Теория вероятностей. Базовые термины и понятия

Мама мыла раму

Под занавес продолжительных летних каникул пришло время потихоньку возвращаться к высшей математике и торжественно открыть пустой вёрдовский файл, чтобы приступить к созданию нового раздела – **Теория вероятностей и математическая статистика**. Признаюсь, нелегко даются первые строчки, но первый шаг – это пол пути, поэтому я предлагаю всем внимательно проштудировать вводную статью, после чего осваивать тему будет в 2 раза проще! Ничуть не преувеличиваю. …Накануне очередного 1-го сентября вспоминается первый класс и букварь…. Буквы складываются в слоги, слоги в слова, слова в короткие предложения – Мама мыла раму. Совладать с тервером и математической статистикой так же просто, как научиться читать! Однако для этого необходимо знать ключевые термины, понятия и обозначения, а также некоторые специфические правила, которым и посвящён данный урок.

Но сначала примите мои поздравления с началом (продолжением, завершением, нужное отметить) учебного года и примите подарок. Лучший подарок – это книга, и для самостоятельной работы я рекомендую следующую литературу:

1) *Гмурман В.Е.* ***Теория вероятностей и математическая статистика***

Легендарное учебное пособие, выдержавшее более десяти переизданий. Отличается доходчивостью и предельной простой изложения материала, а первые главы так и вовсе доступны, думаю, уже для учащихся 6-7-х классов.

2) *Гмурман В.Е.* ***Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике***

Решебник того же Владимира Ефимовича с подробно разобранными примерами и задачами.

ОБЯЗАТЕЛЬНО закачайте обе книги из Интернета или раздобудьте их бумажные оригиналы! Подойдёт и версия 60-70-х годов, что даже лучше для чайников. Хотя фраза «теория вероятностей для чайников» звучит довольно нелепо, поскольку почти всё ограничивается элементарными арифметическими действиями. Проскакивают, правда, местами**производные** и **интегралы**, но это только местами.

Я постараюсь достичь той же ясности изложения, но должен предупредить, что мой курс ориентирован на **решение задач** и теоретические выкладки сведены к минимуму. Таким образом, если вам нужна развёрнутая теория, доказательства теорем (теорем-теорем!), пожалуйста, обратитесь к учебнику. Ну, а кто хочет **научиться решать задачи** по теории вероятностей и математической статистике **в самые короткие сроки**, следуйте за мной!

Рекомендуемый порядок изучения темы:

Эта статья;
Задачи по комбинаторике. Примеры решений;
Задачи на классическое определение вероятности;

Геометрическое определение вероятности;
Теоремы сложения и умножения вероятностей;
Зависимые события;
Формула полной вероятности и формулы Байеса;
Независимые испытания и формула Бернулли;
Локальная и интегральная теоремы Лапласа;
Статистическое определение вероятности.

Для начала хватит =)

По мере прочтения статей целесообразно знакомиться (хотя бы бегло) с дополнительными задачами рассмотренных видов. На странице **Готовые решения по высшей математике**будут размещаться соответствующие pdf-ки с примерами решений. Также значительную помощь окажут **ИДЗ 18.1 Рябушко** (попроще) и **прорешанные ИДЗ по сборнику Чудесенко** (посложнее).

Кроме того, на складе **математических формул и таблиц** полезно открыть/закачать/распечатать вспомогательные справочные файлы – *Основные формулы комбинаторики* и*Основные формулы теории вероятностей*..

Итак, дорожные указатели расставлены, и мы начинаем путь с **теории вероятностей**, которую неоднократно просили осветить посетители сайта.

Первое и очень важное. Что изучает эта наука? Многим в голову наверняка пришли мысли вроде «вероятность дождя велика», «вероятность выигрыша в лотерею мала», «орёл и решка выпадают с вероятностью 50 на 50» и т.п. Но тогда сразу возникает вопрос, при чём здесь наука? Пожалуйста, прямо сейчас возьмите в руки монету и скажите, какой гранью она выпадет после броска? …Совсем не похоже на теорию – скорее какое-то гадание.…

И действительно, обывательское понимание вероятности больше смахивает на некое предсказание, часто с изрядной долей мистицизма и суеверий. **Теория же** вероятностей изучает *вероятностные закономерности* массовых однородных *случайных событий*. То есть, у неё нет цели что-либо угадать, например, результат броска той же монеты в единичном эксперименте. Однако если одну и ту же монету в одинаковых условиях подбрасывать сотни и тысячи раз, то будет прослеживаться чёткая закономерность, описываемая вполне жёсткими законами.

