отклонится от вероятности, не более чем на $\varepsilon=0{,}05$: $\left|\frac{m}{800}-0{,}6\right|\le 0{,}05$ В чём смысл? С найденной вероятностью $P\left(\left|\frac{m}{800}-0{,}6\right|\le 0{,}05\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)=\gamma$ можно утверждать, что относительная частота будет заключена в следующих пределах:

$$p-\varepsilon\le\frac{m}{n}\le p+\varepsilon$$

$$0{,}6-0{,}05\le\frac{m}{800}\le 0{,}6+0{,}05$$

$$0{,}55\le\frac{m}{800}\le 0{,}65$$

Или в абсолютном количестве появлений события A:

$$0{,}55\cdot 800\le m\le 0{,}65\cdot 800$$

$$440\le m\le 520$$

Надо сказать, что границы достаточно вольные и вероятность γ должна получиться большой. Если же наперёд заданная точность составит $\varepsilon=0{,}03$, то промежуток сократится: $0{,}57 \le \frac{m}{800} \le 0{,}63$, и, понятно, что вероятность $\gamma = P\left(\left|\frac{m}{800} - 0{,}6\right| \le 0{,}03\right)$ данного события будет меньше.

Следующий пример для самых мудрых участников лотереи :)

Задача 3

Вероятность выигрыша в лотерею равна 0,3. Продано 600000 билетов. Найти вероятность того, что относительная частота выигрыша отклонится от вероятности выигрыша не более чем на $\varepsilon = 0{,}001$.

Иными словами, требуется найти вероятность того, что относительная частота выигрыша будет находиться в пределах: $0{,}299 \le \frac{m}{600000} \le 0{,}301$ (то есть выиграют от $m_1 = 0{,}299 \cdot 600000 = 179400$ до $m_2 = 0{,}301 \cdot 600000 = 180600$ билетов).

Эта информация очень важнА для корректного распределения призового фонда. Но, повторюсь, пример достаточно условный, т.к. не учитывает правила и ограничения той или иной лотереи.

Краткое решение и ответы в конце урока.

На практике не менее популярна и обратная задача:

Как определить, сколько нужно провести испытаний (n) чтобы с заранее заданной вероятностью γ обеспечить желаемую точность ε?

В предыдущем примере получена довольно высокая вероятность γ того, что количество выигравших билетов окажется в достаточно узком интервале: ± 600 билетов $(\pm 0{,}1\%)$ относительно наивероятнейшего количества $np = 600000 \cdot 0{,}3 = 180000$.

Но, конечно же, хочется, чтобы вероятность γ была побольше:

Задача 4

Вероятность выигрыша в лотерею равна 0,3. Сколько билетов должно участвовать в розыгрыше, чтобы с вероятностью не меньшей чем $\gamma = 0{,}99$, можно было ожидать, что относительная частота выигрыша отклонится от теоретической вероятности не более чем на $\varepsilon = 0{,}001$?

Решение: используем ту же формулу $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = \gamma$.

В нашем распоряжении находятся следующие величины:
$p = 0{,}3; \quad q = 1 - p = 0{,}7; \quad \varepsilon = 0{,}001; \quad \gamma = 0{,}99$

По условию, требуется найти такое количество билетов n, чтобы с вероятностью не меньшейчем $\gamma = 0{,}99$ разница $\left|\frac{m}{n} - p\right|$ составила не более чем $\varepsilon = 0{,}001$. Ну, а коль скоро с вероятностью «не меньшей», то задачу следует разрулить через нестрогое неравенство:

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) \geq \gamma$$

Подставляем известные значения:

$$2\Phi\left(\frac{0{,}001 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7}}\right) \geq 0{,}99$$

Делим обе части на два:

$$\Phi\left(\frac{0{,}001 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7}}\right) \geq 0{,}495$$

По *таблице значений функции* $\Phi(x)$ либо с помощью **расчётного макета** *(пункт 5*)* по известному значению функции $\Phi(x) = 0{,}495$ находим соответствующий аргумент: $x \approx 2{,}58$. Таким образом:

$$\frac{0{,}001 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0{,}21}} \geq 2{,}58$$

Возведём обе части в квадрат:

$$\left(\frac{0{,}001 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0{,}21}}\right)^2 \geq (2{,}58)^2$$

$$\frac{0{,}000001 \cdot n}{0{,}21} \geq 6{,}6564$$

И финальный штрих:

$$n \geq \frac{6{,}6564 \cdot 0{,}21}{0{,}000001}$$

$$n \geq 1397844$$

Ответ: для того, чтобы с вероятностью не меньшей чем $\gamma = 0{,}99$, можно было ожидать, что $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq 0{,}001$, в розыгрыше должно участвовать **не менее 1397844 билетов**.

