МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

**Навчально-методичний посібник
для самостійного вивчення дисципліни**

Посібник охоплює всі основні питання навчальної програми курсу теорії ймовірностей та математичної статистики. Згідно з основними програмними темами матеріал розбито на п'ять розділів, усі підрозділи яких побудовано за єдиним принципом. Спочатку стисло подаються головні теоретичні відомості (визначення, формули, теореми та ін.), далі пропонуються докладні приклади розв'язування типових задач і нарешті — велика добірка вправ для самостійного розв'язування, до кожної з яких наведено відповідь.

Наприкінці вміщено варіанти завдань для блочно-модульного контролю знань, а також довідкові додатки та список рекомендованої літератури.

Призначений для студентів економічних спеціальностей.

Передмова

Майже 400 років тому *Галілео Галілей* говорив, що філософію написано у грандіозній книзі — природі, яка завжди відкрита для всіх і кожного. Проте зрозуміти її може лише той, хто навчився розуміти її мову та знаки, якими її написано. А написано її математичною мовою, а знаки її — математичні формули.

Справді, створення математичних моделей реальних процесів і явищ — важливий етап пізнання світу.

У процесі свого розвитку математика збагачувалась видатними досягненнями. Прикладами таких досягнень є створення диференціального та інтегрального числення — математичного аналізу, побудова неевклідової геометрії, розвиток аксіоматичного методу… До цього переліку, безперечно, належить і теорія ймовірностей.

Теорія ймовірностей зародилася в XVI—XVII століттях зі спроб дати теорію азартних ігор.

Перші розрахунки ймовірностей виконали *Н. Тарталья* і *Дж. Кардано*, згодом ці питання досліджували *Г. Галілей*, *П. Ферма, Б. Паскаль, Х. Гюйгенс, Р. Декарт.* Важливу теорему (закон великих чисел), що сприяла розвитку теорії ймовірностей як науки, установив *Я. Бернуллі*. Його результати розвинули *А. Муавр* і *П. Лаплас*. Виключно важливу роль у розвитку теорії ймовірностей мали відкриття *П. Л. Чебишова* та його учнів *А. А. Маркова* і *О. М. Ляпунова*.

Велике значення для розвитку теорії ймовірностей мали і праці видатних математиків XX століття — *С. Н. Бернштейна, О. Я. Хінчина, А. М. Колмогорова, Б. В. Гнєденко, Р. А. Фішера, Р. Е. Мізеса, К. Пірсона та ін*.

Нині теорію ймовірностей часто будують на аксіоматичній основі. На сучасному рівні аксіоматичну побудову подав *А. М. Колмогоров* у 30-тих роках минулого століття.

Із теорією ймовірностей тісно пов’язана математична статистика — розділ математики, в якому за допомогою математичних методів систематизують, опрацьовують і застосовують статистичні дані для наукових і практичних висновків.

Теорія ймовірностей та математична статистика, які дедалі ширше застосовуються в багатьох галузях науки і техніки, є важливими складовими фундаментальної фахової підготовки сучасних економістів.

Розділ 1
ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ. ПРОСТІР ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОДІЙ. ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ

Випробування — реальний або мислений експеримент (виконуваний за певної незмінної сукупності умов), результати якого піддаються спостереженню.

Подія — результат випробування.

Якщо в результаті випробування деяка подія неодмінно відбудеться, то вона називається ***достовірною*** і позначається літерою U. Подія, яка в даному випробуванні не може відбутись, називається ***неможливою*** і позначається літерою V.

Якщо в результаті випробування деяка подія може відбутись, а може не відбутись, то вона називається ***випадковою***. Випадкові події позначаються літерами $A, B, C, D, \ldots$.

Випадкові події, які не можна розкласти на простіші, називаються ***елементарними***. Можлива елементарна подія — це кожний із можливих результатів окремого випробування.

Простір елементарних подій — множина можливих елементарних подій, кожною з яких може закінчитись випробування. Якщо позначимо $\omega_i \left(i = 1,2, ..., n\right)$ можливі елементарні події, то цю множину можна записати у вигляді $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Простір Ω може містити скінченну, зліченну або незліченну множину значень.

Випадковій події A, яка може відбутись у результаті випробування, можна поставити у відповідність деяку множину елементарних подій, що сприяють появі цієї події: $A = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$, яка є підмножиною Ω .

Сума подій. Подія A називається **сумою** подій B і C, тобто $A = B + C$ або $A = B \bigcup C$, якщо при випробуванні відбувається принаймні одна із цих подій. Множину елементарних подій, що становлять подію A, дістають об'єднанням множин елементарних подій, що становлять події B і C. Аналогічно визначається сума n ($n > 2$) подій.

Добуток подій. Подія A називається **добутком** подій B і C, тобто $A = BC$ або $A = B \bigcap C$, якщо в результаті випробування відбуваються як подія B, так і подія C. Множина елементарних подій, що становлять подію A, визначається як переріз множин, що становлять події B і C. Аналогічно визначається добуток n ($n > 2$) подій.

Різниця подій. Подія A називається **різницею** подій B і C, тобто $A = B - C$ або $A = B : C$, якщо відбувається подія B і не відбувається подія C. Множина елементарних подій, що становлять подію A, містить елементарні події, що становлять B, виключаючи ті, при яких відбувається подія C.

Події B і C у даному випробуванні називаються ***несумісними***, якщо відповідні їм множини елементарних подій не містять однакових елементів: $B \bigcap C = V$. Це означає, що коли одна з подій відбулась, друга подія відбутись не може.

Події B і C називаються ***рівноможливими*** у даному випробуванні, якщо є підстава вважати, що жодна з них не є об'єктивно більш можливою, ніж інша.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ у даному випробуванні утворюють ***повну групу подій***, якщо вони несумісні і в результаті випробування неодмінно відбудеться принаймні одна з них, а отже, їхня сума є достовірною подією: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = U$.

Події A і $\overline{A}$ називаються ***протилежними***, якщо вони несумісні й утворюють повну групу подій, тобто $A \bigcap \overline{A} = V$ і $A \bigcup \overline{A} = U$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Партія складається з деталей 1-го, 2-го і 3-го ґатунку, а також бракованих. Деталі ретельно перемішані. Із партії навмання беруть одну деталь. Застосувавши очевидні позначення, розглянемо події: $A_1 = \{1;\, 2\}$; $A_2 = \{1;\, 3\}$; $B_1 = \{2;\, 3\}$; $B_2 = \{2;\, \text{Бр}\}$. Яка з подій B_i утворює з подіями A_1 і A_2 повну групу?

Розв'язання. Згідно з означенням для повної групи подій має виконуватись співвідношення $A_1 \bigcup A_2 \bigcup B_i = U$. Достовірній події відповідає весь простір елементарних подій Ω.

У розглядуваному випробуванні простір Ω складається з чотирьох елементарних подій: деталь може бути 1-го, 2-го, 3-го сорту або бракованою, тобто $\Omega = \{1;\, 2;\, 3;\, \text{Бр}\}$. Знайдемо множину елементарних подій для суми подій A_1 і A_2. Утворюючи об'єднання множин елементарних подій, до нього включають елементарні події відповідних подій, причому однакові елементарні події беруть один раз. Отже, $A_1 \cup A_2 = \{1;\ 2;\ 3\}$. Для того щоб доповнити цю множину до Ω, потрібно додати до суми подій подію B_2, бо множина її елементарних подій містить $\omega_i = \{\text{Бр}\}$.

Приклад 2. Визначити подію $D = \left(\overline{A}_1 \cup B_2\right) \cap \left(\overline{B}_1 \cup A_2\right)$, де події A_1, A_2, B_1, B_2 та випробування, у результаті якого вони відбуваються, задано умовами прикладу 1.

Розв'язання. Згідно з умовою маємо простір елементарних подій $\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ \text{Бр}\}$. Знайдемо множини елементарних подій $\overline{A}_1$ і $\overline{B}_1$. За означенням протилежних подій $A_1 \cup \overline{A}_1 = U$ і $B_1 \cup \overline{B}_1 = U$, а отже, множини елементарних подій для $\overline{A}_1$ і $\overline{B}_1$ доповнюють до Ω відповідно множини елементарних подій A_1 і B_1. Отже, $\overline{A}_1 = \{3;\ \text{Бр}\}$; $\overline{B}_1 = \{1;\ \text{Бр}\}$. Тоді $\overline{A}_1 \cup B_2 = \{2;\ 3;\text{Бр}\}$; $\overline{B}_1 \cup A_2 = \{1;\ 3;\ \text{Бр}\}$. Переріз будь-яких множин містить лише спільні для них елементи, а тому $D = \left(\overline{A}_1 \cup B_2\right) \cap \left(\overline{B}_1 \cup A_2\right) = \{3;\ \text{Бр}\}$. До множини елементарних подій для D входять елементарні події: «деталь 3-го сорту» або «деталь бракована».

Вправи для самостійного розв'язування

1.1. Партія складається зі стандартних і нестандартних деталей, які ретельно перемішані. З неї навмання беруть дві деталі. Визначити :

1) простір елементарних подій;
2) множини елементарних подій для таких подій:
а) A_1 — поява однієї стандартної і однієї нестандартної деталей;
б) A_2 — поява не менш як однієї стандартної деталі;
в) A_3 — поява не більш як однієї стандартної деталі.

1.2. Із ящика, в якому є бронзові, мідні, латунні та сталеві деталі, беруть одну деталь. Події A_1, A_2, A_3, A_4 означають відповідно, що взята деталь бронзова, латунна, мідна, сталева. Визначити подію $B = \left(A_1 \cup \overline{A}_3\right) \cap \left(\overline{A}_4 \cup A_2\right)$.

1.3. У ящику містяться 3 латунні (Л), 3 сталеві (С) і 1 бронзова (Б) деталь. Беруть 2 деталі. Визначити:

1) простір елементарних подій Ω;

2) множину елементарних подій A_3, яка утворює з подіями A_1 і A_2 повну групу, якщо $A_1 = \{\text{СС}, \text{ЛС}\}$, $A_2 = \{\text{БЛ}, \text{ЛС}\}$ — елементарні події, позначені згідно з матеріалом деталей.

1.4. Прилад складається з двох блоків 1-го типу і трьох блоків 2-го типу. Події $A_k\left(k = 1,2\right)$ означають, що працює k -й блок 1-го типу, а події $B_j\left(j = 1,2,3\right)$ — працює j -й блок 2-го типу. Прилад працює, якщо працює принаймні один блок першого типу і не менше як два блоки 2-го типу. Виразити подію C — «прилад працює» через події A_k і B_j.

1.5. Робітник виготовив *n* деталей. Нехай подія $A_i\left(i = 1,2, ..., n\right)$ полягає в тому, що *i*-та деталь має дефект. Записати такі події:

1) ні одна з деталей не має дефектів;
2) принаймні одна деталь має дефект;
3) лише одна деталь має дефект.

1.6. Підкидається гральний кубик. Розглянемо події: $A_1 = \{1; 2; 4\}$, $A_2 = \{3; 4; 6\}$, $A_3 \{4; 5; 6\}$. Чи будуть несумісними події: $B_1 = A_1 \cap \overline{A}_3$ і $B_2 = \overline{A}_1 \cap A_2$?

1.7. На прямокутному 5×4-клітинковому полі подається фігура, що складається із заштрихованих клітинок. Нехай $A_{ij}\left(i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, 3, 4\right)$ — події, які полягають у тому, що клітинку з номерами *i* та *j* заштриховано. Записати події:

1) зображення має вигляд, наведений на рис. 1.1;
2) у правому верхньому куті заштриховано прямокутник розміром 3×2 клітинки.

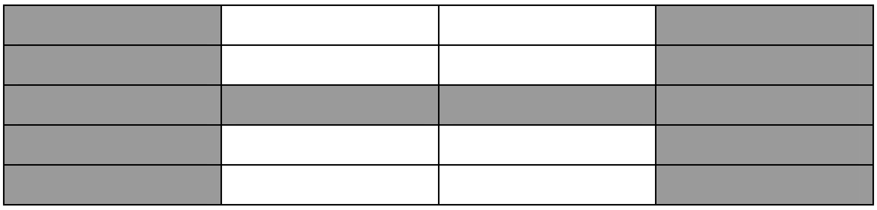

Рис. 1.1.

1.8. Скільки подій можна утворити над простором елементарних подій Ω, що містить 8 елементарних подій, розглядаючи ті, які складаються не менш як із двох елементарних подій?

1.9. Скільки елементарних подій містить простір Ω, якщо з них складено 15 попарно несумісних подій, кожній з яких відповідають 4 елементарні події?

1.2. ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ПОДІЇ. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ОБЧИСЛЕННЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Означення ймовірності

Імовірністю події A називається числова міра об'єктивної можливості настання цієї події в певному випробуванні. Позначається така ймовірність $P(A)$.

Властивості ймовірності

1. Імовірність достовірної події $P(U)=1$.
2. Імовірність неможливої події $P(V)=0$.
3. Ймовірність будь-якої випадкової події $0<P(A)<1$.

Класичне означення ймовірності

Імовірністю випадкової події *A* називається відношення кількості елементарних подій m, які сприяють появі цієї події (становлять множину її елементарних подій), до загальної кількості n рівноможливих елементарних подій, що утворюють простір елементарних подій Ω:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Щоб обчислити ймовірність події A за цією формулою, потрібно знайти кількість елементарних подій у просторі Ω, а також кількість їх у множині, яка відповідає події A. Для цього застосовують формули комбінаторної математики.

I. Нехай скінченна невпорядкована множина складається із n елементів. Виконаємо такі випробування:

1. Упорядкуємо дану множину, пронумерувавши всі її елементи. Тоді елементарною подією у випробуванні буде довільне переставлення з n елементів, а кількість можливих переставлень дорівнюватиме $n!$

2. Розіб'ємо множину на впорядковані підмножини, які містять по m $(m<n)$ елементів і різняться між собою або порядком, або елементами. Тоді елементарною подією у випробуванні буде довільне розміщення з n елементів по m. Кількість таких розміщень

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

3. Розіб'ємо множину на невпорядковані підмножини, які містять по m $(m < n)$ елементів і різняться між собою принаймні одним елементом. Тоді елементарною подією у цьому випробуванні буде комбінація, а кількість таких комбінацій

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

4. Беремо з множини навмання m елементів з поверненням. Тоді у фіксованій підмножині кожний елемент може повторитися m разів. Елементарною подією у випробуванні буде розміщення з n елементів по m із повторенням, а кількість таких розміщень

$$R_n^m = n^m.$$

II. Нехай скінченну множину з n різних елементів розбито на r підмножин, у кожній з яких міститься $n_i\,(i = 1,2,...,r)$ елементів, причому $\sum_{i=1}^{r} n_i = n.$ Із кожної підмножини навмання беремо по m_i елементів без повернення. Тоді елементарною подією буде довільна комбінація елементів. Кількість таких комбінацій

$$K = C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} ... C_{n_r}^{m_r},$$

$$K = A_{n_1}^{m_1} \cdot A_{n_2}^{m_2} ... A_{n_r}^{m_r},$$

якщо їхній порядок істотний.