Другой пример. Вокруг каждого из нас летают молекулы воздуха. Некоторые из них обладают высокой, некоторые средней, а некоторые – низкой скоростью. Не имеет смысла угадывать скорость отдельно взятых молекул; но их массовый учёт находит самое широкое применение в теоретических и прикладных физических исследованиях. Обратите внимание, что самолёты «умеют» летать, газовые и паровые котлы обычно не взрываются, а чайники при кипении не скачут по кухне. За многими и многими, казалось бы, обыденными фактами и событиями кроются серьёзные вероятностно-статистические расчёты.

Или пример попроще. Если вы приобретёте лотерейный билет, то вряд ли что-то выиграете и совсем невероятно, что сорвёте крупный куш. Но организатор лотереи даже при случайном розыгрыше тиража *(извлечение пронумерованных шариков и т.п. либо если участники сами угадывают номера)* **гарантированно и с высокой точностью знает**, сколько билетов выиграют/проиграют, и, понятно, остаётся в прибыли. Лотереи часто называют обманом, однако парадокс состоит в том, что **эта гарантия строго обоснована теорией**; рАвно, как и житейская фраза «всё равно ничего не выиграю». Думаю, теперь все поняли правильный способ заработка на лотереях =) Впрочем, мы ещё вернёмся к «секретам» выигрыша в рулетку и различные лотереи.

Да, кстати подумайте ещё над одной насущной задачей: многие из нас за жизнь сдают десятки экзаменов, и практически всегда имеет место следующая ситуация: часть вопросов студент знает (либо заготовлены шпоры), а часть вопросов – не знает (либо плавает как мастер спорта). Наступает день «Х»: утро, коридор с 10-15 однокурсниками и дверь, за которой на столе лежит полный комплект билетов. В каком случае вероятнее сдать экзамен – если идти «в первых рядах», «в серединке» или если зайти в аудиторию в числе последних? …Изучаем теорию вероятностей!

Сначала разбираемся с основными терминами, которые ниже по тексту я буду выделять***жирным курсивом***. Обращаю ваше внимание, что это ИМЕННО ТЕРМИНЫ, а не «просто слова»!

События. Виды событий

Одно из базовых понятий тервера уже озвучено выше – это ***событие***. События бывают***достоверными***, ***невозможными*** и ***случайными***.

Достоверным называют событие, которое в результате ***испытания*** *(осуществления определенных действий, определённого комплекса условий)* **обязательно произойдёт**. Например, в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.

Невозможным называют событие, которое **заведомо не произойдёт** в результате испытания. Пример невозможного события: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.

И, наконец, событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может, **как произойти, так и не произойти**, при этом должен иметь место <u>принципиальный критерий случайности</u>: случайное событие – есть следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно. Пример: в результате броска монеты выпадет «орёл». В рассмотренном случае случайные факторы – это форма и физические характеристики монеты, сила/направление броска, сопротивление воздуха и т.д.

Подчёркнутый критерий случайности очень важен – так, например, карточный шулер может очень ловко имитировать случайность и давать выигрывать жертве, но ни о каких случайных факторах, влияющих на итоговый результат, речи не идёт.

Любой результат испытания называется ***исходом***, который, собственно и представляет собой появление определённого события. В частности, при подбрасывании монеты возможно 2 исхода (случайных события): выпадет орёл, выпадет решка. Естественно, подразумевается, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

События (любые) **обозначают** большими латинскими буквами $A, B, C, D, E, F, \ldots$ либо теми же буквами с подстрочными индексами, например: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots$. Исключение составляет буква P, которая зарезервирована под другие нужды.

Запишем следующие случайные события:

A_O – в результате броска монеты выпадет «орёл»;

B_5 – в результате броска игральной кости (кубика) выпадет 5 очков;

C_T – из колоды будет извлечена карта трефовой масти *(по умолчанию колода считается полной)*.