Но это ещё нужно столько продать =) Или же аппетит $\gamma = 0{,}99$ придётся поубавить. Или пожертвовать точностью, то есть увеличить ε.

Представим ответ в абсолютных значениях:

$$p-\varepsilon \le \frac{m}{n} \le p+\varepsilon$$

$$0{,}299 \le \frac{m}{1397844} \le 0{,}301$$

$$0{,}299 \cdot 1397844 \le m \le 0{,}301 \cdot 1397844$$

То есть, в 99% аналогичных розыгрышей количество выигравших билетов будет заключено в пределах от $m_1 = 417955$ до $m_2 = 420751$.

Кстати, выполним проверку, решив прямую задачу:

$$\gamma = P\left(\left|\frac{m}{1397844} - 0{,}3\right| \le 0{,}001\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0{,}001 \cdot \sqrt{1397844}}{\sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7}}\right) \approx 2\Phi(2{,}58) \approx 2 \cdot 0{,}4951 \approx 0{,}99$$

, что и требовалось проверить.

Заключительная миниатюра для самостоятельного решения:

Задача 5

Проводится некоторый опыт, в котором случайное событие A может появиться с вероятностью 0,4. Определить, сколько опытов нужно провести, чтобы с вероятностью большей, чем 0,9 можно было ожидать отклонения относительной частоты появления события A от $p = 0{,}4$ не более чем на 0,05

Не ленимся ;-) Ответ в таких задачах следует округлять до бОльшего натурального значения! Краткое решение и ответ внизу страницы.

Первый цикл уроков по **теории вероятностей** подошёл к концу и даже начал плавно переходить в **математическую статистику** =) Я уже хотел поставить традиционное пожелание «Везения в главном», но вдруг задумался…. Имеет ли в нашей жизни значение случайность? Безусловно! Нет, я не преуменьшаю значение системной и упорной работы, после которой следуют *закономерные* результаты. Однако и везение играет немаловажную роль: встретить хороших друзей, встретить «своего» человека, найти деятельность по душе и т.д. – всё это нередко происходит благодаря случаю….

Жду вас снова и до скорых встреч!

Решения и ответы:

Задача 2: ***Решение****: используем формулу* $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$.

В данной задаче: $n = 800; \quad p = 0{,}6; \quad q = 1-p = 1-0{,}6 = 0{,}4$

а) Если $\varepsilon = 0{,}05$*, то:*

$$P\left(\left|\frac{m}{800} - 0{,}6\right| \le 0{,}05\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0{,}05 \cdot \sqrt{800}}{\sqrt{0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) \approx 2\Phi(2{,}89) \approx 2 \cdot 0{,}4981 = 0{,}9961$$

– вероятность, того, что при 800 испытаниях относительная частота появления события A *отклонится от вероятности данного события не более чем на 0,05.*

Это событие является практически достоверным.

б) Если $\varepsilon = 0{,}03$*, то:*

$$P\left(\left|\frac{m}{800} - 0{,}6\right| \le 0{,}03\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0{,}03 \cdot \sqrt{800}}{\sqrt{0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) \approx 2\Phi(1{,}73) \approx 2 \cdot 0{,}4582 = 0{,}9164$$

– вероятность, того, что при 800 испытаниях относительная частота появления события A *отклонится от вероятности данного события не более чем на 0,03.*

***Ответ**:* а) $\approx 0{,}9961$; б) $\approx 0{,}9164$

Задача 3: ***Решение***: *используем формулу* $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$.

В данной задаче: $n = 600000; \quad p = 0{,}3; \quad q = 1 - p = 0{,}7; \quad \varepsilon = 0{,}001$

Таким образом:

$$P\left(\left|\frac{m}{600000} - 0{,}3\right| \le 0{,}001\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0{,}001 \cdot \sqrt{600000}}{\sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7}}\right) \approx 2\Phi(1{,}69) \approx 2 \cdot 0{,}4545 = 0{,}909$$

– вероятность, того, что относительная частота выигрыша отклонится от теоретической вероятности не более чем на 0,001.

***Ответ**:* $\approx 0{,}909$

Задача 5: ***Решение***: *используем формулу* $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = \gamma$.