III. Нехай скінченну множину з n елементів розбито на r підмножин, у кожній з яких міститься n_i $(i = 1,2,...,r)$ однакових елементів, причому $\sum_{i=1}^{r} n_i = n.$ Упорядкуємо цю множину. Тоді елементарною подією буде довільне переставлення з n елементів із повторенням, а число елементарних подій

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_r) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_r!}.$$

Геометричне означення ймовірності

Якщо простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу, а множину елементарних подій для події A — як частину цього геометричного образу, то ймовірність події A визначається як відношення мір цих множин:

$P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$. При цьому вважається, що ймовірність попадання в деяку частину геометричного образу пропорційна до міри цієї його частини.

Статистичне означення ймовірності

Статистичною ймовірністю події *A* називається відношення кількості m випробувань, в яких подія A відбулась, до загальної кількості виконаних випробувань n: $W(A) = \dfrac{m}{n}$.

Знаходження статистичної ймовірності пов'язане з проведенням n випробувань, тому вона називається ще частістю, або відносною частотою, події.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Партія складається з 10 стандартних (С) і 5 нестандартних (Н) деталей. Із партії навмання беруть 5 деталей. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей 3 виявились стандартними.

Розв'язання. Подія A — «серед 5 деталей 3 стандартні, а 2 нестандартні». Деталі беруться навмання, тому можливою елементарною подією є будь-яка група з 5 деталей, вибраних із 15 деталей. Щоб визначити, до якого типу підмножин належать ці групи, розглянемо одну з них. Нехай у групі виявилося 2 стандартні і 3 нестандартні деталі, тобто маємо $\{C, C, H, H, H\}$. Виконаємо у групі довільне переставлення, наприклад, $\{C, H, C, H, H\}$. Група не змінилась — у ній як було, так і залишилося 2 стандартні деталі. Отже, порядок у групі неістотний, тому вони належать до комбінацій. Усі елементарні події рівноможливі, для обчислення ймовірності застосуємо формулу класичного означення ймовірності.

Загальна кількість елементарних подій

$$n = C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!\cdot 10!} = \frac{360360}{120} = 3003.$$

Щоб обчислити кількість елементарних подій, які становлять подію A, міркуємо так: 3 стандартні деталі з 10 можна вибрати C_{10}^{3} способами, а 2 нестандартні з 5 — C_{5}^{3} способами. Отже,

$$m = C_{10}^{3} \cdot C_{5}^{2} = 120 \cdot 10 = 1200.$$

Остаточно дістаємо: $P(A) = \dfrac{1200}{3003} \approx 0{,}4.$

Приклад 2. За умовами прикладу 1 знайти ймовірність зазначеної події, якщо деталі беруться з поверненням.

Розв'язання. Подія A — «серед 5 узятих деталей 3 виявились стандартними, а 2 бракованими». Деталі беруться з поверненням, кожна з них може бути взята повторно, тому елементарна подія — розміщення з повторенням, загальна кількість елементарних подій $n = 15^5$. Визначимо m. Три стандартні з 10 деталі можна вибрати 10^3 способами, 2 нестандартні з 5 можна вибрати 5^2 способами, тобто маємо 25 000 способів. Крім того, треба врахувати, що таких груп може бути C_5^3. Тоді $m = 250\,000$. Остаточно маємо:

$$P(A) = \frac{250\,000}{759\,375} \approx 0{,}329.$$

Приклад 3. Протягом зміни приймальник прийняв у ремонт 10 годинників тієї самої марки від 10 різних осіб і перед закінченням зміни навмання розклав їх підряд на круглій полиці. Знайти ймовірність того, що три годинники, які належать певним особам, виявились поруч.

Розв'язання. Подія A — «три годинники, які належать певним особам, виявились поруч». Усі 10 годинників розкладались навмання, тому вони могли розміститися в довільному порядку. Отже, можлива елементарна подія — переставлення. Загальна кількість елементарних подій дорівнює кількості переставлень із 10 елементів. Усі вони рівноможливі і несумісні. Тому можна застосувати класичне означення ймовірності. Згідно зі сказаним $n = 10!$ Щоб обчислити m, об'єднаємо 3 годинники певних осіб в одну групу. Тоді для події A буде 7! переставлень серед 7 годинників, які залишились; 3! переставлень буде у групі відібраних годинників, а крім того, група із 3 годинників може бути розміщена в будь-якому із 7 проміжків між 7 годинниками, які залишились. Отже, $m = 7!\,3!\,7$.

$$P(A) = \frac{7!3!7}{10!} \approx 0{,}058.$$

Приклад 4. Набір трицифрового номера білета, який виграє, виконується триразовим автоматичним викиданням із ящика одного за одним трьох жетонів із загальної кількості 9 жетонів, пронумерованих цифрами від 1 до 9. Знайти ймовірність того, що набраний номер не містить цифри 7.

Розв'язання. Подія A — «набраний номер не містить цифри 7». Жетони викидаються один за одним автоматично, тому можлива елементарна подія — довільне трицифрове число, утворене за допомогою трьох цифр, узятих із дев'яти даних цифр. Порядок цифр серед вибраних трьох неістотний — важливо лише, щоб серед них не було цифри 7. Елементарна подія — комбінація, а всього таких комбінацій $n = C_9^3 = 84.$ Обчислюючи m, розглядаємо 8 цифр (без цифри 7). Отже, $m = C_8^3 = 56.$ Тоді $P(A) = \frac{56}{84} = \frac{2}{3}.$

Приклад 5. Двоє осіб домовились зустрітися в певному місці у проміжку часу від t_1 до t_2 годин, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме на другого протягом t годин. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожна особа може прийти в довільний момент часу $t \in [t_1; t_2]$.

Розв'язання. Подія A — «зустріч відбудеться». Позначимо довжину часового проміжку $t_2 - t_1 = T,$ а моменти приходу кожної особи — x і y. Тоді подія A відбудеться за умови $|x - y| \le t,$ де $0 \le x \le T,$ $0 \le y \le T.$ Зобразимо ці умови на площині в системі координат XOY (рис. 1.2). Як бачимо з рис. 1.2, часу T відповідає площа квадрата $OBCD$, а події A — площа шестикутника $OEFCKM$. Скориставшись геометричним означенням імовірності, дістанемо: $P(A) = \frac{S_{OEFCKM}}{S_{OBCD}} = \frac{T^2 - (T - t)^2}{T^2} = \frac{t(2T - t)}{T^2}.$

Приклад 6. На двох суміжних сторонах квадрата з довжиною сторони, що дорівнює 1, навмання взято по точці. Знайти ймовірність того, що відстань між цими точками не перевищить 0,5.

Розв'язання. Подія A — «відстань між двома навмання взятими точками не перевищить 0,5». Позначимо відстань від точок, узятих на сторонах квадрата, до його вершини, що є спільною для цих сторін, через x і y. Тоді відстань між зазначеними точками $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Множина значень для x і y незліченна, причому значення кожної з цих змінних рівноможливі на заданих відрізках. Для обчислення ймовірності скористаємося геометричною інтерпретацією. Як елементарну подію розглядаємо $\omega_i = \{x_i; y_i\}$. Якщо x і y змінюються в зазначених межах, то множина Ω є квадратом зі стороною 1. Щоб визначити множину точок для події A, проведемо лінію $\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}5$. На рис. 1.3 подано множину Ω, в якій заштриховано множину точок, що відповідають події A. Мірою кожної з розглядуваних множин є відповідна площа, тому

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\pi \cdot 0{,}25}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

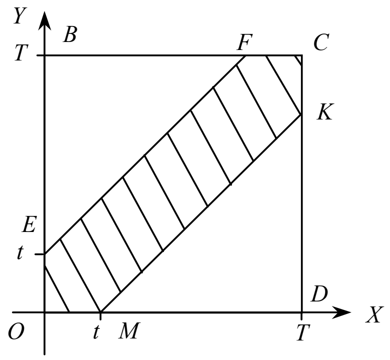

Рис. 1.2

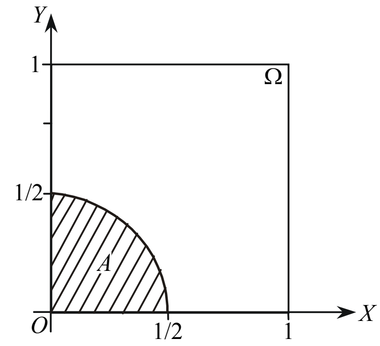

Рис. 1.3

Вправи для самостійного розв’язування

1.10. Партія з 10 деталей містить 4 браковані. Знайти ймовірність того, що з навмання взятих двох деталей будуть:

1) дві придатні;
2) дві браковані;
3) 1 придатна і 1 бракована.

1.11. Партія складається з 20 виробів, з яких 8 виробів 1-го сорту, 6—2-го, 2—3-го сорту, а решта — браковані. Навмання беруть 4 вироби. Знайти ймовірність того, що серед них виявилося 2 вироби 1-го сорту, 1—2-го сорту і 1 бракований.

1.12. Навмання взятий телефонний номер складається із 6 цифр. Знайти ймовірність того, що в ньому всі цифри різні.

1.13. На прямокутній полиці навмання розставлено 8 томів зібрання творів. Знайти ймовірність того, що в результаті I, II і III томи стоять поруч.

1.14. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, вважаючи, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано правильні цифри.

1.15. У лотереї на кожні 500 білетів розігрується 100 речових і 50 грошових виграшів. Знайти ймовірність виграшу для особи, яка має один білет.

1.16. На складі є 10 кінескопів заводу № 1 і вісім кінескопів заводу № 2. Навмання взято чотири кінескопи. Знайти ймовірність того, що серед них два кінескопи заводу № 1 і два кінескопи заводу № 2.

1.17. Партія електролампочок складається з 10 придатних і п'яти бракованих. Із партії навмання по одній беруть усі лампочки. Знайти ймовірність того, що останньою буде взято придатну.

1.18. У партії із 16 деталей чотири нестандартні. Навмання з поверненням беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед них дві деталі будуть стандартними.

1.19. Восьмеро осіб у випадковому порядку сідають за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що троє товаришів опиняться поруч.

1.20. До ліфта дев'ятиповерхового будинку на 1-му поверсі зайшло троє пасажирів. Кожен із них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому з поверхів, починаючи з 2-го. Знайти ймовірність того, що всі пасажири:

1) вийдуть на 5-му поверсі;
2) вийдуть одночасно на одному з поверхів;
3) вийдуть на різних поверхах.

1.21. Із літер розрізного українського алфавіту було складено слово «АНАНАС», а далі всі літери кинуто в урну і ретельно перемішано. Знайти ймовірність того, що, беручи літери одну за одною й укладаючи їх підряд, знову дістанемо це слово.

1.22. Набір трицифрового номера виграшної облігації виконують триразовим викиданням з урни одного за одним трьох жетонів із п'яти, пронумерованих цифрами від 1 до 5. Знайти ймовірність того, що вибраний номер містить цифру 3.

1.23. Стержень завдовжки L розрубують на дві частини. Знайти ймовірність того, що менша з частин, на які він ділиться, має довжину не менше як $\frac{L}{5}$.

1.24. Усередині круга радіусом R навмання вибирають точку. Знайти ймовірність того, що точка потрапить усередину:

1) вписаного у круг квадрата;

2) вписаного у круг правильного трикутника.

1.25. Замовник і виконавець домовились зустрітись у певний час від 11-ї до 12-ї години, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме другого не більше як 20 хв, після чого залишить місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що вони зустрінуться, якщо кожний може прийти до зазначеного місця в довільний момент часу між 11-ю і 12-ю годинами.

1.26. Відділ технічного контролю навмання відібрав 200 одиниць готової продукції і виявив серед них 12 одиниць, що не відповідають стандарту. Визначити відносні частоти появи бракованої і стандартної одиниць продукції, якщо навмання береться одна одиниця продукції.

1.27. У магазині протягом місяця досліджувалась частота попиту на чоловічі костюми за їхніми розмірами. Результати дослідження згруповано та подано в таблиці:

Розмір	46	48	50	52	54	56
Частота	110	250	380	460	340	180

Знайти відносну частоту попиту за розмірами.

1.28. На кожні 25 відштампованих заготівок верстат-автомат дає в середньому 3 нестандартні. Обчислити наближено, скільки потрібно зробити заготівок, щоб одержати 50 стандартних.

1.3. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теореми додавання ймовірностей

Нехай подія A є сумою двох подій B і C. Тоді:

а) якщо події B і C несумісні, то $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$;

б) якщо події B і C сумісні, то $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$.

Події B і C називаються ***залежними***, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась друга подія чи ні. У противному разі події називаються ***незалежними***. Імовірність події C, визначена за умови, що подія B відбулася, називається ***умовною*** і позначається $P(C/B)$.

Теореми множення ймовірностей

Нехай подія A є добутком двох подій B і C. Тоді:

а) якщо події B і C незалежні, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$;

б) якщо події B і C залежні, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C/B)$.

Ці теореми справджуються й для добутку n ($n > 2$) подій.

Імовірність настання принаймні однієї події

Нехай у результаті випробування можуть відбутися n подій $A_1, A_2, ..., A_n$. Потрібно знайти ймовірність того, що відбудеться принаймні одна з них. Позначимо цю подію літерою A. Тоді протилежною буде подія $\overline{A}$, яка полягає в тому, що в результаті випробування одночасно настали протилежні події: $\overline{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i$. Знайдемо ймовірність події A через імовірність протилежної події: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Партія містить 12 стандартних і чотири нестандартні деталі. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) не менш як дві стандартні;
2) усі три нестандартні;
3) принаймні одна стандартна.