Да, события прямо так и записывают в практических задачах, при этом в уместных случаях удобно использовать «говорящие» подстрочные индексы (хотя можно обойтись и без них).

Следует в третий раз подчеркнуть, что случайные события обязательно удовлетворяют вышеприведённому критерию случайности. В этом смысле снова показателен 3-й пример: если из колоды изначально удалить все карты трефовой масти, то событие C_T становится*невозможным*. Наоборот, если испытателю известно, что, например, дама треф лежит снизу, то он при желании может сделать событие C_T *достоверным* =) Таким образом, в данном примере предполагается, что **карты хорошо перемешаны и их рубашки неразличимы**, т.е. колода не является краплёной. Причём, здесь под «крапом» понимаются даже не «умелые руки», ликвидирующие случайность вашего выигрыша, а видимые дефекты карт. Например, рубашка той же дамы треф может быть грязной, порванной, заклеенной скотчем… блин, какое-то пособие для начинающего чикатило получилось =)

Таким образом, при розыгрыше важного жребия всегда есть смысл невзначай посмотреть, а не одинаковы ли грани монеты ;-)

Другая важная характеристика событий – это их ***равновозможность***. Два или бОльшее количество событий называют **равновозможными**, если ни одно из них не является более возможным, чем другие. Например:

выпадение орла или решки при броске монеты;
выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;
извлечение карты трефовой, пиковой, бубновой или червовой масти из колоды.

При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.

Могут ли быть те же события **не равновозможными**? Могут! Например, если у монеты или кубика смещён [центр тяжести](), то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани. Как говорится, ещё одна лазейка для мошенников.

События $C_T, C_П, C_Ч, C_Б$ – извлечение трефы, пики, червы или бубны тоже равновозможны. Однако равновозможность легко нарушит фокусник, который, тасуя колоду (даже «идеальную»), ловко подсмотрит и спрячет в рукаве, например, туза треф. Здесь становится *менее возможным*, что оппоненту будет сдана трефа, и, главное, *менее возможно*, что будет сдан туз.

Тем не менее, в рассмотренных трёх случаях при потере равновозможности всё же сохраняется случайность событий.

Совместные и несовместные события. Противоположные события. Полная группа событий

События называют ***несовместными***, если в одном и том же испытании появление одного из событий **исключает** появление других событий. Простейшим примером несовместных событий является пара ***противоположных*** событий. Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой вверху. Например:

A_O – в результате броска монеты выпадет орёл;

$\bar{A}_O$ – в результате броска монеты выпадет решка.

Совершено ясно, что в отдельно взятом испытании появление орла исключает появление решки (и наоборот), поэтому данные события и называются несовместными.

Противоположные события легко формулируются из соображений элементарной логики:

B_5 – в результате броска игрального кубика выпадет 5 очков;

$\bar{B}_5$ – в результате броска игрального кубика выпадет число очков, отличное от пяти.

Либо пять, либо не пять – третьего не дано, т.е. события **несовместны** и **противоположны**.

Аналогично – или трефа или карта другой масти:

C_T – из колоды будет извлечена карта трефовой масти;

$\bar{C}_T$ – из колоды будет извлечена пика, черва или бубна.

Множество несовместных событий образуют ***полную группу событий***, если в результатеотдельно взятого испытания **обязательно появится одно из этих событий**. Очевидно, что любая пара противоположных событий (в частности, примеры выше) образует полную группу. Однако в различных задачах с одним и тем же объектом могут фигурировать разные события, например, для игрального кубика характерно рассмотрение следующего набора:

B_1 – в результате броска игрального кубика выпадет 1 очко;

B_2 – … 2 очка;

B_3 – … 3 очка;

B_4 – … 4 очка;

B_5 – … 5 очков;

B_6 – … 6 очков.

События $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ **несовместны** *(поскольку появление какой-либо грани исключает одновременное появление других)* **и образуют полную**

группу *(так как в результате испытания непременно появится одно из этих шести событий)*.

Ещё одно важное понятие, которое нам скоро потребуется – это ***элементарность*** исхода (события). Если совсем просто, то элементарное событие «нельзя разложить на другие события». Например, события $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ элементарны, но событие $\overline{B}_5$ не является таковым, так как подразумевает выпадение 1, 2, 3, 4 или 6 очков (включает в себя 5 элементарных исходов).