В данном случае: $p = 0{,}4; \quad q = 1 - p = 0{,}6; \quad \varepsilon = 0{,}05; \quad \gamma = 0{,}9$

Таким образом:

$$2\Phi\left(\frac{0{,}05 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6}}\right) > 0{,}9$$

$$\Phi\left(\frac{0{,}05 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0{,}24}}\right) > 0{,}45$$

$$\frac{0{,}05\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}24}} > 1{,}64$$

$$\left(\frac{0{,}05\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}24}}\right)^2 > (1{,}64)^2$$

$$\frac{0{,}0025n}{0{,}24} > 2{,}6896$$

$$n > 2{,}6896 \cdot \frac{0{,}24}{0{,}0025}$$

$$n > 258{,}2$$

***Ответ**: необходимо произвести не менее 259 опытов.*

Теоремы сложения и умножения вероятностей. Зависимые и независимые события

Заголовок выглядит страшновато, но в действительности всё очень просто. На данном уроке мы познакомимся с теоремами сложения и умножения вероятностей событий, а также разберём типовые задачи, которые наряду с **задачей на классическое определение вероятности** обязательно встретятся или, что вероятнее, уже встретились на вашем пути. Для эффективного изучения материалов этой статьи необходимо знать и понимать базовые термины **теории вероятностей** и уметь выполнять простейшие арифметические действия. Как видите, требуется совсем немного, и поэтому жирный плюс в активе практически гарантирован. Но с другой стороны, вновь предостерегаю от поверхностного отношения к практическим примерам – тонкостей тоже хватает. В добрый путь:

Теорема сложения вероятностей несовместных событий: вероятность появления одного из двух **несовместных** событий A или B *(без разницы какого)*, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Аналогичный факт справедлив и для бОльшего количества несовместных событий, например, для трёх несовместных событий A, B и C:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

Теорема-мечта =) Однако, и такая мечта подлежит доказательству, которое можно найти, например, в учебном пособии В.Е. Гмурмана.

Давайте сразу вспомним **алгебру событий**: сложение событий означает появление **хотя бы одного** из суммируемых событий, и, поскольку события в данном случае НЕсовместны, то**одного и только одного** из этих событий (безразлично какого).

Следует отметить, что для совместных событий равенство $P(A+B)=P(A)+P(B)$ будет**неверным**, не случайно чуть выше я немного сыронизировал на счёт простоты. Теорема сложения вероятностей совместных событий имеет гораздо меньшее значение практики *(и более того, может запутать «чайника»)*, поэтому о ней чуть позже.

А сейчас возьмём в руки уже знакомое и безотказное орудие ~~труда~~ учёбы – игральный кубик с**полной группой событий** $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, которые состоят в том, что при его броске выпадут 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков соответственно.

Рассмотрим событие $B_{5,6}$ – в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков. Данное событие состоит в двух несовместных исходах: $B_{5,6}=B_5+B_6$ *(выпадет 5 **или** 6 очков)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(B_5+B_6)=P(B_5)+P(B_6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков.

Рассмотрим событие $B_{1-4} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$, состоящее в том, что выпадет не более 4-х очков и найдем его вероятность. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

По той же теореме, вероятность того, что выпадет нечётное число очков:

$P(B_1 + B_3 + B_5) = P(B_1) + P(B_3) + P(B_5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ и так далее.

С помощью рассматриваемой теоремы можно решить некоторые задачи, которые нам встретились на практикуме по **классическому определению вероятности**. Не поленюсь, кратко перескажу решение 13-го примера вышеуказанного урока:

«Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60-ти. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3-х вопросов?»

В той задаче мы сначала нашли C_{60}^3 *(количество всех возможных* ***сочетаний*** *трёх вопросов)*, затем вычислили $C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3$ количество благоприятствующих исходов и вероятность $p = \frac{C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3}{C_{60}^3}$ того, что студент сдаст экзамен.

Но здесь вместо **правила сложений комбинаций** в ходу и другая схема рассуждений. Рассмотрим два несовместных события:

A – студент ответит на 2 вопроса из 3-х;
B – студент ответит на все три вопроса.

Возможно, некоторые читатели ещё не до конца осознали **суть** несовместности. Вдумаемся ещё раз: студент не может ответить на 2 вопроса из 3-х **и в то же самое время** ответить на все 3 вопроса. Таким образом, события A и B – несовместны.

Теперь, пользуясь **классическим определением**, найдём их вероятности:

$$P(A) = \frac{C_{25}^2 \cdot C_{35}^1}{C_{60}^3}, \quad P(B) = \frac{C_{25}^3}{C_{60}^3}$$

Факт успешной сдачи экзамена выражается суммой $A + B$ *(ответ на 2 вопроса из 3-х* ***или*** *на все вопросы)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{C_{25}^2 \cdot C_{35}^1}{C_{60}^3} + \frac{C_{25}^3}{C_{60}^3}$ – вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Этот способ решения совершенно равноценен, выбирайте, какой больше нравится.

Разминаемся в подсобке:

Задача 1

Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.

Решение: всего получено магазином: 4 + 5 + 7 + 4 = 20 ящиков.

В данной задаче удобнее воспользоваться «быстрым» способом оформления без расписывания событий большими латинскими буквами. По классическому определению:

$p_1 = \frac{4}{20} = 0{,}2$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 1-го склада;

$p_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 3-го склада.