Розв'язання. 1) Нехай подія A — «серед трьох узятих деталей не менш як дві стандартні». Тоді її можна подати як суму двох подій: A_1 — «серед трьох узятих деталей дві стандартні і одна нестандартна» і A_2 — «усі три узяті деталі стандартні». Події A_1 і A_2 несумісні, тому маємо:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Імовірності подій A_1 і A_2 знайдемо згідно з класичним означенням імовірності.

$$n = C_{16}^{3} = 560;\ \ m_1 = C_{12}^{2} \cdot C_4^1 = 66 \cdot 4 = 264;\ \ m_2 = C_{12}^{3} = 220.$$

Отже, $P(A) = \frac{484}{560} \approx 0{,}864.$

2) Подія B — «усі три взяті деталі нестандартні». Цю подію можна подати як добуток трьох подій $B_i\ (i = 1,2,3)$, де i-та деталь нестандартна, $B = \bigcap\limits_{i=1}^{3} B_i$. Умовою задачі не задано, що деталі беруться з поверненням. Отже, взяти три деталі разом — це те саме, що брати їх по одній без повернення, а тому події залежні. Згідно з цим імовірність події B обчислюємо так:

$$P(B) = P\left(\bigcap_{i=1}^{3} B_i\right) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) \cdot P(B_3/B_1 \cap B_2) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \approx 0{,}007.$$

3) Подія C — «із трьох деталей принаймні одна стандартна». Протилежна подія $\overline{C}$ — «усі три деталі нестандартні». Імовірність цієї події щойно знайдено: $P(\overline{C}) = P(B)$. Остаточно маємо: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 1 - 0{,}007 = 0{,}993.$

Приклад 2. Маємо 3 партії деталей. Перша партія складається з 10 стандартних і 8 нестандартних деталей, друга — із 15 стандартних і 4 нестандартних, третя — із 20 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із кожної партії беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) тільки одна стандартна;
2) тільки дві стандартні.

Розв'язання. Нехай згідно з умовою з кожної партії взято по одній деталі. При цьому можуть відбутися події A_1, A_2, A_3, які полягають відповідно в тому, що деталь, яку взяли з першої, другої і третьої партії виявилась стандартною.

1) Подія A — «тільки одна із трьох деталей виявилась стандартною». Цю подію можна подати так: $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \cup \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$. Групи подій, сумою яких є подія A, несумісні між собою, а події в кожній групі незалежні. Тому ймовірність події A обчислимо так:

$$P(A) = \frac{10}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{13} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{4}{5} = \frac{133}{1235} \approx 0{,}108.$$

2) Подія B — «тільки дві деталі із трьох виявились стандартними». Подамо цю подію через події A_1, A_2, A_3 та протилежні до них:

$$B = A_1 A_2 \overline{A}_3 \cup A_1 \overline{A}_2 A_3 \cup \overline{A}_1 A_2 A_3 .$$

Подію B подано як суму несумісних груп подій. У кожній групі події незалежні. Знайдемо ймовірність події B:

$$P(B) = \frac{10}{13} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{10}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{13} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{4}{5} = \frac{490}{1235} \approx 0{,}397.$$

Приклад 3. Перевезення вантажів для підприємства забезпечують два автогосподарства, які з цієї метою щодня в першу зміну мають виділяти по одному автомобілю. Імовірність виходу автомобіля на лінію в першому автогосподарстві дорівнює 0,7, а в другому — 0,6. Знайти ймовірність того, що в першу зміну на підприємстві перевозитимуться вантажі.

Розв'язання. Розглянемо події: A — «на підприємстві в першу зміну перевозитимуться вантажі»; A_1 — «для перевезення вантажів прибув автомобіль із першого автогосподарства»; A_2 — «для перевезення вантажів прибув автомобіль із другого автогосподарства». Тоді $A = A_1 \cup A_2$. Події A_1 і A_2 сумісні, тому $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$. Очевидно, що події A_1 і A_2 незалежні і $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2)$. Остаточно дістаємо:

$$P(A) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}88.$$

Приклад 4. Прилад складається із трьох вузлів, які працюють незалежно один від одного, причому другий і третій вузли взаємозамінювані. Імовірності виходу з ладу вузлів на заданому часовому проміжку становлять відповідно 0,2; 0,3 і 0,4. Знайти ймовірність того, що протягом заданого часу прилад працюватиме.

Розв'язання. Розглянемо події: A — «прилад працює протягом заданого часу»; B_1 — «перший вузол працює»; B_2 — «другий вузол працює»; B_3 — «третій вузол працює». Подія A настає, якщо працюють перший та другий вузли, або перший та третій вузли, або всі три вузли разом. Звідси: $A = B_1 \cap (B_2 \cup B_3)$. За умовою задачі маємо, що події B_1 і $(B_2 \cup B_3)$ незалежні, а події B_2 і B_3 — сумісні. Тому

$$P(A) = P(B_1 \cap (B_2 \cup B_3)) = P(B_1) \cdot P(B_2 \cup B_3) =$$
$$= P(B_1) \cdot (P(B_2) + P(B_3) - P(B_2 \cap B_3)) =$$
$$= P(B_1) \cdot (P(B_2) + P(B_3) - P(B_2) \cdot P(B_3)) =$$
$$= 0{,}8 \cdot (0{,}7 + 0{,}7 - 0{,}7 \cdot 0{,}7) = 0{,}728.$$

Під час обчислення враховано, що умовою задачі задані ймовірності протилежних подій.

Вправи для самостійного розв’язування

1.29. У партії із 20 деталей 15 стандартних, а решта нестандартні. Навмання беруть чотири деталі. Знайти імовірність того, що серед них:

1) не більше як дві нестандартні;
2) усі чотири стандартні;
3) принаймні одна нестандартна.

1.30. У цеху з восьми зупинок верстата в середньому чотири зумовлюються заміною різця; дві — несвоєчасним надходженням заготівок; решта — іншими причинами. Знайти ймовірність зупинки верстата з інших причин.

1.31. У разі масового виготовлення виробів брак становить у середньому 1,5 % загальної кількості всіх виробів. З-поміж придатних виробів 85,3 % становлять вироби 1-го сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб належить до 1-го сорту.

1.32. Довести, що добуток імовірностей протилежних подій не перевищує 0,25.

1.33. Партія складається з двох деталей 1-го сорту, двох 2-го сорту і трьох — 3-го сорту. Деталі беруть по одній навмання без повернення. Знайти ймовірність того, що деталь 1-го сорту з’явиться раніше за деталь 3-го сорту.

1.34. У цеху є три резервні мотори, для кожного з яких імовірність бути ввімкненим у даний момент дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що в даний момент ввімкнено:

1) принаймні два мотори;
2) принаймні один мотор.

1.35. Із партії деталей товарознавець вибирає деталі вищого сорту. Імовірність того, що навмання взята деталь належить до вищого сорту, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що із трьох деталей тільки дві будуть 1-го сорту.

1.36. Від аеровокзалу відправились два автобуси. Імовірність своєчасного прибуття кожного з них дорівнює 0,92. Знайти імовірність такої події:

A — обидва автобуси прибудуть своєчасно;

B — обидва автобуси запізняться;

C — тільки один автобус прибуде своєчасно.

1.37. Маємо дві партії деталей. У першій партії сім придатних і три браковані деталі. У другій — 10 придатних і чотири браковані. Із кожної партії навмання беруть по одній деталі. Знайти ймовірність такої події:

1) обидві деталі придатні;

2) обидві деталі браковані;

3) одна деталь придатна, а друга бракована.

1.38. Механізм, що містить 4 однакові деталі, не працюватиме, якщо під час його складання буде взято 3 або більше деталей меншого розміру, ніж потрібно. У робітника залишилось 15 деталей, серед яких 6 меншого розміру. Знайти ймовірність того, що механізм працюватиме, якщо робітник братиме деталі навмання.

1.39. Облік щодо використання запасних частин показав, що в разі ремонту двигуна деталь № 1 замінювалась у середньому у 35 % випадків, деталь № 2 — у 30 % випадків, а обидві деталі одночасно замінювались у 28 % випадків. Знайти ймовірність того, що у двигуні, який надійшов у ремонт, замінюватиметься деталь № 2 за умови, що деталь № 1 замінено, і навпаки.

1.40. Перевірка партії рису, розфасованого по 0,5 кг, дала такі результати: 20 % усіх пачок були по 498 г, 60 % — по 500 г, 20 % — по 502 г. Із партії навмання взято дві пачки. Знайти ймовірність такої події:

1) обидві пачки мають однакову масу;

2) загальна маса пачок відхиляється від норми на 4 г.

1.41. Токар поклав у коробку 4 нові різці і, приступаючи до роботи, щоразу бере навмання один із них, а після роботи знову кладе його в коробку. Знайти ймовірність того, що через 4 зміни всі різці в коробці буде використано, якщо протягом зміни токар користується одним різцем.

1.42. Відділ технічного контролю перевіряє виріб на стандартність. Імовірність того, що виріб стандартний, дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що з двох перевірених виробів тільки один стандартний.

1.43. Під час перевірки партії з N виробів перевіряють n виробів. Якщо серед них буде не менш як m нестандартних, то партія не приймається. Знайти ймовірність того, що партію буде прийнято, якщо в ній M нестандартних виробів.

1.44. Виготовляючи виріб, послідовно працюють k робітників. Якість виробу, що передається кожному наступному виконавцеві, не перевіряється. Робітники не припускаються браку з імовірностями $p_i\,(i=1,2,...,k)$. Знайти ймовірність того, що готовий виріб буде стандартним.

1.45. Випущено n лотерейних білетів, серед яких m виграшних. Гравець придбав k білетів. Знайти ймовірність того, що серед них буде принаймні один виграшний.

1.46. Завод випускає вироби певного виду. Кожен виріб може мати дефект з імовірністю p. Після виготовлення виріб оглядають k контролерів; i-й контролер виявляє дефект з імовірністю $p_i\left(i=1,2,...k\right)$. Виріб із виявленим дефектом бракується. Знайти ймовірності подій:

A — «виріб забраковано»;

B — «виріб забракував 2-й контролер»;

C — «виріб забракували всі контролери».

1.47. Завод випускає вироби певного виду. Кожний виріб може мати дефект з імовірністю p. Виріб оглядає контролер, який може виявити дефект з імовірністю p_1. Якщо дефекту не виявлено, виріб вважається придатним. Контролер з імовірністю α може забракувати придатний виріб. Знайти ймовірності подій:

A — «виріб забраковано»;

B — «виріб забраковано помилково»;

C — «дефектний виріб оцінено як придатний».

1.4. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ І ФОРМУЛА БАЄСА

Нехай подія A може відбутися тільки за умови настання однієї із несумісних подій B_i $(i = 1, 2,\ldots, n)$, які утворюють повну групу. Тоді ймовірність події A подається формулою:

$$P\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}P\left(B_i\right)\cdot P\left(A/B_i\right),$$

де $P\left(B_i\right)$ — імовірність події B_i; $P\left(A/B_i\right)$ — умовні ймовірності настання події A.

Наведена залежність називається ***формулою повної ймовірності***.

Знову розглянемо події $B_i\left(i=1, 2, ..., n\right)$, які утворюють повну групу подій і попарно несумісні. Ці події називатимемо ***гіпоте-***

зами. Подія A може відбутись одночасно з деякою із подій B_i. Відомі ймовірності подій B_i та умовні ймовірності того, що подія A відбудеться. Відомо, що в результаті випробування подія A відбулась. Потрібно з огляду на це переоцінити ймовірності гіпотез B_i. Для цього застосовують формулу Баєса:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}, \ (i = 1, 2, ..., n).$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Маємо N партій деталей, по n_i деталей у кожній. Відомо, що серед n_i деталей m_i стандартних $(i = 1,2,..., N)$. Із навмання взятої партії беремо одну деталь. Знайти ймовірність того, що вибрана деталь: а) стандартна; б) нестандартна.

Розв'язання. Позначимо події: $B_i \left(i = 1,2,..., N\right)$ — «деталь узято з i-ї партії»; A — «узята деталь стандартна». Події B_i попарно несумісні й утворюють повну групу. Подія A може настати одночасно з деякою подією B_i. Задача розв'язується за формулою повної ймовірності:

$$P(B_i) = \frac{1}{N},$$

$$P(A/B_i) = \frac{m_i}{n_i}, \ (i = 1, 2, ..., N).$$

$$P(A) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{n_i}.$$

Імовірність події $\overline{A}$ можна визначити відніманням від одиниці ймовірності події A, яку щойно знайдено.

Приклад 2. На двох верстатах-автоматах виробляють однакові деталі, які надходять на транспортер. Продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, причому перший верстат виробляє нестандартну деталь з імовірністю 0,15, а другий — з імовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що навмання взята з транспортера деталь буде стандартною.

Розв'язання. Розглянемо події: B_1 — «деталь виготовлено на першому верстаті»; B_2 — «деталь виготовлено на другому верстаті»; A — «вибрана деталь стандартна». Події B_1 і B_2 несумісні й утворюють повну групу, що ж до події A, то вона може відбутись одночасно з кожною із цих подій. Умовні ймовірності настання події A відомі. Згідно з умовою, що продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, знаходимо $P(B_1) = 0{,}75$, $P(B_2) = 0{,}25$. За формулою повної ймовірності маємо: $P(A) = 0{,}75 \cdot 0{,}85 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 = 0{,}8375$.

Приклад 3. Партію виготовлених деталей перевіряли два контролери. Перший перевірив 45 %, а другий — 55 % деталей. Імовірність припуститися помилки під час перевірки для першого контролера становить 0,15, для другого — 0,1. Після додаткової перевірки в партії прийнятих деталей виявлено браковану. Оцінити ймовірність помилки для кожного контролера.

Розв'язання. Розглянемо події: B_1 — «деталь перевіряв перший контролер»; B_2 — «деталь перевіряв другий контролер»; A — «виявлено браковану деталь». Події B_1 і B_2 несумісні й утворюють повну групу. Подія A відбулась одночасно з однією із цих подій, імовірності яких потрібно переоцінити. Застосуємо формулу Баєса.

$$P(B_1 / A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{\sum\limits_{j=1}^{2} P(B_j)P(A/B_j)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}15}{0{,}45 \cdot 0{,}15 + 0{,}55 \cdot 0{,}1} \approx 0{,}551;$$

$$P(B_2 /A) = 1 - P(B_1 /A) = 1 - 0{,}551 = 0{,}449.$$

Отже, більш імовірно, що помилки припустився перший контролер.

Приклад 4. Маємо дві партії однакових виробів. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга — із 18 стандартних і 5 нестандартних виробів. Із навмання вибраної партії взято один виріб, який виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що другий навмання взятий виріб також буде стандартним.