В примере с картами события $C_T, C_П, C_Ч, C_Б$ (извлечение трефы, пики, червы или бубны соответственно) несовместны и образуют полную группу, но они неэлементарны. Если считать, что в колоде 36 карт, то каждое из перечисленных событий включает в себя 9 элементарных исходов. Аналогично – события $D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_В, D_Д, D_К, D_Т$ (извлечение шестёрки, семёрки, …, короля, туза) несовместны, образуют полную группу и неэлементарны (каждое включает в себя 4 исхода).

Таким образом, элементарным исходом здесь считается лишь извлечение какой-то конкретной карты, и, разумеется, 36 несовместных элементарных исходов тоже образуют полную группу событий.

Совместные события менее значимы с точки зрения решения практических задач, но обходить их стороной не будем. События называются **совместными**, если <u>в отдельно взятом испытании</u> появление одного из них **не исключает** появление другого. Например:

C_T – из колоды карт будет извлечена трефа;

D_7 – из колоды карт будет извлечена семёрка.

Если быть совсем лаконичным, одно не исключает другого.

Понятие совместности охватывает и бОльшее количество событий:

D – завтра в 12.00 будет дождь;
G – завтра в 12.00 будет гроза;
S – завтра в 12.00 будет солнце.

Ситуация, конечно, довольно редкая, но совместное появление всех трёх событий в принципе не исключено. Следует отметить, что перечисленные события совместны и попарно, т.е. может быть только ливень с грозой или грибной дождик, или погромыхает неподалёку на фоне ясного неба.

Алгебра событий

Мужайтесь, будет и матан =)

Пожалуйста, запомните **ВАЖНЕЙШЕЕ ПРАВИЛО**, без которого освоить тервер просто нереально:

Операция сложения событий означает <u>логическую связку</u> **ИЛИ**, а **операция умножения событий** – <u>логическую связку</u> **И**.

1) **Суммой** двух событий A и B называется событие $A+B$ которое состоит в том, что наступит **или** событие A **или** событие B **или** оба события

одновременно. В том случае, если события **несовместны**, последний вариант отпадает, то есть может наступить **или** событие A **или** событие B.

Правило распространяется и на бОльшее количество слагаемых, например, событие $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ состоит в том, что произойдёт **хотя бы одно** из событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, а **если события несовместны** – **то одно и только одно** событие из этой суммы: **или**событие A_1, **или** событие A_2, **или** событие A_3, **или** событие A_4, **или** событие A_5.

Примеров масса:

События $\overline{B}_5 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_6$ (при броске игральной кости не выпадет 5 очков) состоит в том, что выпадет **или** 1, **или** 2, **или** 3, **или** 4, **или** 6 очков.

Событие $B_{1,2} = B_1 + B_2$ (выпадет **не более** двух очков) состоит в том, что появится 1 **или** 2**очка**.

Событие $B_ч = B_2 + B_4 + B_6$ (будет чётное число очков) состоит в том, что выпадет **или** 2 **или** 4**или** 6 очков.

Событие $C_ч + C_Б$ заключается в том, что из колоды будет извлечена карта красной масти (черва **или** бубна), а событие $D_В + D_Д + D_К + D_Т$ – в том, что будет извлечена «картинка» (валет **или** дама **или** король **или** туз).

Чуть занятнее дело с совместными событиями:

Событие $C_Т + D_7$ состоит в том, что из колоды будет извлечена трефа **или** семёрка **или**семёрка треф. Согласно данному выше определению, **хотя бы что-то** – или любая трефа или любая семёрка или их «пересечение» – семёрка треф. Легко подсчитать, что данному событию соответствует 12 элементарных исходов (9 трефовых карт + 3 оставшиеся семёрки).

Событие $D + G + S$ состоит в том, что завтра в 12.00 наступит **ХОТЯ БЫ ОДНО из суммируемых совместных событий**, а именно:

– или будет только дождь / только гроза / только солнце;
– или наступит только какая-нибудь пара событий (дождь + гроза / дождь + солнце / гроза + солнце);
– или все три события появятся одновременно.