Бесконечных «хвостов» после запятой тут нет и не ожидается, поэтому можно работать с десятичными дробями – компактнее будет запись.

По теореме сложения несовместных событий:

$p = p_1 + p_3 = 0{,}2 + 0{,}35 = 0{,}55$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с первого или третьего склада.

Ответ: 0,55

Безусловно, задача разрешима и чисто через **классическое определение вероятности**путём непосредственного подсчёта кол-ва благоприятствующих исходов (4 + 7 = 11), но рассмотренный способ ничем не хуже. И даже чётче.

Ещё один товар на соседнем стеллаже:

Задача 2

В коробке 10 красных и 6 синих пуговиц. Наудачу извлекаются две пуговицы. Какова вероятность того, что они будут одноцветными?

Аналогично – здесь можно использовать **комбинаторное правило суммы**, но мало ли … вдруг кто-то его запамятовал, а то и вовсе проехал мимо с песнями. Тогда на помощь придёт теорема сложения вероятностей несовместных событий! Решение и ответ в конце статьи (оформлено в «ускоренном» стиле)

Внимание! Если у вас возникло **хоть какое-то** недопонимание по вышеизложенному материалу, то настоятельно рекомендую обратиться к предыдущим урокам курса. Ибо не знать азов **комбинаторики** и не уметь решать **типовые задачи на К.О.В.** – совсем скверно(В тяжёлом случае следует начать с **основ теории вероятностей**.

Знакомимся с новыми, до сих пор не встречавшимися понятиями:

Зависимые и независимые события

Начнём с независимых событий. События являются ***независимыми***, если вероятность наступления **любого из них** не зависит от появления/непоявления остальных событий рассматриваемого множества (во всех возможных комбинациях). …Да чего тут вымучивать общие фразы:

Теорема умножения вероятностей независимых событий: вероятность совместного появления независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:
$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Вернёмся к простейшему примеру 1-го урока, в котором подбрасываются две монеты и следующим событиям:

A_1 – на 1-й монете выпадет орёл;

A_2 – на 2-й монете выпадет орёл.

Найдём вероятность события A_1A_2 (на 1-й монете появится орёл **и** на 2-й монете появится орёл – *вспоминаем, как читается* ***произведение событий****!*). Вероятность выпадения орла на одной монете никак не зависит от результата броска другой монеты, следовательно, события A_1 и A_2 независимы. По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$$P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Аналогично:
$P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й решка;
$P(A_1\overline{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете появится орёл **и** на 2-ой решка;
$P(\overline{A}_1A_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете появится решка **и** на 2-ой орёл.

Заметьте, что события $A_1A_2,\ \overline{A}_1\overline{A}_2,\ A_1\overline{A}_2,\ \overline{A}_1A_2$ образуют **полную группу** и сумма их вероятностей равна единице: $P(A_1A_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2) + P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Теорема умножения очевидным образом распространяется и на бОльшее количество независимых событий, так, например, если события A, B, C независимы, то вероятность их совместного наступления равна: $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$. Потренируемся на конкретных примерах:

Задача 3

В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

Решение: вероятность извлечения стандартной или нестандартной детали из любого ящика не зависит от того, какие детали будут извлечены из других ящиков, поэтому в задаче речь идёт о независимых событиях. Рассмотрим следующие независимые события:

S_1 – из 1-го ящика извлечена стандартная деталь;

S_2 – из 2-го ящика извлечена стандартная деталь;

S_3 – из 3-го ящика извлечена стандартная деталь.

По классическому определению:
$P(S_1)=\frac{8}{10}=0{,}8;\quad P(S_2)=\frac{7}{10}=0{,}7;\quad P(S_3)=\frac{9}{10}=0{,}9$ – соответствующие вероятности.

Интересующее нас событие *(из 1-го ящика будет извлечена стандартная деталь* ***и*** *из 2-го стандартная* ***и*** *из 3-го стандартная)* выражается произведением $S_1S_2S_3$.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P(S_1S_2S_3)=P(S_1)\cdot P(S_2)\cdot P(S_3)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}504$ – вероятность того, что из 3-х ящиков будет извлечено по одной стандартной детали.

Ответ: 0,504

После бодрящих упражнений с ящиками нас поджидают не менее интересные урны:

Задача 4

В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: а) все три шара будут белыми; б) все три шара будут одного цвета.

Опираясь на полученную информацию, догадайтесь, как разобраться с пунктом «бэ» ;-) Примерный образец решения оформлен в академичном стиле с подробной росписью всех событий.

Зависимые события. Событие X называют ***зависимым***, если его вероятность $P(X)$ зависит от одного или бОльшего количества событий, которые уже произошли. За примерами далеко ходить не надо – достаточно до ближайшего магазина:

X – завтра в 19.00 в продаже будет свежий хлеб.