Розв'язання. Розглянемо події: B_1 — «перший виріб взято з першої партії»; B_2 — «перший виріб узято з другої партії»; A — «перший узятий виріб стандартний»; C — «другий узятий виріб стандартний». За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність події A:

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{19}+\frac{1}{21}\cdot\frac{18}{23}=\frac{587}{874}.$$

За формулою Баєса обчислюємо умовні ймовірності $P(B_1/A)$ і $P(B_2/A)$:

$$P(B_1/A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{19}:\frac{587}{874}=\frac{115}{229};\;\; P(B_2/A)=1-\frac{115}{229}=\frac{114}{229}.$$

Імовірність події C знаходимо за формулою:

$$P(C/A)=P(B_1/A)P(C/A\cap B_1)+P(B_2/C)P(C/A\cap B_2).$$

Умовні ймовірності такі: $P(C/A\cap B_1)=\frac{7}{9}$, $P(C/A\cap B_2)=\frac{17}{22}$. Отже,

$$P(C/A)=\frac{115}{229}\cdot\frac{7}{9}+\frac{114}{229}\cdot\frac{17}{22}\approx 0{,}775.$$

Вправи для самостійного розв'язування

1.48. На двох верстатах-автоматах виробляються однакові заготівки, які транспортером перекидаються в те саме місце. Продуктивність другого верстата в 1,5 раза більша, ніж першого. Перший верстат дає 5 % нестандартних заготівок, а другий — 93 % стандартних. Знайти ймовірність того, що взята навмання заготівка буде:

1) стандартна; 2) нестандартна.

1.49. На конвеєр надходять деталі від трьох автоматів. Перший дає 90 %, другий — 93 %, а третій — 95 % придатної продукції. Протягом зміни від першого автомата надходить 60, від другого — 50, від третього — 40 деталей. Знайти ймовірність потрапляння на конвеєр:

1) нестандартної деталі; 2)стандартної деталі.

1.50. На складі зберігаються кінескопи, 70 % яких виготовлено на заводі № 1, а решта — на заводі № 2. Імовірність того, що кінескоп витримає гарантійний строк, дорівнює 0,9 для заводу № 2 і 0,8 для заводу № 1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кінескоп:

1) не витримає гарантійного строку; 2) витримає гарантійний строк.

1.51. Маємо дві партії деталей. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга — із 10 стандартних і 3 нестандартних. Із першої партії береться одна деталь і перекладається у другу. Знайти ймовірність того, що деталь, яку після цього взяли із другої партії :

1) стандартна; 2) нестандартна.

1.52. Маємо три партії деталей. Перша складається з 10 стандартних і 4 нестандартних, друга — із 14 стандартних і 4 нестандартних, третя — із 16 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із навмання вибраної партії береться деталь. Знайти ймовірність того, що деталь буде:

1) стандартною; 2) нестандартною.

1.53. Металеві заготівки для подальшої обробки надходять із двох цехів: 55 % із першого, 45 % із другого. При цьому продукція з першого цеху містить 3 %, а з другого цеху — 5 % браку. Знайти ймовірність того, що заготівка, яка надійшла на обробку:

1) придатна; 2) бракована.

1.54. На склад надходить продукція від двох підприємств. Від першого — 60 %, від другого — 40 %. Перше підприємство дає 80 % продукції 1-го сорту і 20 % 2-го сорту, а друге дає 70 % продукції 1-го сорту і 30 % 2-го сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взята одиниця продукції буде:

1) першого сорту; 2) другого сорту.

1.55. Для посіву пшениці заготовлено насіння, серед якого 95 % 1-го сорту, 3 % 2-го та 2 % 3-го сорту. Імовірність того, що з насінини виросте колосок, в якому не менш ніж 50 зерен, для 1-го сорту насіння становить 0,5, для 2-го сорту — 0,2, для 3-го — 0,1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий колосок у разі такого посіву матиме не менш як 50 зерен.

1.56. Маємо 50 комплектів деталей. Відомо, що кількість комплектів із дефектами серед них може з однаковою ймовірністю становити 0, 1 або 2. Знайти ймовірність того, що навмання взяті 3 комплекти виявилися без дефектів.

1.57. Кожний виготовлений заводом виріб може мати дефект з імовірністю *p*. У цеху є три контролери, кожний з яких виявляє дефект з імовірністю $p_i\left(i=1,2,3\right)$. Імовірності потрапляння деталі на перевірку до кожного контролера однакові. Виріб, який не було забраковано в цеху, перевіряє ВТК заводу, де дефект виявляється з імовірністю p_0. Визначити ймовірність того, що:

1) виріб буде забраковано в цеху;

2) виріб буде забраковано у ВТК заводу;

3) виріб буде забраковано.

1.58. Партія складається з 10 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із партії навмання взяли деталь і без обстеження відклали вбік. Знайти ймовірність того, що довільно взята після цього з партії деталь буде стандартною.

1.59. Маємо дві партії виробів. Перша складається з N виробів, серед яких n стандартних. У другій партії M виробів, із них m стандартних. Із першої партії взяли k виробів, а із другої l виробів. Вибрані вироби перемішали, і вони утворили нову партію. Знайти ймовірність того, що виріб, узятий навмання з нової партії, буде стандартним.

1.60. Деталі на конвеєр надходять із двох автоматів. Від першого — 60 %, від другого — 40 %. Перший автомат дає 2 %, а другий — 1 % браку. Деталь, яка надійшла на конвеєр, виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що цю деталь виготовлено:

1) першим автоматом; 2) другим автоматом.

1.61. Дві перфораторниці набили 500 перфокарток, із них перша набила 300. Імовірність припуститися помилки під час виконання цієї роботи становить 0,15 для першої і 0,1 для другої працівниці. Під час контролю на перфокартці виявлено помилку. Знайти ймовірність того, що помилку зробила:

1) перша перфораторниця; 2) друга перфораторниця.

1.62. Маємо три партії однакових деталей. У першій 20 стандартних і 5 нестандартних, у другій — 15 стандартних і 3 нестандартні, у третій — 14 стандартних і 2 нестандартні деталі. Із навмання вибраної партії взяли деталь. Вона виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що цю деталь узято:

1) із першої партії; 2) із другої партії; 3) із третьої партії.

1.63. Маємо дві партії однакових виробів. Перша складається з 10 виробів заводу № 1 і 5 виробів заводу № 2. У другій партії 15 виробів заводу № 1 і 6 — заводу № 2. Із навмання вибраної партії взято один виріб, який виявився виготовленим на заводі № 1. Після цього випробування повторили. Знайти ймовірність того, що другий взятий виріб виготовлено на заводі № 2.

1.5. СХЕМА ВИПРОБУВАНЬ З ПОВТОРЕННЯМИ

Незалежні випробування

Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія A може як відбутись, так і не відбутись. Якщо ця ймовірність у кожному випробуванні не залежить від того, відбулась вона в інших випробуваннях чи ні, то такі випробування називаються ***не-***

залежними щодо події А. Згідно з означенням випробування також незалежні, якщо в кожному з них імовірність настання події A однакова, тобто дорівнює тому самому числу. Імовірність того, що подія A відбудеться в кожному з незалежних випробувань, позначають $P(A)=p$, а ймовірність настання протилежної події $P(\overline{A})=1-p=q$. Для розв'язування задач на повторні незалежні випробування застосовують такі формули і теореми.

1. **Формула Бернуллі**. Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність $P(A) = p$, подія A відбудеться m раз, подається так:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Формула застосовується, якщо $n \le 10$.

2. **Найімовірніша кількість**. Частота m_0 настання події A в n незалежних повторних випробуваннях називається ***найімовірнішою кількістю*** (появи цієї події), якщо їй відповідає найбільша ймовірність. Вона визначається за формулою:

$$np-q \le m_0 \le np+p.$$

Розподіл може мати одне або два найімовірніші числа.

3. **Локальна теорема Лапласа**. Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких $P(A) = p$, подія A відбудеться m раз, подається такою наближеною залежністю:

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),\ \text{де}\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Локальна теорема Лапласа дає змогу обчислювати ймовірності $P_n(m)$, якщо $n > 10$ і $p > 0,1$.

4. **Формула Пуассона**. Якщо в кожному з n незалежних повторних випробувань $P(A)=p$ і $0<p<0,1$, а n велике, то

$$P_n(m)\approx\frac{a^m}{m!}e^{-a},\ a=np.$$

5. **Інтегральна теорема Лапласа**. Імовірність того, що подія A відбудеться від m_1 до m_2 раз при проведенні n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з імовірністю p, подається формулою:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ де } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ — функція Лапласа;}$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції Лапласа наводяться у спеціальних таблицях.

6. **Відхилення відносної частоти від імовірності**. Імовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищить ε, визначається за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

7. **Твірна функція**. Нехай проводяться n незалежних випробувань, в яких подія A відбувається з імовірністю $p_i \, (i = 1, 2, ..., n)$. Тоді ймовірність настання цієї події m раз визначається за допомогою твірної функції $\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (p_i z + q_i)$. Якщо перетворити праву частину функції і звести подібні члени, то коефіцієнт при z^m визначає $P_n(m)$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Із партії, в якій 12 стандартних і 4 нестандартні деталі, навмання беруться 3 деталі з поверненням. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей :

1) усі три стандартні;
2) не більш як одна нестандартна;
3) принаймні одна нестандартна.

Розв'язання. Маємо схему трьох незалежних випробувань. Нехай подія A — «узята щоразу деталь стандартна», тоді $P(A) = p = \frac{12}{16} = 0{,}75$. Імовірності обчислюватимемо за формулою Бернуллі:

1) $P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 0{,}75^3 = 0{,}421875.$

2) Подію «із трьох деталей не більш як одна нестандартна» можна розглядати так: узято 3 стандартні деталі або 2 стандартні і одну нестандартну деталь. У позначеннях формули Бернуллі

$$P_3(m \geq 2) = P_3(3) + P_3(2) = 0{,}421875 + C_3^2 \cdot 0{,}75^2 \cdot 0{,}25 = 0{,}84375.$$

3) Протилежною для даної буде подія «усі три деталі стандартні». Їй рівносильна подія $P_3(m < 3)$. Обчислимо цю ймовірність: $P_3(m < 3) = 1 - P_3(3) = 1 - 0{,}421875 = 0{,}578125.$

Приклад 2. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,6 загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40?

Розв'язання. Скористаємося формулою, за якою визначається найімовірніше число: $np - q \leq m_0 \leq np + p.$ Підставимо сюди значення відомих величин:

$$0{,}6n - 0{,}4 \leq 40 \leq 0{,}6n + 0{,}6; \;\; -0{,}4 - 40 \leq -0{,}6n \leq 0{,}6 - 40;$$

$$\frac{39{,}4}{0{,}6} \leq n \leq \frac{40{,}4}{0{,}6}; \;\; 65{,}7 \leq n \leq 67{,}3.$$

Задача має два розв'язки: n = 66 і n = 67.

Приклад 3. На кожні 40 відштампованих виробів у середньому припадає 4 дефектних. Із усієї продукції навмання узято 400 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 350 виробів будуть без дефектів.

Розв'язання. Подія A — «узято виріб без дефекту». За умовою $P(A) = p = 0{,}9$. Проведено $n = 400$ незалежних випробувань. Розв'яжемо задачу за формулою локальної теореми

Лапласа: $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$ Підставляючи дані за умовою задачі, дістаємо:

$x = \frac{350 - 400 \cdot 0{,}9}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -1{,}67.$ За таблицями знаходимо $\varphi(-1{,}67) = 0{,}0989,$ беручи до уваги, що $\varphi(x)$ — парна функція.

Отже, $P_{400}(350) \approx \frac{0{,}0989}{6} \approx 0{,}0165.$

Приклад 4. Завод відправив на базу 1000 доброякісних виробів. За час перебування в дорозі кожний виріб може бути пошкоджено з імовірністю 0,003. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть 3 пошкоджені вироби.

Розв'язання. Якщо подія A — «виріб пошкоджено», то її ймовірність $p = 0{,}003$. Розглядається схема незалежних випробувань, $n = 1000$. Імовірність події A досить мала, тому задачу розв'яжемо за формулою Пуассона: $P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}$.

Виконуючи обчислення, знаходимо: $a = np = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$; $P_{1000}(3) \approx \frac{3^3}{3!} e^{-3} \approx 0{,}229.$

Приклад 5. Зерна пшениці проростають з імовірністю 0,95. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних зерен зійде від 1880 до 1920.

Розв'язання. Подія A — «зерно пшениці зійшло». Її імовірність $p = 0{,}95$, кількість незалежних випробувань $n = 2000$. Застосуємо формулу інтегральної теореми Лапласа:

$$P_n(m_1; m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),\ x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt -$$

функція Лапласа, а далі виконаємо обчислення:

$$x_1 = \frac{1880 - 2000 \cdot 0{,}95}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}} \approx -1{,}03;\ x_2 = \frac{1920 - 1900}{\sqrt{95}} \approx 2{,}06;$$

$$P_{2000}(1880;1920) \approx \Phi(2{,}06) - \Phi(-1{,}03) = \Phi(2{,}06) +$$

$$+ \Phi(1{,}03) = 0{,}4803 + 0{,}3485 = 0{,}8288.$$

Значення функції Лапласа беруться з відповідної таблиці.

Приклад 6. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з імовірністю 0,9. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з імовірністю 0,9973 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від імовірності її виготовлення не перевищуватиме 0,03? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

Розв'язання. Подія A — «виготовлено нестандартну деталь». Маємо схему з n незалежними випробуваннями, в якій $P(A) = p = 0{,}1$. Скористаємося формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}9973$; $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}49865$. За таблицями знаходимо $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 3$; $n = \frac{9pq}{\varepsilon^2} = 900$.

Визначимо кількість нестандартних деталей у партії за даних умов, розв'язавши нерівність:

$$\left|\frac{m}{900} - 0{,}1\right| < 0{,}03;\ -0{,}03 < \frac{m}{900} - 0{,}1 < 0{,}03;\ 0{,}07 < \frac{m}{900} < 0{,}13;\ 63 < m < 117.$$

Отже, у партії із 900 деталей буде від 63 до 117 нестандартних деталей.

Приклад 7. Маємо три партії деталей. Перша складається з 9 стандартних і 3 нестандартних; друга — із 12 стандартних і 3 нестандартних; третя — із 18 стандартних і 9 нестандартних деталей. Із кожної партії навмання беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що в партії буде 0, 1, 2, 3 стандартні деталі.

Розв'язання. Подія A — «поява стандартної деталі в кожному випробуванні». Позначимо через $p_i\,(i = 1,2,3)$ імовірності узяття стандартної деталі із i-ої партії. Для обчислення ймовірностей складемо твірну функцію:

$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^{3}(p_i z + q_i) = \left(\frac{3}{4}z + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{5}z + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5}z^3 + \frac{13}{30}z^2 + \frac{3}{20}z + \frac{1}{60}.$$

Отже, $P_3(0) = \frac{1}{60}$; $P_3(1) = \frac{3}{20}$; $P_3(2) = \frac{13}{30}$; $P_3(3) = \frac{2}{5}$.