То есть, событие $D + G + S$ включает в себя 7 возможных исходов.

Второй столп алгебры событий:

2) **Произведением** двух событий A и B называют событие AB, которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение AB означает, что при некоторых обстоятельствах наступит **и** событие A, **и** событие B. Аналогичное утверждение справедливо и для бОльшего количества событий, так, например,

произведение $A_1 A_2 A_3 \cdot \ldots \cdot A_{10}$ подразумевает, что при определённых условиях произойдёт **и** событие A_1, **и** событие A_2, **и**событие A_3, …, **и** событие A_{10}.

Рассмотрим испытание, в котором подбрасываются две монеты и следующие события:

A_1 – на 1-й монете выпадет орёл;

$\overline{A}_1$ – на 1-й монете выпадет решка;

A_2 – на 2-й монете выпадет орёл;

$\overline{A}_2$ – на 2-й монете выпадет решка.

Тогда:

– событие $A_1 A_2$ состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й **и** на 2-й) выпадет орёл;

– событие $\overline{A}_1 \overline{A}_2$ состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й **и** на 2-й) выпадет решка;

– событие $A_1 \overline{A}_2$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-й монете решка;

– событие $\overline{A}_1 A_2$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й монете орёл.

Нетрудно заметить, что события $A_1 A_2,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2,\ A_1 \overline{A}_2,\ \overline{A}_1 A_2$ **несовместны** *(т.к. не может, например, выпасть 2 орла и в то же самое время 2 решки)* и образуют **полную группу***(поскольку учтены* ***все*** *возможные исходы броска 2-х монет)*. Давайте просуммируем данные события: $A_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 + A_1 \overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$. Как интерпретировать эту запись? Очень просто – умножение означает логическую связку **И**, а сложение – **ИЛИ**. Таким образом,

сумму $A_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 + A_1 \overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$ легко прочитать понятным человеческим языком: «выпадут два орла**или** две решки **или** на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-ой решка **или** на 1-ой монете выпадет решка **и** на 2-й монете орёл »

Это был пример, когда **в одном испытании** задействовано несколько объектов, в данном случае – две монеты. Другая распространенная в практических задачах схема – это***повторные испытания***, когда, например, один и тот же игральный кубик бросается 3 раза подряд. В качестве демонстрации рассмотрим следующие события:

$B_{(1)4}$ – в 1-м броске выпадет 4 очка;

$B_{(2)5}$ – во 2-м броске выпадет 5 очков;

$B_{(3)6}$ – в 3-м броске выпадет 6 очков.

Тогда событие $B_{(1)4} \cdot B_{(2)5} \cdot B_{(3)6}$ состоит в том, что в 1-м броске выпадет 4 очка **и** во 2-м броске выпадет 5 очков **и** в 3-м броске выпадет 6 очков. Очевидно, что в случае с кубиком будет значительно больше **комбинаций** (исходов), чем, если бы мы подбрасывали монету.

…Понимаю, что, возможно, разбираются не очень интересные примеры, но это часто встречающиеся в задачах вещи и от них никуда не деться. Помимо монетки, кубика и колоды карт вас поджидают урны с разноцветными шарами, несколько анонимов, стреляющих по мишени, и неутомимый рабочий, который постоянно вытачивает какие-то детали =)

Вероятность события

Вероятность события – это центральное понятие теории вероятностей. …Убийственно логичная вещь, но с чего-то надо было начинать =) Существует несколько подходов к её определению:

Классическое определение вероятности;
Геометрическое определение вероятности;
Статистическое определение вероятности.

В данной статье я остановлюсь на классическом определении вероятностей, которое находит наиболее широкое применение в учебных заданиях.

Обозначения. Вероятность некоторого события A обозначается большой латинской буквой P, а само событие берётся в скобки, выступая в роли своеобразного аргумента. Например:

$P(A_O)$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;
$P(B_5)$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;
$P(C_T)$ – вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Также для обозначения вероятности широко используется маленькая буква p. В частности, можно отказаться от громоздких обозначений событий A_O, B_5, C_T и их вероятностей $P(A_O), P(B_5), P(C_T)$ в пользу следующей стилистики::

$p_O = \frac{1}{2}$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;
$p_5 = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;
$p_T = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Данный вариант популярен при решении практических задач, поскольку позволяет заметно сократить запись решения. Как и в первом случае, здесь удобно использовать «говорящие» подстрочные/надстрочные индексы.