Вероятность этого события зависит от множества других событий: завезут ли завтра свежий хлеб, раскупят ли его до 7 вечера или нет и т.д. В зависимости от различных обстоятельств данное событие может быть как достоверным $P(X)=1$, так и невозможным $P(X)=0$. Таким образом, событие X является **зависимым**.

Хлеба… и, как требовали римляне, зрелищ:

B – на экзамене студенту достанется простой билет.

Если идти не самым первым, то событие B будет зависимым, поскольку его вероятность $P(B)$ будет зависеть от того, какие билеты уже вытянули однокурсники.

Как определить зависимость/независимость событий?

Иногда об этом прямо сказано в условии задачи, но чаще всего приходится проводить самостоятельный анализ. Какого-то однозначного ориентира тут нет, и факт зависимости либо независимости событий вытекает из естественных логических рассуждений.

Чтобы не валить всё в одну кучу, **задачам на зависимые события** я выделю следующий урок, а пока мы рассмотрим наиболее распространённую на практике связку теорем:

Задачи на теоремы сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий

Этот тандем, по моей субъективной оценке, работает примерно в 80% задач по рассматриваемой теме. Хит хитов и самая настоящая классика теории вероятностей:

Задача 5

Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что:

а) только один стрелок попадёт в мишень;
б) хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

Решение: вероятность попадания/промаха одного стрелка, очевидно, не зависит от результативности другого стрелка.

Рассмотрим события:
A_1 – 1-й стрелок попадёт в мишень;
A_2 – 2-й стрелок попадёт в мишень.

По условию: $P(A_1) = 0{,}8; \quad P(A_2) = 0{,}6$.

Найдём вероятности противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ – того, что соответствующие стрелки промахнутся:
$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$
$P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$

а) Рассмотрим событие: B – только один стрелок попадёт в мишень. Данное событие состоит в двух несовместных исходах:

1-й стрелок попадёт **и** 2-й промахнётся
или
1-й промахнётся **и** 2-й попадёт.

На языке **алгебры событий** этот факт запишется следующей формулой:
$B = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$

Сначала используем теорему сложения вероятностей несовместных событий, затем – теорему умножения вероятностей независимых событий:
$P(B) = P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 A_2) = P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2) =$
$= 0{,}8\cdot 0{,}4 + 0{,}2\cdot 0{,}6 = 0{,}32 + 0{,}12 = 0{,}44$ – вероятность того, что будет только одно попадание.

б) Рассмотрим событие: C – хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

Прежде всего, ВДУМАЕМСЯ – что значит условие «ХОТЯ БЫ ОДИН»? В данном случае это означает, что попадёт или 1-й стрелок (2-й промахнётся) **или** 2-й (1-й промахнётся) **или** оба стрелка сразу – итого 3 несовместных исхода.

Способ первый: учитывая готовую вероятность предыдущего пункта, событие C удобно представить в виде суммы следующих несовместных событий:

попадёт кто-то один *(событие B, состоящее в свою очередь из 2-х несовместных исходов)* **или**
попадут оба стрелка – обозначим данное событие буквой D.

Таким образом: $C = B + D$

По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$P(D) = P(A_1 A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2) = 0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}48$ – вероятность того, что 1-й стрелок попадёт **и** 2-ой стрелок попадёт.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:
$P(C) = P(B + D) = P(B) + P(C) = 0{,}44 + 0{,}48 = 0{,}92$ – вероятность хотя бы одного попадания по мишени.

Способ второй: рассмотрим противоположное событие: $\overline{C}$ – оба стрелка промахнутся.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2) = 0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}08$

В результате: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$

Особое внимание обратите на второй способ – в общем случае он более рационален.

Кроме того, существует альтернативный, третий путь решения, основанный на умолчанной выше теореме сложения совместных событий.

! Если вы знакомитесь с материалом впервые, то во избежание путаницы, следующий абзац лучше пропустить.

Способ третий: *события A_1, A_2 совместны, а значит, их сумма $A_1 + A_2$ выражает событие «хотя бы один стрелок попадёт в мишень» (см. **алгебру событий**). По**теореме сложения вероятностей***

совместных событий *и теореме умножения вероятностей независимых событий:*
$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)=$
$=0{,}8+0{,}6-0{,}8\cdot 0{,}6=1{,}4-0{,}48=0{,}92$

Выполним проверку: события $\overline{C}, B$ и D *(0, 1 и 2 попадания соответственно)* образуют полную группу, поэтому сумма их вероятностей должна равняться единице:
$P(\overline{C})+P(B)+P(D)=0{,}08+0{,}44+0{,}48=1$, что и требовалось проверить.