Вправи для самостійного розв'язування

1.64. На кожні 30 штампованих виробів у середньому припадає 6 виробів з дефектом. Знайти ймовірність того, що з 5 навмання взятих виробів 3 виявляться без дефекту.

1.65. Деталі 2-го сорту становлять 2/3 усіх деталей, які є в партії. Знайти ймовірність того, що з 4 навмання взятих деталей 3 виявляться 2-го сорту.

1.66. Частка 3-го сорту становить у деякій масовій продукції у середньому 20 %. Знайти ймовірність того, що з п'яти узятих примірників продукції не менш як три будуть 3-го сорту.

1.67. У партії, яка складається із виробів двох сортів, виробів 2-го сорту в 1,5 раза більше, ніж 1-го. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання взятих виробів принаймні один буде 1-го сорту.

1.68. Імовірність виграшу облігації за весь період позики становить 0,6. Куплено 5 облігацій. Знайти ймовірність такої події:

1) виграють дві облігації;

2) виграш випаде принаймні на одну облігацію;

3) виграють не більш як дві облігації.

1.69. За один цикл автомат виготовляє 10 деталей. За скільки циклів імовірність виготовлення принаймні однієї бракованої деталі буде не менш як 0,8, якщо ймовірність виготовлення бракованої деталі для автомата становить 0,01?

1.70. Для забезпечення роботи на деякому будівельному об'єкті автопідприємство має 6 автомобілів. Імовірність виходу кожного автомобіля на лінію в першу зміну дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопідприємства, якщо для цього в першу зміну потрібно мати на лінії не менш як 4 автомобілі.

1.71. Автомат штампує вироби 1-го сорту з імовірністю 0,6. Скільки виробів має містити партія, щоб найімовірніша кількість виробів 1-го сорту становила 55?

1.72. Промтоварна база обслуговує 8 магазинів. Заявки на товар на наступний день можуть надходити від кожного магазину з імовірністю 0,6. Знайти найімовірнішу кількість заявок, які можуть надходити на базу щодня, а також імовірність надходження такої кількості заявок.

1.73. Знайти найімовірнішу кількість зупинок прядильного верстата протягом години роботи, якщо середня кількість зупинок за кожні 12 хв дорівнює 4.

1.74. Яку частку (у відсотках) виробів 1-го сорту має виробляти автомат, щоб у партії із 100 навмання взятих виробів найімовірніша кількість виробів 1-го сорту дорівнювала 80?

1.75. Частка 2-го сорту деякої масової продукції в середньому становить 20 %. Навмання взято 100 примірників цієї продукції. Яка кількість виробів 2-го сорту в утвореній групі найімовірніша і яка імовірність того, що в цій групі буде саме така кількість виробів 2-го сорту?

1.76. Частка заготівок із відхиленням від установленого стандарту при обточуванні таких заготівок становить у середньому 0,11 усієї кількості обточених заготівок. Знайти ймовірність того, що із 70 обточених заготівок 62 відповідають стандарту.

1.77. Стандартних деталей автомат штампує у 5 раз більше, ніж нестандартних. Навмання вибрано 200 деталей. Знайти ймовірність того, що серед них 30 деталей нестандартні.

1.78. Знайти ймовірність зупинки 20 верстатів із 80 працюючих, якщо ймовірність зупинки кожного верстата становить 0,8.

1.79. Посівний фонд містить 92 % насіння 1-го сорту. Навмання взято 150 зерен. Знайти ймовірність того, що серед них 140 зерен 1-го сорту.

1.80. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Імовірність обриву нитки на одному веретені протягом 1 хв дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом 1 хв буде обрив нитки на двох веретенах.

1.81. До банку надійшло 5000 пачок грошових знаків. Імовірність того, що пачку неправильно вкомплектовано, дорівнює 0,0004. Знайти ймовірність того, що серед одержаних пачок буде не більш як одна неправильно укомплектована.

1.82. Пристрій складається із 2000 елементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність відказу кожного елемента дорівнює 0,002. Знайти ймовірність відказу принаймні одного елемента.

1.83. Імовірність того, що під час сортування скляний виріб буде розбито, дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що із 1500 виробів при сортуванні буде розбито 4.

1.84. Деталі 1-го сорту становлять у середньому 2/3 усіх деталей, що їх виготовляє верстат-автомат. Навмання взято 300 деталей. Знайти ймовірність того, що серед них буде від 190 до 210 деталей 1-го сорту.

1.85. Нестандартних виробів автомат штампує в середньому у 9 раз менше, ніж стандартних. Із продукції цього автомата навмання взято 200 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них від 170 до 185 стандартних виробів.

1.86. У результаті автоматичного штампування заготівок виходить 10 % браку. Узято навмання 300 заготівок. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих заготівок відхилиться від найімовірнішої кількості бракованих заготівок не більш ніж на шість.

1.87. Частка 1-го сорту в деякій продукції в середньому становить 80 %. Скільки примірників цієї продукції треба взяти, щоб з імовірністю 0,9 можна було стверджувати, що в партії буде не менш як 75 примірників 1-го сорту?

1.88. Обстежується 500 проб руди. Імовірність промислового вмісту металу в кожній пробі дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що кількість проб із промисловим вмістом металу буде в межах від 300 до 370.

1.89. Автоматичне штампування металевих клем для з'єднання пластин дає в середньому 12 % відхилень від установленого стандарту. Знайти ймовірність того, що в партії із 600 клем відхилення відносної частоти появи нестандартних клем від імовірності їх появи не перевищить 0,02.

1.90. На кожні 30 виготовлених деталей припадає в середньому 20 деталей 1-го сорту. Із продукції вибирається партія з 900 деталей. У яких межах може міститися відносна частота появи деталі 1-го сорту, якщо відхилення її від імовірності потрібно гарантувати з імовірністю 0,95? Визначити також межі частоти для деталей 1-го сорту.

1.91. Проводяться n незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A настає зі сталою ймовірністю $p = 0{,}8$.

1) Знайти імовірність того, що в 625 випробуваннях відносна частота відхилиться від імовірності не більш ніж на 0,03.

2) Скільки потрібно провести випробувань, щоб з імовірністю 0,9 гарантувати, що відхилення відносної частоти від імовірності настання події A не перевищить 0,01?

3) У яких межах може міститися відносна частота настання події A в 1000 випробуваннях, якщо відхилення відносної частоти від імовірності настання події A в одному випробуванні потрібно гарантувати з імовірністю 0,7?

1.92. На трьох верстатах-автоматах виготовляються однакові деталі. Перший верстат дає 5 % браку, другий — 7 %, третій — 9 %. Із продукції кожного верстата навмання взято по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед них виявилось:

1) 0, 1, 2, 3 придатних;

2) принаймні одна деталь придатна;

3) принаймні одна деталь бракована.

1.93. Пристрій складається із 4 елементів, які працюють незалежно. Імовірність відказу кожного з елементів протягом зміни відповідно дорівнює 0,1, 0,2, 0,3, 0,4. Знайти ймовірність того, що упродовж зміни не буде відказу жодного елемента; відкажуть 1, 2, 3, 4 елементи.

Розділ 2

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

2.1. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ І ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Випадковою називається величина, яка може набувати різних числових значень. Строгіше означення випадкової величини пов'язане з поняттям простору елементарних подій. Нехай задано простір елементарних подій Ω. Однозначна числова функція $X = f(\Omega)$, яку задано на просторі елементарних подій, називається ***випадковою величиною***. Якщо простір Ω дискретний, то випадкова величина ***дискретна***. Неперервному простору елементарних подій відповідає ***неперервна випадкова величина***.

Співвідношення між значеннями випадкової величини і їхніми ймовірностями називається ***законом розподілу випадкової величини***.

Для дискретних випадкових величин закони розподілу можуть задаватися множиною значень, що їх набуває випадкова величина, і ймовірностями цих значень.

Якщо $p_i = P(X = x_i)$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, або, якщо величина набуває зліченної множини значень, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Закони розподілу дискретних випадкових величин задаються у табличній формі (подаються значення випадкової величини і їхні ймовірності), аналітичній (наводиться формула, за якою обчислюються ймовірності для заданих значень випадкової величини), графічній (у прямокутній системі координат задається набір точок $(x_i; p_i)$; сполучивши точки відрізками прямих, дістанемо многокутник розподілу ймовірностей). Універсальним способом задання закону розподілу ймовірностей є ***функція розподілу*** $F(x) = P(X < x)$. Для дискретних величин $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p(x_i)$.

Функція розподілу — неспадна, неперервна зліва, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$. Для довільних α і β $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Якщо X — неперервна випадкова величина, то $F(x)$ — неперервна і диференційована; її похідна $f(x) = F'(x)$ називається ***щільністю розподілу ймовірностей***. При цьому $f(x)$ — невід'ємна функція, для якої $P(\alpha \le X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Математичним сподіванням, або середнім значенням, MX випадкової величини, називається ряд $\sum_i x_i p_i$ (для дискретних випадкових величин) і інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ (для неперервних випадкових величин), якщо вони абсолютно збіжні. Математичне сподівання має такі властивості:

1) $MC = C$ (C — стала);
2) $MCX = CMX$;
3) $M(X + Y) = MX + MY$;
4) $MXY = MX \cdot MY$, якщо X і Y — незалежні випадкові величини.

Дисперсія (позначається через DX) випадкової величини X визначається за формулою:

$$DX = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2.$$

Основні властивості дисперсії:

1) $DC = 0$;
2) $DCX = C^2 DX$;
3) $D(X + Y) = DX + DY$, якщо випадкові величини незалежні.

Середнє квадратичне відхилення (позначається літерою σ) є квадратним коренем із дисперсії.

Якщо від випадкової величини віднімемо її математичне сподівання, то дістанемо центровану випадкову величину, математичне сподівання якої дорівнює нулю. Ділення випадкової величини на її середнє квадратичне відхилення називається ***нормуванням*** цієї випадкової величини.

Випадкова величина $X^* = \dfrac{X - MX}{\sigma}$ має нульове математичне сподівання й одиничну дисперсію.

Початковий, центральний і абсолютний початковий моменти порядку k величини X визначають відповідно за такими формулами:

$$\upsilon_k = MX^k,\ \mu_k = M\left(X - MX\right)^k,\ \alpha_k = M\left|X\right|^k.$$

Якщо існує початковий абсолютний момент порядку k, то існують усі моменти нижчих порядків.

Медіаною (Me) випадкової величини є X будь-який корінь рівняння $F(x) = 0{,}5$.

Мода дискретної величини (MO) — це таке її значення, імовірність якого найбільша.

Модою неперервного розподілу є значення випадкової величини, за якого щільність розподілу має максимум.

Асиметрія випадкової величини визначається за формулою:

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Ексцес випадкової величини обчислюють за формулою:

$$Ek = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Маємо 4 заготівки для виготовлення деталей. Ймовірність виготовлення придатної деталі дорівнює 0,75. Знайти закон розподілу випадкової величини X — кількість заготівок, що їх буде використано для виготовлення придатної деталі. Знайти MX і DX, а також імовірність того, що із цих заготівок буде виготовлено стандартну деталь.

Розв’язання. Подамо закон розподілу для випадкової величини X у табличній формі. Очевидно, що випадкова величина може набувати значень 1, 2, 3, 4. Значення $X = 1$, буде тоді, коли з першої заготівки виготовлено стандартну деталь, а ймовірність цього дорівнює 0,75. Випадкова величина набуває значення 2, якщо з першої заготівки виготовлено браковану деталь, а з другої — придатну. За теоремою множення імовірностей ймовірність цієї події $P(X = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$. Аналогічно, $X = 3$, якщо деталі, виготовлені з першої та другої заготівок, браковані, а деталь, яку виготовлено з третьої заготівки — придатна. $P(X = 3) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$.

Нарешті, $X = 4$, якщо деталі, виготовлені з перших трьох заготівок, браковані. $P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$. Запишемо закон розподілу:

x_i	1	2	3	4
$p(x_i)$	0,75	0,1875	0,046875	0,15625

Легко перевірити, що сума ймовірностей у законі розподілу дорівнює 1. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини за наведеними щойно формулами.

$$MX = 1\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{64}+4\cdot\frac{1}{64}=\frac{85}{64};$$

$$MX^2 = 1\cdot\frac{3}{4}+4\cdot\frac{3}{16}+9\cdot\frac{3}{64}+16\cdot\frac{1}{64}=\frac{139}{64};$$

$$DX=\frac{139}{64}-\left(\frac{85}{64}\right)^2=\frac{1671}{4096}.$$

Якщо подія A — «із чотирьох заготівок виготовлено одну придатну деталь», то

$$P(A)=1-\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{255}{256}.$$

Приклад 2. Задано функцію

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1;\\ ax^2+bx, \text{ якщо } 1<x\le 4;\\ 1, \text{ якщо } x>4.\end{cases}$$

Довести, що можна дібрати такі значення a і b, при яких $F(x)$ буде функцією розподілу ймовірностей випадкової величини X. Знайти $P(2\le X<3)$.

Розв'язання. Щоб знайти a і b, скористаємося неперервністю функції розподілу в точках $x = 1$ і $x = 4$. Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}a+b=0,\\ 16a+4b=1.\end{cases}\quad \begin{cases}a=-b,\\ 16b+4b=1.\end{cases}\quad \begin{cases}b=-\frac{1}{12},\\ a=\frac{1}{12.}\end{cases}$$

Отже, $F(x)=\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{12}x$, якщо $x\in(1;\ 4]$ Доведемо, що на цьому проміжку функція монотонно зростає. Відшукуємо похідну функції: $F'(x)=\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}$. Похідна дорівнює нулю при $x=\frac{1}{2}$. На проміжку $(0;4)$ похідна функції $F(x)$ додатна, а значить, ця функція зростає. Отже, $F(x)$ задає закон розподілу випадкової величини X. Обчислюємо ймовірність:

$$P(2\le X<3)=F(3)-F(2)=\frac{1}{12}\cdot 9-\frac{1}{12}\cdot 3-\frac{1}{12}\cdot 4+\frac{1}{12}\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

Приклад 3. Випадкову величину X задано на інтервалі $(a;4)$ зі щільністю розподілу $f(x)=Ax^2$. Знайти a і A, якщо $MX=0$.