Все уже давно догадались о числах, которые я только что записал выше, и сейчас мы узнаем, как они получились:

Классическое определение вероятности:

Вероятностью наступления события A в некотором испытании называют отношение $P(A)=\frac{m}{n}$, где:

n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, которые образуют полную группу событий;

m – количество элементарных исходов, ***благоприятствующих*** событию A.

При броске монеты может выпасть либо орёл, либо решка – данные события образуютполную группу, таким образом, общее число исходов $n=2$; при этом, каждый из нихэлементарен и равновозможен. Событию A_o благоприятствует $m=1$ исход (выпадение орла). По классическому определению вероятностей: $P(A_o)=\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$.

Аналогично – в результате броска кубика может появиться $n=6$ элементарных равновозможных исходов, образующих полную группу, а событию B_5 благоприятствует единственный $m=1$ исход (выпадение пятёрки). Поэтому: $P(B_5)=\frac{m}{n}=\frac{1}{6}$.

Особое внимание обращаю на третий пример. Здесь будет некорректным сказать *«раз в колоде 4 масти, то вероятность извлечения трефы* $P(C_T)=\frac{1}{4}$ *»*. В определении речь идёт об элементарных исходах, поэтому правильный порядок рассуждений таков: всего в колоде 36 карт *(несовместные элементарные исходы, образующие полную группу)*, из них 9 карт трефовой масти *(кол-во элементарных исходов, благоприятствующих событию C_T)*; по классическому определению вероятности: $P(C_T)=\frac{m}{n}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$. Именно так!

Вероятности можно выразить и в процентах, например: вероятность выпадение орла равна $\frac{1}{2}\cdot 100\%=50\%$, выпадения пятёрки $\frac{1}{6}\cdot 100\%\approx 16{,}67\%$, извлечения трефы $\frac{1}{4}\cdot 100\%=25\%$, но в теории вероятностей **ЭТОГО ДЕЛАТЬ НЕ ПРИНЯТО** (хотя не возбраняется прикидывать проценты в уме).

Принято использовать доли единицы, и, очевидно, что вероятность может изменяться в пределах $0\le P(A)\le 1$. При этом если $P(A)=0$, то событие A является *невозможным*, если $P(A)=1$ – *достоверным*, а если $0<P(A)<1$, то речь идёт о *случайном* событии.

! Если в ходе решения любой задачи у вас получилось какое-то другое значение вероятности – ищите ошибку!

При классическом подходе к определению вероятности крайние значения (ноль и единица) получаются посредством точно таких же рассуждений. Пусть из некой урны, в которой находятся 10 красных шаров, наугад извлекается 1 шар. Рассмотрим следующие события:

K – из урны будет извлечён красный шар;
Z – из урны будет извлечён зелёный шар.

Общее количество исходов: $n = 10$. Событию K благоприятствуют все возможные исходы $(m = 10)$, следовательно, $P(K) = \frac{m}{n} = \frac{10}{10} = 1$, то есть данное событие *достоверно*. Для 2-го же события благоприятствующие исходы отсутствуют $(m = 0)$, поэтому $P(Z) = \frac{m}{n} = \frac{0}{10} = 0$, то есть событие Z *невозможно*.

Особый интерес представляют события, вероятность наступления которых чрезвычайно мала. Хоть такие события и являются случайными, для них справедлив следующий постулат:

в единичном испытании маловозможное событие не произойдёт.