Ответ: а) 0,44, б) 0,92

При основательном изучении теории вероятностей вам встретятся десятки задач милитаристского содержания, и, что характерно, после этого никого не захочется пристрелить – задачи почти подарочные. А почему бы не упростить ещё и шаблон? Сократим запись:

Решение: по условию: $p_1=0{,}8$, $p_2=0{,}6$ – вероятность попадания соответствующих стрелков. Тогда вероятности их промаха:
$q_1=1-p_1=1-0{,}8=0{,}2;$
$q_2=1-p_2=1-0{,}6=0{,}4.$

а) По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:
$p_{(1)}=p_1q_2+q_1p_2=0{,}8\cdot 0{,}4+0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}32+0{,}12=0{,}44$ – вероятность того, что только один стрелок попадёт в мишень.

б) По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$q=q_1q_2=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08$ – вероятность того, что оба стрелка промахнутся.

Тогда: $p=1-q=1-0{,}08=0{,}92$ – вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

Ответ: а) 0,44, б) 0,92

Всё!

На практике можно пользоваться любым вариантом оформления. Конечно же, намного чаще идут коротким путём, но не нужно забывать и 1-й способ – он хоть и длиннее, но зато содержательнее – в нём понятнее, *что, почему и зачем* складывается и умножается. В ряде случаев уместен гибридный стиль, когда прописными буквами удобно обозначить лишь некоторые события.

Похожие задачи для самостоятельного решения:

Задача 6

Для сигнализации о возгорании установлены два независимо работающих датчика. Вероятности того, что при возгорании датчик сработает, для первого и второго датчиков соответственно равны 0,5 и 0,7. Найти вероятность того, что при пожаре:

а) оба датчика откажут;
б) оба датчика сработают.

в) Пользуясь **теоремой сложения вероятностей событий, образующих полную группу**, найти вероятность того, что при пожаре сработает только один датчик. Проверить результат прямым вычислением этой вероятности *(с помощью теорем сложения и умножения)*.

Здесь независимость работы устройств непосредственно прописана в условии, что, кстати, является важным уточнением. Образец решения оформлен в академичном стиле.

Как быть, если в похожей задаче даны одинаковые вероятности, например, 0,9 и 0,9? Решать нужно точно так же! *(что, собственно, уже продемонстрировано в примере с 2-мя монетами)*

Задача 7

Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8. Вероятность того, что цель не поражена после выполнения первым и вторым стрелками по одному выстрелу равна 0,08. Какова вероятность поражения цели вторым стрелком при одном выстреле?

А это небольшая головоломка, которая оформлена коротким способом. Условие можно переформулировать более лаконично, но переделывать оригинал не буду – на практике приходится вникать и в более витиеватые измышления.

Знакомьтесь – он самый, который настрогал для вас немереное количество деталей =):

Задача 8

Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует настройки, равна 0,3, второй – 0,75, третий – 0,4. Найти вероятность того, что в течение смены:

а) все станки потребуют настройки;
б) только один станок потребует настройки;
в) хотя бы один станок потребует настройки.

Решение: коль скоро в условии ничего не сказано о едином технологическом процессе, то работу каждого станка следует считать не зависимой от работы других станков.

По аналогии с Задачей №5, здесь можно ввести в рассмотрение события A_1, A_2, A_3, состоящие в том, что соответствующие станки потребуют настройки в течение смены, записать вероятности $P(A_1) = 0{,}3; \quad P(A_2) = 0{,}75; \quad P(A_3) = 0{,}4$, найти вероятности противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ и т.д. Но с тремя объектами так оформлять задачу уже не очень хочется – получится долго и нудно. Поэтому здесь заметно выгоднее использовать «быстрый» стиль:

По условию: $p_1 = 0{,}3; p_2 = 0{,}75; p_3 = 0{,}4$ – вероятности того, что в течение смены соответствующие станки потребуют настойки. Тогда вероятности того, что они

не потребуют внимания:
$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7;$
$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25;$
$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$

...Один из читателей обнаружил тут прикольную опечатку, даже исправлять не буду =)

а) По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$p_{(3)} = p_1 p_2 p_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}4 = 0{,}09$ – вероятность того, что в течение смены все три станка потребуют настройки.

б) Событие «В течение смены только один станок потребует настройки» состоит в трёх несовместных исходах:

1) 1-й станок <u>потребует</u> внимания **и** 2-й станок *не потребует* **и** 3-й станок *не потребует*
или:
2) 1-й станок *не потребует* внимания **и** 2-й станок <u>потребует</u> **и** 3-й станок *не потребует*
или:
3) 1-й станок *не потребует* внимания **и** 2-й станок *не потребует* **и** 3-й станок <u>потребует</u>.

По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:
$p_{(1)} = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}4 =$
$= 0{,}045 + 0{,}315 + 0{,}07 = 0{,}43$ – вероятность того, что в течение смены только один станок потребует настройки.