Розв'язання. Невідомі значення двох параметрів. Тому потрібно скласти систему двох рівнянь, до яких вони входять. Скориставшись властивістю щільності розподілу і означенням математичного сподівання, дістанемо:

$$\begin{cases}\int\limits_a^4 Ax^2dx=1,\\ \int\limits_a^4 Ax^3dx=0.\end{cases}$$

Другий інтеграл узято від непарної функції. Він може дорівнювати нулю, якщо $a=\pm4$. Очевидно, що $a=-4$. Із першого рівняння знаходимо A:

$$A\frac{x^3}{3}\Big|_{-4}^{4}=1;\ A\left(\frac{64}{3}+\frac{64}{3}\right)=1;\ A=\frac{3}{128}.$$

Приклад 4. Графік щільності розподілу ймовірностей — трикутник ABC. Вершина B лежить на осі ординат, координати інших вершин $A(-2;\ 0)$, $C(4;\ 0)$. Знайти аналітичний вираз для щільності розподілу ймовірностей, MX, DX, $F(x)$ і $P(-1\le X<2)$.

Розв'язання. Використаємо властивість щільності розподілу ймовірностей $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$ і геометричний зміст визначеного інтеграла. Площа трикутника ABC дорівнює 1. Висоту трикутника h = OB знайдемо за формулою: $S=\frac{ah}{2}$; отже, $6h$ = 2, $h=\frac{1}{3}$. Запишемо рівняння прямих у відрізках:

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{3}}+\frac{x}{-2}=1;\ \ f(x)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{2}\right);\ \ \frac{f(x)}{\frac{1}{3}}+\frac{x}{4}=1;\ \ f(x)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{4}\right).$$

Аналітичний вираз для щільності розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le -2; \\ \frac{1}{6}(2+x), & \text{якщо } -2<x\le 0; \\ \frac{1}{12}(4-x), & \text{якщо } 0<x\le 4; \\ 0, & \text{якщо } x>4. \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання:

$$MX=\int_{-2}^{0}\frac{1}{6}x(2+x)dx+\int_{0}^{4}\frac{1}{12}x(4-x)dx=\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{18}x^3\right)\Big|_{-2}^{0}+$$

$$+\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{36}\right)\Big|_{0}^{4}=-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{3}-\frac{16}{9}=\frac{2}{3}.$$

Для обчислення дисперсії скористаємося формулою $DX=MX^2-(MX)^2$:

$$MX^2=\int_{-2}^{0}\frac{1}{6}x^2(2+x)dx+\int_{0}^{4}\frac{1}{12}x^2(4-x)dx=\left(\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{24}x^4\right)\Big|_{-2}^{0}+$$

$$+\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{48}x^4\right)\Big|_{0}^{4}=\frac{8}{9}-\frac{2}{3}+\frac{64}{9}-\frac{16}{3}=2.$$ Тоді $DX=2-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$.

Функцію розподілу $F(x)$ знайдемо за формулою $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$. Щільність розподілу має кілька аналітичних виразів. Стільки ж аналітичних виразів матиме й функція розподілу.

Якщо $x\le 2$, то $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\cdot dt=0$.

Якщо $-2 < x \le 0$, то $F(x) = F(-2) + \int\limits_{-2}^{x} \frac{1}{6}(2+t)dt = 0 + \frac{1}{12}(2+t)^2 |_{-2}^{x} =$

$= \frac{(2+x)^2}{12}$.

Якщо $0 < x \le 4$, то $F(x) = F(0) + \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{12}(4-t)dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{24}(4-t)^2 |_{0}^{x} =$

$= \frac{1}{3} - \frac{(4-x)^2}{24}$.

І, нарешті, якщо $x > 4$, то $F(x) = F(4) + \int\limits_{4}^{x} 0 \cdot dt = 1$.

$$\text{Отже, } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -2; \\ \frac{1}{12}(2+x)^2, & \text{якщо } -2 < x \le 0; \\ 1 - \frac{1}{24}(4-x)^2, & \text{якщо } 0 < x \le 4; \\ 1, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

Щоразу, обчислюючи вираз для функції розподілу, брали значення функції на лівій межі інтервалу.

Для обчислення ймовірності скористаємося функцією розподілу:

$$P(-1 \le X < 2) = F(2) - F(-1) = 1 - \frac{1}{24}(4-2)^2 - \frac{1}{12}(2-1)^2 = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{3}{4}.$$

Вправи для самостійного розв’язування

2.1. Для виготовлення деталей використовуються труби завдовжки 4, 5 і 6 м. При цьому половина труб поставляється завдовжки 6 м, а труб завдовжки 4 і 5 м надходить однакова кількість. Знайти закон розподілу кількості заготівок завдовжки 0,5 м, утворених із навмання взятої труби. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини.

Розв’язати цю задачу для випадку, коли навмання беруться дві труби.

2.2. Імовірність того, що деталь, яку виготовив верстат-автомат, належить до 1-го сорту, ставить 0,8. Робітник періодично перевіряє якість кожної виготовленої деталі, але щоразу не більше як чотирьох деталей. Якщо деталь 2-го сорту, то верстат зупиняють для регулювання. Скласти закон розподілу кількості перевірених деталей в одній серії спостережень. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї величини.

2.3. Вагони з вантажем можуть прибути на станцію протягом доби. Якщо організувати чергування на N розвантажувальних майданчиках способом A, то середня кількість своєчасно розвантажених вагонів становитиме Np. У разі організації чергування способом B буде своєчасно вивантажено $N(1-(1-p)^2)$ вагонів, якщо вони надійдуть у першу половину доби, Np вагонів, якщо вони надійдуть у третю чверть доби, і $0{,}5Np$, якщо вони надійдуть в останню її чверть. При якому значенні p доцільно організувати чергування за схемою B?

2.4. Визначити ціну лотерейного білета, за якої забезпечується прибуток від лотереї, що дорівнює третині суми, одержаної від реалізації білетів, якщо на кожні 100 з них установлено один виграш у 100 грн, два — по 20 грн і чотири — по 10 грн.

2.5. Дискретну випадкову величину X задано такою функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ 0{,}3, & \text{якщо } 0<x\le 2;\\ 0{,}4, & \text{якщо } 2<x\le 3;\\ 0{,}7, & \text{якщо } 3<x\le 4;\\ 1, & \text{якщо } x>4.\end{cases}$$

Знайти закон розподілу X у табличній формі.

2.6. Задано функцію $F(x)=a\sin x+b\cos x+0{,}5$. Довести, що коли $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, то можна знайти a і b, такі, що $F(x)$ — функція розподілу ймовірностей. Знайти ці значення та щільність розподілу $f(x)$.

2.7. Існує гіпотеза, що випадкова величина X має таку функцію розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ ax^2, & \text{якщо } 0<x\le 3;\\ 1, & \text{якщо } x>3.\end{cases}$$

У результаті чотирьох випробувань випадкова величина набувала значень, більших за 2. Чи відповідає цей результат висуненій гіпотезі, якщо рівень значущості дорівнює 0,005? Гіпотеза приймається, якщо ймовірність події більша за рівень значущості.

2.8. Випадкова величина *X* задається функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо } x\le 1,\\ a+b\cdot arctgx,\ \text{якщо } x>1.\end{cases}$$

Знайти $a,b,$ $P(2\le X<4), f(x)$ і медіану *Me*.

2.9. Випадкова величина *X* задається функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо }\ x<a,\\ bx^2-\dfrac{1}{3},\ \text{якщо }\ a<x\le 2,\\ 1,\ \text{якщо }\ x>2.\end{cases}$$

Знайти $a,b,$ $P(1{,}2\le X<1{,}5), f(x)$ і медіану *Me*.

2.10. Графік щільності розподілу — півколо з центром у початку координат. Знайти аналітичний вираз для $f(x)$, функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання *MX* та моду розподілу.

2.11. Графік щільності розподілу — півеліпс, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично щодо початку координат, а мала вісь у 4 рази менша за велику. Знайти аналітичний вираз для $f(x)$, *MX* та $F(x)$.

2.12. Графік щільності розподілу — ламана лінія *ABC*. Знайти аналітичний вираз для $f(x)$ і $F(x)$, якщо кут *ABC* прямий, точка *B* лежить на осі ординат, а точки *A* і *C* — на осі абсцис симетрично відносно початку координат.

2.13. Графік щільності розподілу — ламана лінія *ABC*. Точка $A(-2;\ 0)$, точка *C* лежить на осі абсцис, імовірність того, що випадкова величина невід'ємна, утричі більша за ймовірність того, що вона набуває від'ємних значень. Знайти аналітичний вираз для $f(x)$.

2.14. Випадкова величина *X* набуває значень на відрізку $[a;2]$, де задано щільність її розподілу $f(x)=Ax^2$. Визначити $a, A, F(x)$ і $D(x)$, якщо $MX=0$.

2.15. Випадкова величина *X* набуває значень на відрізку $[a;2]$, $f(x)=\dfrac{3}{16}x^{n+1}$, $MX=0$. Знайти a і $n(n\in N)$.

2.16. Випадкова величина X набуває значень на відрізку $[a;b]$, де задано щільність її розподілу $f(x)=\frac{3}{16}(x-c)^2$. Визначити a і b, якщо $f(a)=f(b)$ і $MX = 2$.

2.17. Випадкова величина X набуває значень на відрізку $[1;b]$, де задано щільність її розподілу $f(x)=A\ln x.$ Визначити A і b, якщо $MX=\frac{e^2+1}{4}$.

2.18. Випадкова величина X набуває значень на відрізку $[1;5]$, де $f(x)=AB^x$. Визначити A і B, якщо $MX=\frac{79\ln 2-15}{15\ln 2}$.

2.19. Щільність розподілу $f(x)$ — парна функція. Знайти $F(-1)$, якщо $F(1) = 0{,}8$.

2.2. НАЙВАЖЛИВІШІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ

У теорії ймовірностей часто застосовуються деякі закони розподілу випадкових величин. Розглянемо ці розподіли, а також задачі, де вони використовуються.

1. Біноміальний закон розподілу

Імовірності в цьому законі визначаються за формулою $P(X=m)=$ $=C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, m = 0,1,2, …, n. Закон справджується для схеми незалежних повторних випробувань, у кожному з яких подія A настає з імовірністю p. Частота настання події A має біноміальний закон розподілу. Числові характеристики розподілу:

$$MX = np,\ DX = np(1-p).$$

2. Закон розподілу Пуассона

Дискретна випадкова величина має розподіл Пуассона, якщо вона набуває зліченної множини значень $(m = 0,1,2,...)$ з імовірностями $P(X=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a},(a>0)$. Цей розподіл описує кількість подій, які настають в однакові проміжки часу за умови, що ці події відбуваються незалежно одна від одної зі сталою інтенсивністю. Розподіл Пуассона розглядається як статистична модель для кількості альфа-частинок, що їх випромінює радіоактивне джерело за певний проміжок часу; кількості викликів, які надходять на телефонну станцію за певний період доби; кількості вимог щодо виплати страхових сум за рік; кількості дефектів на однакових пробах речовини і т. ін. Розподіл застосовується в задачах статистичного контролю якості, у теорії надійності, теорії масового обслуговування. Математичне сподівання і дисперсія в цьому розподілі однакові і дорівнюють a. Для цього розподілу складено таблиці щодо різних значень a (0,1 – 20). У таблицях для відповідних значень a наведено ймовірності $P(X = m)$ і $P(X \geq m)$.

Якщо у схемі незалежних повторних випробувань n велике і p або $1 - p$ прямують до нуля, то біноміальний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, коли $a = np$.

3. Геометричний розподіл

Закон подається формулою: $P(X = m) = p(1 - p)^{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$.

Геометричний закон розподілу має частота настання події у схемі незалежних повторних випробувань, якщо вони проводяться до першого настання події. У формулі p — імовірність настання події в кожному випробуванні. Геометричний закон розподілу застосовується у задачах статистичного контролю якості і теорії надійності. Числові характеристики розподілу: $MX = \frac{1}{p}$, $DX = \frac{1-p}{p^2}$.

4. Гіпергеометричний розподіл

Гіпергеометричний розподіл описує ймовірність настання m успішних результатів у n випробуваннях, якщо значення n мале порівняно з обсягом сукупності N:

$$P(X = m) = \frac{C_k^m \cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0,1,2,\ldots,n; \; k \geq n.$$

Наприклад, імовірність того, що з n деталей, які випадково вибрано з партії обсягом N, m виявляться дефектними, має гіпергеометричний закон розподілу (k — кількість дефектних деталей у партії). Цей закон розподілу застосовується в задачах статистичного контролю якості та в суміжних галузях. Числові характеристики розподілу:

$$MX = \frac{kn}{N},\ DX = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Зі зменшенням відношення $\frac{n}{N}$ гіпергеометричний розподіл наближається до біноміального з параметрами n і $p = \frac{k}{N}$. Дуже часто гіпергеометричний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, якщо $a = \frac{nk}{N}$.

5. Рівномірний закон розподілу

Якщо ймовірність потрапляння випадкової величини на інтервал пропорційна до довжини інтервалу і не залежить від розташування інтервалу на осі, то вона має рівномірний закон розподілу. Щільність такого розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } a < x \le b; \\ 0, & \text{якщо } x > b. \end{cases}$$

Рівномірний закон розподілу легко моделювати. За допомогою функціональних перетворень із величин, розподілених рівномірно, можна діставати величини з довільним законом розподілу. Числові характеристики розподілу:

$$MX = \frac{a+b}{2},\ DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

6. Показниковий закон розподілу

Щільність розподілу випадкової величини, розподіленої за показниковим законом, задається формулою:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ ae^{-ax}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Випадкові величини з таким законом розподілу широко застосовуються в задачах з теорії надійності та теорії масового обслуговування. Числові характеристики:

$$MX = \frac{1}{a},\ DX = \frac{1}{a^2}.$$

7. Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу задається щільністю $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Параметри a і σ, які входять до виразу щільності розподілу, є відповідно математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням випадкової величини. Нормальний закон розподілу широко застосовується в математичній статистиці. Для обчислення ймовірності потрапляння випадкової величини, розподіленої нормально, на проміжок використовується функція Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$$P(\alpha \le X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Часто застосовується також формула:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. У цеху є 5 верстатів. Імовірність того, що верстат працює, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що працюватимуть не менш як 3 верстати.

Розв'язання. Імовірність того, що працює будь-який верстат, дорівнює 0,8. Тому справджується біноміальний закон розподілу: $P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},\ m = 0,1,2,\ldots,n;$

$$P(X \ge 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5).$$

Зазначені ймовірності знайдемо за наведеною щойно формулою.

$$P(X \geq 3) = C_5^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + C_5^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^5 =$$
$$= 0{,}2048 + 0{,}4096 + 0{,}32768 = 0{,}94208.$$

Приклад 2. Визначити ймовірність потрапляння за контрольні межі не менш ніж 2 деталей із проби з 5 деталей, якщо автомат, із продукції якого беруться проби, обробляє 2 деталі за 1 хв і за зміну у його продукції виявляється 38 деталей, які виходять за контрольні межі. Застосувати для розв'язування задачі закон розподілу Пуассона.