Именно поэтому Вы не сорвёте в лотерее Джек-пот, если вероятность этого события, скажем, равна 0,00000001. Да-да, именно Вы – с единственным билетом в каком-то конкретном тираже. Впрочем, бОльшее количество билетов и бОльшее количество розыгрышей Вам~~особо~~ не помогут. ...Когда я рассказываю об этом окружающим, то почти всегда в ответ слышу: «но ведь кто-то выигрывает». Хорошо, тогда давайте проведём следующий эксперимент: пожалуйста, сегодня или завтра купите билет любой лотереи (не откладывайте!). И если выиграете... ну, хотя бы больше 50-ти килорублей, обязательно отпишитесь – я объясню, почему это произошло. За процент, разумеется =) =)

Но грустить не нужно, потому что есть противоположный принцип: если вероятность некоторого события очень близка к единице, то в отдельно взятом испытании оно*практически достоверно* произойдёт. Поэтому перед прыжком с парашютом не надо бояться, наоборот – улыбайтесь! Ведь должны сложиться совершенно немыслимые и фантастические обстоятельства, чтобы отказали оба парашюта.

Хотя всё это лирика, поскольку в зависимости от содержания события первый принцип может оказаться весёлым, а второй – грустным; или вообще оба параллельными.

Пожалуй, пока достаточно, на уроке **Задачи на классическое определение вероятности**мы выжмем максимум из формулы $P(A) = \frac{m}{n}$. В заключительной же части этой статьи рассмотрим одну важную теорему:

Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу, равна единице. Грубо говоря, если события образуют полную группу, то со 100%-й вероятностью какое-то из них произойдёт. В самом простом случае полную группу образуют противоположные события, например:

A_o – в результате броска монеты выпадет орёл;

$\overline{A}_o$ – в результате броска монеты выпадет решка.

По теореме: $P(A_O)+P(\overline{A}_O)=1$

Совершенно понятно, что данные события равновозможны и их вероятности одинаковы $P(A_O)=\frac{1}{2}, P(\overline{A}_O)=\frac{1}{2}$.

По причине равенства вероятностей равновозможные события часто называют***равновероятными***. А вот и скороговорка на определение степени опьянения получилась =)

Пример с кубиком: события $B_5, \overline{B}_5$ противоположны, поэтому $P(B_5)+P(\overline{B}_5)=1$.

Рассматриваемая теорема удобна тем, что позволяет быстро найти вероятность противоположного события. Так, если известна вероятность $P(B_5)=\frac{1}{6}$ того, что выпадет пятёрка, легко вычислить вероятность того, что она не выпадет:

$$P(\overline{B}_5)=1-P(B_5)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

Это гораздо проще, чем суммировать вероятности пяти элементарных исходов. Для элементарных исходов, к слову, данная теорема тоже справедлива:
$$P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)+P(B_5)+P(B_6)=1$$

События $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, как отмечалось выше, равновозможны – и теперь мы можем сказать, что равновероятны. Вероятность выпадения любой грани кубика равна $\frac{1}{6}$:
$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4)=P(B_5)=P(B_6)=\frac{1}{6}$$

Ну и на закуску колода: поскольку нам известна вероятность $P(C_T)=\frac{1}{4}$ того, что будет извлечена трефа, то легко найти вероятность того, что будет извлечена карта другой масти:
$$P(C_T)+P(\overline{C}_T)=1 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{C}_T)=1-P(C_T)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Заметьте, что рассмотренные пары событий $B_5, \overline{B}_5$ и $C_T, \overline{C}_T$ не равновероятны, как оно чаще всего и бывает.

В упрощенной версии записи решения вероятность противоположного события стандартно обозначается строчной буквой q. Например, если $p=0,7$ – вероятность того, что стрелок попадёт в цель, то $q=1-p=1-0,7=0,3$ – вероятность того, что он промахнётся.

! В теории вероятностей буквы p и q нежелательно использовать в каких-то других целях.

В честь Дня Знаний я не буду задавать домашнее задание =), но очень важно, чтобы вы могли ответить на следующие вопросы:

– Какие виды событий существуют?
– Что такое случайность и равновозможность события?
– Как вы понимаете термины совместность/несовместность событий?
– Что такое полная группа событий, противоположные события?
– Что означает сложение и умножение событий?
– В чём суть классического определения вероятности?
– Чем полезна теорема сложения вероятностей событий, образующих полную группу?

Нет, зубрить ничего не надо, это всего лишь азы теории вероятностей – своеобразный букварь, который довольно быстро уложится в голове. И чтобы это произошло как можно скорее, предлагаю ознакомиться с уроками **Задачи по комбинаторике** и **Задачи на классическое определение вероятности**.

Успехов!

Автор: Емелин Александр