Думаю, сейчас вам должно быть понятно, откуда взялось выражение $p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3$

в) Вычислим вероятность $p_{(0)} = q_1 q_2 q_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}105$ того, что станки не потребуют настройки, и затем – вероятность противоположного события:
$p_{(1,2,3)} = 1 - p_{(0)} = 1 - 0{,}105 = 0{,}895$ – того, что хотя бы один станок потребует настройки.

Ответ: а) 0,09; б) 0,43; в) 0,895

Пункт «вэ» можно решить и через сумму $p_{(1,2,3)} = p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)}$, где $p_{(2)}$ – вероятность того, что в течение смены только два станка потребуют настройки. Это событие в свою очередь включает в себя 3 несовместных исхода, которые расписываются по аналогии с пунктом «бэ». Постарайтесь самостоятельно найти вероятность $p_{(2)}$, чтобы проверить всю задачу с помощью равенства $p_{(0)} + p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)} = 1$.

Далее… …правильно догадываетесь – любимая тема =):

<u>Задача 9</u>

Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания при одном выстреле только из первого орудия равна 0,7, из второго – 0,6, из третьего – 0,8. Найти вероятность того, что: 1) хотя бы один снаряд попадет в цель; 2) только два снаряда попадут в цель; 3) цель будет поражена не менее двух раз.

Решение и ответ в конце урока.

И снова о совпадениях: в том случае, если по условию два или даже все значения исходных вероятностей совпадают (например, 0,7; 0,7 и 0,7), то следует придерживаться точно такого же алгоритма решения.

В заключение статьи разберём ещё одну распространённую головоломку:

Задача 10

Стрелок попадает в цель с одной и той же вероятностью при каждом выстреле. Какова эта вероятность, если вероятность хотя бы одного попадания при трех выстрелах равна 0,973.

Решение: обозначим через p – вероятность попадания в мишень при каждом выстреле.
и через $q = 1 - p$ – вероятность промаха при каждом выстреле.

И таки распишем события:
A – при 3-х выстрелах стрелок попадёт в мишень хотя бы один раз;
$\overline{A}$ – стрелок 3 раза промахнётся.

По условию $P(A) = 0{,}973$, тогда вероятность противоположного события:
$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}973 = 0{,}027$

С другой стороны, по теореме умножения вероятностей независимых событий:
$P(\overline{A}) = qqq = q^3$

Таким образом:
$q^3 = 0{,}027$
$q = \sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$ – вероятность промаха при каждом выстреле.

В результате:
$p = 1 - q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ – вероятность попадания при каждом выстреле.

Ответ: 0,7

Просто и изящно.

В рассмотренной задаче можно поставить дополнительные вопросы о вероятности только одного попадания, только двух попаданий и вероятности трёх попаданий по мишени. Схема решения будет точно такой же, как и в двух предыдущих примерах:

$p_{(1)} = pqq + qpq + qqp;$

$p_{(2)} = ppq + pqp + qpp$

$p_{(3)} = ppp$

Однако принципиальное содержательное отличие состоит в том, что здесь имеют место**повторные независимые испытания**, которые выполняются последовательно, независимо друг от друга и с одинаковой вероятностью исходов.

Несмотря на кажущуюся шаблонность примеров, целесообразно ознакомиться с**дополнительными задачами на теоремы сложения и умножения вероятностей**, которые на самом деле достаточно разнообразны. Кроме того, в предложенном файле прорешаны более трудные задачи с «четырьмя участниками».

На следующем уроке мы разберём **задачи с зависимыми событиями**, а затем важнейшие следствия рассмотренных теорем – **формулу полной вероятности**, **формулы Байеса** и**формулу Бернулли**, касающуюся независимых испытаний.

Задача 2: ***Решение**: всего: 10 + 6 = 16 пуговиц в коробке.*

$C_{16}^2 = \frac{16!}{14! \cdot 2!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$ *способами можно извлечь 2 пуговицы из коробки;*

$C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ *способами можно извлечь 2 красные пуговицы;*

$C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ *способами можно извлечь 2 синие пуговицы.*

По классическому определению:

$p_K = \frac{C_{10}^2}{C_{16}^2} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}$ *– вероятность того, что из коробки будут извлечены две красные пуговицы;*

$p_C = \frac{C_6^2}{C_{16}^2} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$ *– вероятность того, что из коробки будут извлечены две синие пуговицы.*

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$p = p_K + p_C = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ *– вероятность того, что из коробки будут извлечены две одноцветные пуговицы.*

***Ответ**: 0,5*

Задача 4: ***Решение**: рассмотрим события:* A_1, A_2, A_3 *– из 1-й, 2-й и 3-й урны соответственно будет извлечён белый шар. По классическому определению вероятности:*