Розв'язання. Застосуємо формулу розподілу Пуассона: $P(X = m) = \dfrac{(\lambda t)^m}{m!}$, $m = 0,1,\ldots$ Знайдемо λ — середню кількість бракованих деталей, які виготовляються за 1 хв. Якщо тривалість зміни 480 хв, то $\lambda = \dfrac{38}{480} \approx 0{,}08.$ Пробу з 5 деталей виготовляють за $t = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$ хв, $\lambda t = 0{,}08 \cdot 2{,}5 = 0{,}2.$ Знайдемо шукану ймовірність: $P(X \geq 2) = \sum\limits_{m=2}^{5} \dfrac{(\lambda t)^m}{m!} = 0{,}0175.$ Значення ймовірності знайдемо в таблицях при $\lambda t = 0{,}8$ і $m = 2.$

Приклад 3. Постачальник поставляє замовникові партії деталей обсягом 10000 шт. кожна. Замовник вважає бажаним бракувати партії, в яких 2 % браку з імовірністю не менш як 0,98. Постачальник хотів би, щоб при цьому партії з 0,5 % браку приймались би з ймовірністю не менш ніж 0,93. Визначити обсяг вибірки *n* і кількість бракованих деталей, за якої партія бракується. Скористатися для розв'язування задачі розподілом Пуассона.

Розв'язання. Нехай для контролю відібрано *n* деталей. Якщо в партії 2 % бракованих деталей, то параметр $a_1 = 0{,}02n,$ якщо у партії 0,5 % бракованих деталей, то $a_2 = 0{,}005n.$ При конкретному значенні *n* маємо деяке значення $a_1.$ Відшукуємо за таблицями значення *C*, при якому $\sum\limits_{m=c}^{\infty} \dfrac{a_1^m}{m!} e^{-a_1} \geq 0{,}98.$ Перевіряємо, чи буде при знайденому значенні C партія, в якій 0,5 % бракованих деталей, прийматися з імовірністю не менш як 0,93. Для цього шукаємо $P(X \ge C) = \sum_{m=c}^{\infty} \frac{a_2{}^m}{m!}$ — імовірність відхилення партії. Віднявши від одиниці цю ймовірність, дістанемо ймовірність прийняття партії, в якій 0,5 % бракованих деталей. Якщо вона не менш як 0,93, то значення n і C забезпечують виконання умов задачі. Розв'язуючи задачу, бажано, щоб n було якомога меншим. Тому послідовно розглядаємо значення n і вибираємо серед них найменше.

Нехай n = 600, тоді $a_1 = 12,\ a_2 = 3.$ Згідно з таблицями при $a_1 = 12$, С = 6, $P(X \ge 6) = 0{,}97966 \approx 0{,}98.$ При $a_2 = 3$ $P(X \ge 6) =$ $= 0{,}083918,$ тобто ймовірність прийняття партії, в якій 0,5 % браку, становить 0,916082, що менше за 0,93. Значення n треба збільшити.

Нехай n = 800, тоді $a_1 = 16,\ a_2 = 4.$ Значення C = 9. В тому разі партія з 0,5 % браку приймається з імовірністю 0,978637. Отже, значення обсягу вибірки можна зменшити.

Нехай n = 700, тоді $a_1 = 14,\ a_2 = 3{,}5.$ Значення C = 7. В такому разі партія з 0,5 % браку приймається з імовірністю 0,93471.

Отже, обсяг вибірки n = 700. В такому разі партія відхиляється, якщо серед вибраних деталей буде не менш як 7 бракованих деталей.

Приклад 4. При виготовленні довільного виробу інструмент з імовірністю p = 0,2 може бути пошкодженим і потребуватиме заміни. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості виробів, які будуть виготовлені цим інструментом.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X — кількість деталей, виготовлених до заміни цим інструментом. Ця випадкова величина може набувати значень 0, 1, 2, …. Побудуємо закон розподілу цієї величини. Вона набуває значення, що дорівнює нулю, якщо при виготовленні першого виробу інструмент буде пошкоджено; $P(X = 0) = p = 0{,}2.$ Якщо інструмент буде пошкоджено при виготовленні другого виробу, то X = 1; $P(X = 1) = p(1 - p).$ Аналогічно $P(X = 2) = p(1 - p)^2,$ $P(x = 3) = p(1 - p)^3,\ \ldots,$ $P(X = k) = p(1 - p)^k,\ldots.$ Для обчислення математичного сподівання і дисперсії зіставимо здобутий закон розподілу з геометричним законом розподілу $P(Y = m) = p(1 - p)^{m-1},\ m = 1,2,\ldots.$ Очевидно, що $X = Y - 1.$ Скориставшись властивостями математичного сподівання та дисперсії, дістанемо:

$$MX = M(Y-1) = MY - 1 = \frac{1}{p} - 1 = 5 - 1 = 4.$$

$$DX = D(Y-1) = DY = \frac{1-p}{p^2} = 20.$$

Приклад 5. Партія містить 200 виробів, серед яких 25 бракованих. Для перевірки якості з партії відібрали 10 виробів. Якщо при цьому кількість бракованих виробів не перевищує одиниці, то партія приймається. Знайти ймовірність того, що партію буде прийнято. Визначити цю саму ймовірність, якщо апроксимувати гіпергеометричний розподіл біноміальним розподілом і законом розподілу Пуассона.

Розв'язання. Застосуємо формулу гіпергеометричного закону розподілу. Партію буде прийнято, якщо кількість бракованих серед дібраних 10 дорівнюватиме нулю або одиниці.

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{C_{175}^{10}}{C_{200}^{10}} + \frac{C_{25}^{1} \cdot C_{175}^{9}}{C_{200}^{10}} \approx 0{,}638.$$

Обчислимо цю саму ймовірність за допомогою формули біноміального закону розподілу, $p = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$:

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = \left(\frac{7}{8}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{9} \approx 0{,}639.$$

Обчислимо, нарешті, цю саму ймовірність за допомогою закону розподілу Пуассона:

$$a = np = 10 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}25.$$

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = e^{-1{,}25} + 1{,}25e^{-1{,}25} \approx 0{,}644.$$

Як бачимо, похибки обчислення в разі апроксимації гіпергеометричного розподілу порівняно невеликі.

Приклад 6. Випадкова величина X розподілена рівномірно. Знайти щільність її розподілу, якщо $P(X \ge 3) = 0{,}4$, а $MX = 2$.

Розв'язання. Щільність рівномірного розподілу $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$. Отже, потрібно визначити область зміни випадкової величини. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\int\limits_3^b \dfrac{1}{b-a}dx=0{,}4;\\ \int\limits_a^b \dfrac{x}{b-a}dx=2.\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{b-3}{b-a}=0{,}4;\\ \dfrac{a+b}{2}=2.\end{cases}\quad \begin{cases}0{,}6b+0{,}4a=3;\\ b=4-a.\end{cases}\quad b=7,\ a=-3.$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le -3;\\ 0{,}1, & \text{якщо } -3<x\le 7;\\ 0, & \text{якщо } x>7.\end{cases}$$

Приклад 7. Випадкова величина розподілена показниково з параметром a. При якому значенні параметра ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок $[\alpha;\beta]$ буде найбільшою?

Розв'язання. Нехай параметр a — неперервна й диференційована величина. Знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок і дослідимо здобуту функцію на екстремум:

$$P(\alpha\le X<\beta)=\int\limits_\alpha^\beta ae^{-ax}dx=e^{-a\alpha}-e^{-a\beta};\ P(a)=e^{-a\alpha}-e^{-a\beta};\ P'(a)=-\alpha e^{-a\alpha}+$$

$$+\beta e^{-a\beta};\ -\alpha e^{-a\alpha}+\beta e^{-a\beta}=0;\ \beta e^{-a\beta}=\alpha e^{-a\alpha};\ \ln\beta-a\beta=\ln\alpha-a\alpha;\ a=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Покажемо, що при даному значенні a досягається максимум $P(a)$. Знайдемо другу похідну:

$$P''(a)=\alpha^2e^{-a\alpha}-\beta^2e^{-a\beta};\ P''\left(\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\alpha^2e^{-\alpha\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}}-\beta^2e^{-\beta\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}}=$$

$$=\alpha^2e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}-\beta^2e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}=\alpha^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}-\beta^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}=\alpha\frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}-\beta\frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}=$$

$= \dfrac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}(\alpha-\beta) < 0,$ оскільки $\alpha < \beta.$ Друга похідна у критичній точці від'ємна, тому $P(a)$ в ній досягає максимуму.

Приклад 8. Висунуто гіпотезу про те, що відхилення розміру деталі від номіналу є випадковою нормально розподіленою величиною з $MX = 0$ і $DX = 25$ мкм^2. Чи відповідає заданій гіпотезі те, що в перевірених 6 деталей відхилення належало проміжку $[5;13)$? Рівень значущості $\alpha = 0{,}0005$.

Розв'язання. Розглянемо подію A — «відхилення в 6 деталей належить проміжку $[5;13)$». Обчислимо ймовірність цієї події і зіставимо її з рівнем значущості α. Якщо ймовірність буде меншою за α, то результат випробування не відповідатиме висунутій гіпотезі. Імовірність події A знайдемо за теоремою множення ймовірностей:

$$P(A) = p^6, \text{ де } p = P(5 \le X < 13).$$

Обчислимо цю ймовірність:

$$P(5 \le X < 13) = \Phi\left(\frac{13-0}{5}\right) - \Phi\left(\frac{5-0}{5}\right) = \Phi(2{,}6) - \Phi(1) = 0{,}4953 - 0{,}3413 = 0{,}154.$$

Тоді $P(A) = 0{,}154^6 < 0{,}2^6 = 0{,}000064.$ Імовірність події A менша від рівня значущості. Отже, гіпотеза про закон розподілу не відповідає значенням випадкової величини у випробуваннях.

Приклад 9. Похибка спостереження X при вимірюванні довжини розподілена нормально з $a = 5$ мм і $\sigma = 4$ мм. Знайти ймовірність того, що виміряне значення відхилиться від істинного більш ніж на 10 мм.

Розв'язання. Згідно з умовою потрібно знайти $P(|X| \ge 10)$. Виразимо цю ймовірність через ймовірність протилежної події:

$$P(|X| \ge 10) = 1 - P(|X| < 10) = 1 - P(-10 < X < 10) = 1 - \Phi\left(\frac{10-5}{4}\right) +$$

$$+ \Phi\left(\frac{-10-5}{4}\right) = 1 - \Phi(1{,}25) - \Phi(3{,}75) = 1 - 0{,}3944 - 0{,}4999 = 0{,}1057.$$

Вправи для самостійного розв'язування

2.20. Брак при виготовленні деталей становить у середньому 5 %. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання взятих деталей: а) не виявиться жодної бракованої; б) буде дві браковані деталі.

2.21. На регістр ЕОМ надходить команда щодо округлення числа у більший чи менший бік до найближчого цілого числа. Знайти ймовірність того, що при обробці шести чисел половину буде округлено у більший , а половину — у менший бік.

2.22. Робітник обслуговує 6 однотипних верстатів. Імовірність того, що верстат потрібно обслуговувати протягом часу T, дорівнює $\frac{1}{3}$.

Знайти ймовірність того, що за час T:

а) потрібно буде обслуговувати 3 верстати;

б) кількість вимог на обслуговування за час T буде від 2 до 5.

2.23. В електромережу ввімкнено 4 прилади, потужність кожного з них 660 Вт. Знайти ймовірність того, що мережу буде знеструмлено, якщо напруга в ній 220 В, запобіжник розрахований на 10 А і ймовірность для кожного приладу бути ввімкненим становить 0,5.

2.24. Імовірність відказу при випробуванні кожного приладу дорівнює 0,2. Скільки приладів треба випробувати, щоб з імовірністю не менш як 0,9 дістати не менш як 3 відкази?

2.25. За один цикл автомат виготовляє 10 деталей. За скільки циклів імовірність виготовлення принаймні однієї бракованої деталі буде не меншою за 0,8, коли ймовірність того, що довільна деталь бракована, становить 0,01?

2.26. У процесі роботи ЕОМ час від часу виникають збої. Середня кількість збоїв за добу дорівнює 3. Знайти ймовірності таких подій:

а) за дві доби не буде жодного збою;

б) за тиждень роботи буде не менш як 4 збої.

2.27. Імовірність виготовлення бракованого свердла дорівнює 0,02. Свердла пакуються в коробки по 100 штук. Знайти ймовірність того, що в коробці:

а) не буде бракованих свердел;

б) бракованих свердел буде не більш як три.

2.28. У деякій місцевості на кожні 100 кавунів припадає в середньому один, маса якого не менша за 10 кг. Знайти ймовірність того, що в партії із 400 кавунів буде:

а) 3 кавуни масою не менш як 10 кг;

б) не менш ніж 2 такі кавуни.

2.29. За певного типу зварювання в металі незалежно одна від одної утворюються тріщини, в середньому по дві на зварне з’єднання. Яка ймовірність того, що у зварному з’єднанні буде не більш як дві тріщини?

2.30. Партія виробів приймається, якщо дефектні деталі становлять не більш як 2 %. Скільки деталей треба випробувати для того, щоб партію, в якій 3 % дефектних деталей, не було прийнято з імовірністю $P > 0{,}95$, а партію, в якій 1 % дефектних деталей, було прийнято з імовірністю не менш як 0,95?

2.31. Верстат-автомат за нормального налагодження випускає браковану деталь з імовірністю 0,02. Переналагодження виконується після випуску першої бракованої деталі. Знайти математичне сподівання кількості деталей, виготовлених між двома переналагодженнями.

2.32. П’ять із шести космічних кораблів виводяться на орбіту без екіпажу. Якщо всі п’ять запусків будуть успішними, то останній корабель буде запущено з екіпажем. За якої ймовірності успішного запуску корабля ймовірність невдалого шостого запуску буде найбільшою? Знайти цю ймовірність.

2.33. Для контролю партії, що містить 1000 виробів, з неї роблять вибірку обсягом 50. Знайти ймовірність того, що у вибірці не буде бракованих деталей, якщо в цій партії 4 вироби браковані. Зіставити точне значення цієї ймовірності з наближеним, здобутим за формулою Пуассона.

2.34. Із партії обсягом 500 валів привода взято 50 з метою контролю діаметра. Із попередніх досліджень відомо, що в середньому 2 % валів браковані. Яка ймовірність того, що серед 50 вибраних валів буде не більш як один бракований?