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

Тогда вероятности извлечения чёрного шара из соответствующих урн равны:

$$P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

а) Рассмотрим событие: B *– из каждой урны будет извлечено по 1-му белому шару.*

Данное событие выражается в виде произведения $B = A_1A_2A_3$ *(из 1-й урны будет извлечён БШ **и** из 2-ой урны будет извлечён БШ **и** из 3-й урны будет извлечён БШ).*

По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$P(B) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6 = 0{,}216$

б) Рассмотрим событие C – из каждой урны будет извлечено по 1-му чёрному шару.
По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$P(C) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) = 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4 = 0{,}064$

*Рассмотрим событие D – все три шара будут одного цвета. Данное событие состоит в двух несовместных исходах: $D = B + C$ (будут извлечены 3 белых **или** 3 чёрных шара)*
По теореме сложения вероятностей несовместных событий:
$P(D) = P(B + C) = P(B) + P(C) = 0{,}216 + 0{,}064 = 0{,}28$

Ответ: а) $0{,}216$; б) $0{,}28$

*Задача 6: **Решение**: рассмотрим следующие события:*

A_1 – при возгорании сработает 1-й датчик;

A_2 – при возгорании сработает 2-й датчик.

По условию: $P(A_1) = 0{,}5;\quad P(A_2) = 0{,}7$
Вычислим вероятности противоположных событий:

$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5;$

$P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$

а) Рассмотрим событие: B – при пожаре оба датчика откажут.
По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$P(B) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2) = 0{,}5\cdot 0{,}3 = 0{,}15$

б) Рассмотрим событие: C – при пожаре оба датчика сработают.
По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$P(C) = P(A_1A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2) = 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}35$

в) Рассмотрим событие: D – при пожаре сработает только один датчик.
События B, C, D образуют полную группу, следовательно:
$P(B) + P(C) + P(D) = 1 \quad\Rightarrow\quad P(D) = 1 - P(B) - P(C) = 1 - 0{,}15 - 0{,}35 = 0{,}5$
*Проверим результат с помощью прямого вычисления. Событие D состоит в 2-х несовместных исходах: 1-й датчик сработает **и** 2-й откажет **или** 1-ый откажет **и**2-й сработает. Таким образом: $D = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2$.*
По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:
$P(D) = P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) = P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2) =$
$= 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}15 + 0{,}35 = 0{,}5$

Ответ: а) $0{,}15$; б) $0{,}35$; в) $0{,}5$

*Задача 7: **Решение**: по условию: $p_1 = 0{,}8$ – вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле. Тогда вероятность его промаха:*
$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

Обозначим через p_2, q_2 – вероятности попадания и промаха 2-го стрелка.
По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$q = q_1 q_2$ *– вероятность того, что оба стрелка промахнутся.*

По условию $q = 0{,}08$*, таким образом:*

$$0{,}08 = 0{,}2 q_2 \Rightarrow q_2 = \frac{0{,}08}{0{,}2} = 0{,}4$$

В результате: $p_2 = 1 - q_2 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
Ответ*: 0,6*

Задача 9: **Решение***: по условию* $p_1 = 0{,}7;\ p_2 = 0{,}6;\ p_3 = 0{,}8$ *– вероятности попадания в цель из соответствующих орудий. Тогда соответствующие вероятности промаха:*

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4;$

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$

1) По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$p_{(0)} = q_1 q_2 q_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}024$ *– вероятность того, что будет три промаха.*

Тогда: $p_{(1,2,3)} = 1 - p_{(0)} = 1 - 0{,}024 = 0{,}976$ *– вероятность того, что хотя бы один снаряд попадет в цель.*

2) Событие «только два снаряда попадут в цель» состоит в трёх несовместных исходах:
попадание из 1-го ***и*** *2-го орудий* ***и*** *промах из 3-го* ***или***
попадание из 1-го ***и*** *промах из 2-го* ***и*** *попадание из 3-го орудия* ***или***
промах из 1-го ***и*** *попадание из 2-го* ***и*** *3-го орудий.*
По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

$$p_{(2)} = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 =$$

$= 0{,}084 + 0{,}224 + 0{,}144 = 0{,}452$ *– вероятность того, что только два снаряда попадут в цель.*

3) По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$p_{(3)} = p_1 p_2 p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}336$ *– вероятность того, что все три снаряда попадут в цель.*
По теореме сложения вероятностей несовместных событий:
$p_{(2,3)} = p_{(2)} + p_{(3)} = 0{,}452 + 0{,}336 = 0{,}788$ *– вероятность того, что цель будет поражена не менее двух раз*

Ответ*:* $1)\ 0{,}976; \quad 2)\ 0{,}452; \quad 3)\ 0{,}788$