2.35. Із партії, в якій 25 електронних ламп, вибрано для випробувань на довговічність 5 ламп. Партія приймається, якщо вийде із ладу не більш як одна з випробуваних ламп. Яка ймовірність того, що партію буде прийнято, якщо із 25 ламп 4 дефектні?

2.36. Час відправлення міжміського автобуса рівномірно розподілений на часовому проміжку від 0.00 до 20.00. Визначити ймовірність того, що пасажир, який прибув на станцію о 16.00, встигне на автобус.

2.37. Шкала секундоміра має ціну поділки 0,2 с. Яка ймовірність відлічити час за цим секундоміром із похибкою, більшою за 0,04 с, якщо відлік здійснюється з точністю до цілої поділки з округленням у найближчий бік?

2.38. Випадкова величина X розподілена показниково. Яка з подій більш ймовірна: випадкова величина набула значення, більшого чи меншого за своє математичне сподівання?

2.39. Час безперервної роботи автоматичного верстата розподіляється за показниковим законом. При якому значенні параметра a з ймовірністю не менше 0,98 буде гарантована неперервна робота верстата протягом 4 годин?

2.40. Час між двома збоями ЕОМ розподіляється показниково з параметром a. Щоб розв'язати деяку задачу, потрібна безвідказна робота ЕОМ протягом часу τ. Якщо в цей період буде збій, який виявиться наприкінці розв'язування задачі, то її доведеться розв'язувати заново. Знайти закон розподілу Y — часу, за який задачу буде розв'язано, і його математичне сподівання.

2.41. Вантажі із залізничної станції вивозять автомобілями за кільцевими маршрутами. Визначити вантажопідйомність автомобіля на маршруті MX, якщо обсяг перевезень розподіляється за показниковим законом, коли $a = 0{,}25$. Яка ймовірність того, що всі вантажі буде вивезено? Як зміниться ця ймовірність, якщо взяти вантажопідйомність автомобіля $q = MX + \sigma(X)$?

2.42. Технічними умовами передбачено, що довжина заготівки деякої деталі має бути між 24 і 25 см. Якщо довжина деталі розподіляється нормально з $a = 24{,}6\,\text{см}$ і $\sigma = 0{,}4\,\text{см}$, то яка частка заготівок матиме довжину, що виходить за межі, задані технічними умовами?

2.43. Визначити ймовірність того, що нормально розподілена величина потрапляє у проміжок $[\alpha;\beta)$, скориставшись таблицями функції $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$.

2.44. Відхилення розміру деталі від номіналу — нормально розподілена величина з нульовим математичним сподіванням та дисперсією, що дорівнює 36. Скільки потрібно виготовити деталей, аби з імовірністю не менш як 0,96 можна було стверджувати, що серед них буде принаймні одна придатна, коли допускаються відхилення розміру деталей від номіналу на проміжку $[-2;4)$?

2.45. Кульки для підшипників відбраковують таким способом. Якщо кулька проходить через отвір з $d = d_1$, але не проходить через отвір з $d = d_2$, то її розмір вважається допустимим. Діаметр кульки — нормально розподілена величина з $MX = \frac{d_1 + d_2}{2}$. Переналагодження обладнання виконують, якщо частка браку перевищує 10 %. Визначити допустимі межі для дисперсії.

2.46. Знайти зв'язок між центральним абсолютним моментом першого порядку нормально розподіленої величини та її середнім квадратичним відхиленням.

2.47. Випадкова величина розподілена нормально і має нульове математичне сподівання. Задано проміжок $[\alpha;\beta)$, який не містить початку координат. Визначити значення середнього квадратичного відхилення, при якому ймовірність потрапляння випадкової величини на заданий проміжок найбільша.

2.48. Завод виготовляє кульки для підшипників. Діаметр кульки — нормально розподілена величина з $MX = 10$ і $DX = 16$ мкм^2. Побудувати графік, що відбиває залежність між відхиленням і ймовірністю того, що фактичні розміри не перевищать заданих відхилень.

2.49. Розмір деталі — нормально розподілена величина з $MX = 10$. Деталь вважається стандартною, якщо її відхилення від математичного сподівання не перевищує 0,8. Побудувати графік залежності між значеннями σ і часткою (у відсотках) бракованих деталей.

2.3. ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОГО АРГУМЕНТУ. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Важливою задачею в теорії ймовірностей є визначення законів розподілу та числових характеристик функцій випадкових аргументів, закони розподілу яких відомі. Нехай X — дискретна випадкова величина, яку задано табличним законом розподілу.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Відомо, що $Y = \varphi(X)$, тоді закон розподілу Y має такий вигляд:

y_i	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	….	$\varphi(x_n)$
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Числові характеристики функції можна знайти за її законом розподілу або за формулами:

$$MY = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i ;\; DY = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi(x_1)\right)^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i\right)^2 .$$

Довільні моменти розподілу подаються аналогічними формулами:

$$\nu_k(Y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi(x_i)\right)^k p_i ;\; \mu_k(Y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi(x_i) - MY\right)^k p_i .$$

Якщо випадкові величини X і Y задано законами розподілу:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

y_j	y_1	y_2	…	y_m
q_j	q_1	q_2	…	q_m

і задано функцію $Z = \psi(X, Y)$, то закон її розподілу визначається так. Множина значень, що їх набуває Z, подається у вигляді: $\{z_{ij} = \psi(x_i, y_j)\}$, $i = 1,2,...,n;\, j = 1,2,...m$. При цьому

$$P\left(Z = z_{ij} = \psi(x_i, y_j)\right) = P\left((X = x_i) \bigcap (Y = y_j)\right) = p_i q_j .$$

Нехай X — неперервна випадкова величина, яку задано щільністю розподілу $f_1(x)$. Якщо $Y = \varphi(X)$ і φ — диференційована функція, монотонна в області значень X, то щільність розподілу цієї функції подається у вигляді $f(y) = f_1(\psi(y))\,|\psi'(y)|$, де ψ — функція, обернена до φ. Якщо φ — не монотонна функція в області зміни аргументу, то обернена функція неоднозначна і щільність розподілу $f(y)$ визначається як сума стількох доданків, скільки значень має обернена функція: $f(y) = \sum_{i=1}^{n} f_1(\psi_i(y))\,|\psi_i'(y)|$, де $\psi_i(y)$ — функції, обернені до φ.

Визначаючи числові характеристики функцій неперервних аргументів, операцію підсумовування, виконувану для дискретних величин, заміняють операцією інтегрування:

$$MY = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx ;\; DY = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx\right)^2 .$$

Приклади розв’язання задач

Приклад 1. Робітник обслуговує 4 верстати, які розміщено в одну лінію на відстані a один від одного. Знайти закон розподілу для випадкової величини Z — відстані, яку проходить робітник між двома обслуговуваннями, вважаючи, що події — «робітник перебуває біля будь-якого з верстатів» і «довільний верстат потребує обслуговування» — рівноможливі.

Розв’язання. Розглянемо випадкові величини: X — номер верстата, біля якого перебуває робітник; Y — номер верстата, який потребує обслуговування. Якщо верстати перенумерувати у тій послідовності, в якій їх розміщено (1, 2, 3, 4), то закони розподілу X і Y наберуть такого вигляду:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25

y_i	1	2	3	4
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25

При цьому $Z = a\left|X - Y\right|$. Складаючи закон розподілу Z, обчислимо значення функції для всіх можливих комбінацій значень X і Y. Таких комбінацій буде 16. Імовірності для всіх цих комбінацій однакові і дорівнюють $\frac{1}{16}$ (за теоремою множення ймовірностей).

z_i	0	a	$2a$	$3a$	a	0	a	$2a$	$2a$	a	0	a	$3a$	$2a$	a	0
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

У таблиці значення z_i повторюються. Складаємо нову таблицю, в якій такі значення запишемо один раз, а їхні ймовірності додамо.

z_i	0	a	$2a$	$3a$
p_i	0,25	0,375	0,25	0,125

Приклад 2. Кількість елементів ЕОМ, які виходять з ладу за деякий проміжок часу, розподілена за законом Пуассона з параметром a. Час ремонту машини залежить від кількості X елементів, які вийшли із ладу, і визначається за формулою $Y = T\left(1 - e^{-\gamma X}\right)$. Знайти математичне сподівання часу ремонту і збитків, пов'язаних із простоєм машини, якщо збитки пропорційні до квадрата часу ремонту: $S = kY^2 = kT^2\left(1 - e^{-\gamma X}\right)^2$.

Розв'язання. Випадкова величина X має такий закон розподілу: $P(X = m) = \dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$, m = 0, 1, …. Скориставшись формулою для знаходження математичних сподівань функцій випадкових аргументів дістанемо:

$$MY = \sum_{m=0}^{\infty} T\left(1 - e^{-\gamma m}\right)\frac{a^m}{m!}e^{-a} = Te^{-a}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!} - \sum\frac{\left(e^{-\gamma}a\right)^m}{m!}\right) =$$

$$= Te^{-a}\left(e^{a} - e^{ae^{-\gamma}}\right) = T\left(1 - e^{-a\left(1-e^{-\gamma}\right)}\right).$$

$$MS = \sum_{m=0}^{\infty} kT^2\left(1 - e^{-\lambda m}\right)^2\frac{a^m}{m!}e^{-a} =$$

$$= kT^2e^{-a}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!} - 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(ae^{-\gamma}\right)^m}{m!} + \sum\frac{\left(ae^{-2\gamma}\right)^m}{m!}\right) = kT^2\left(1 - 2e^{-a\left(1-e^{-\gamma}\right)} + e^{-a\left(1-e^{-2\gamma}\right)}\right).$$

Приклад 3. Випадкову величину X задано щільністю розподілу:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \dfrac{1}{2}, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ \dfrac{1}{3}x, & \text{якщо } 1 < x \le 2; \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(y)$, якщо $Y = X^2$.

Розв'язання. Дослідимо задану функцію на монотонність: $y' = 2x$, $2x = 0$, $x = 0$. Отже, критична точка міститься на мережі зміни X. Функція монотонно зростає в області зміни аргументу x. Тому можна застосувати формулу:

$$f(y) = f_1(\psi(y))|\psi'(y)|, \text{ де } x = \psi(y) = \sqrt{y},\ \psi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Щільність розподілу для X має два відмінні від нуля аналітичні вирази. Стільки ж виразів матиме і щільність розподілу Y.

Якщо $x \in (0; 1], y \in (0; 1]$, то $f_1(x) = \frac{1}{2},\ f(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}$.

Якщо $x \in (1; 2], y \in (1; 4]$, то $f_1(x) = \frac{1}{3}x,\ f(y) = \frac{1}{6}$.

Звідси маємо:

$$f(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y \le 0; \\ \dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & \text{якщо } 0 < y \le 1; \\ \dfrac{1}{6}, & \text{якщо } 1 < y \le 4; \\ 0, & \text{якщо } y > 4. \end{cases}$$

Приклад 4. Довести, що в результаті центрування та нормування нормально розподіленої випадкової величини дістанемо нормально розподілену випадкову величину з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X має щільність розподілу $f_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$; $Y = \frac{X-a}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{a}{\sigma}$.

Отже, центрування і нормування полягає в лінійному перетворенні випадкової величини. Лінійна функція завжди монотонна, тому скористаємося наведеною щойно формулою:

$$f(y) = f_1(\psi(y))|\psi'(y)|, \text{ де } x = \psi(y) = \sigma y + a,\ \psi'(y) = \sigma.$$

Маємо $f(y) = \dfrac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sigma y + a - a)^2}{2\sigma^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Знайдено щільність нормально розподіленої випадкової величини з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією, що й потрібно було довести.

Приклад 5. Швидкість обробки — випадкова величина X з напівнормальним законом розподілу:

$$f_1(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ x>0.$$

Знайти закон розподілу випадкової величини Y — часу, потрібного для обробки деталі, якщо сумарний час її обробки дорівнює A.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що $Y=\frac{A}{X}$. Ця функція монотонна при додатних значеннях X. Скориставшись тією самою формулою, яка застосовувалась у попередніх прикладах, дістанемо:

$$f(y)=f_1(\psi(y))|\psi'(y)|,\ \ x=\psi(y)=\frac{A}{y},\ \psi'(y)=-\frac{A}{y^2}.$$

$$f(y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{A^2}{2y^2\sigma^2}}\frac{A}{y^2}=\frac{2A}{\sigma\sqrt{2\pi}y^2}e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2y^2}}.$$

Оскільки область зміни Y — множина додатних чисел, то маємо:

$$f(y)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ \ y\le 0.\\ \dfrac{2A}{\sigma\sqrt{2\pi}y^2}e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2y^2}},\ \ \text{якщо}\ \ y>0.\end{cases}$$

Приклад 6. Тріщини всередині пластин листової сталі — відрізки прямої завдовжки a. Кут φ, утворюваний прямою, що проходить через тріщину, з прямою, яка перпендикулярна до сторони пластини, розподілений рівномірно на проміжку $(0;\pi]$. Знайти закон розподілу Y — ширини смуги, яка вирізується із бракованого металу.

Розв'язання. Для побудови графіка функції виконаємо рис. 2.1, з якого легко помітити, що $Y=a\sin\varphi$.

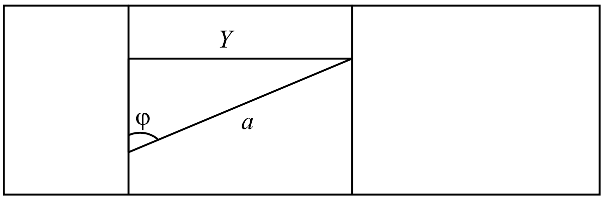

Рис. 2.1

Досліджуємо функцію на монотонність: $y' = a\cos\varphi$; $a\cos\varphi = 0$; $\varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z.$ Якщо $n = 0$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}.$ Отже, функція не монотонна. На проміжку $(0;\pi]$ функція набуває значень від 0 до a. Побудуємо її графік (рис. 2.2).

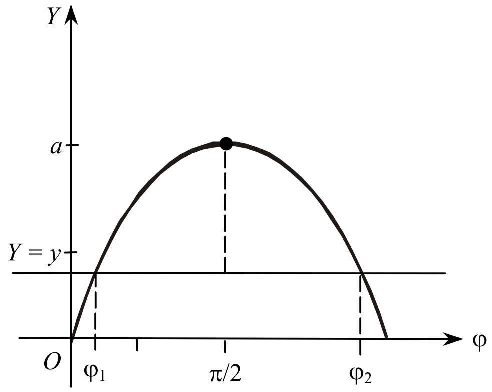

Рис. 2.2

Проведемо пряму $y = 0$ (це найменше значення функції) і уявимо, що вона переміщується в напрямі зростання y паралельно сама собі. При цьому пряма перетинає графік у двох точках. Тоді щільність розподілу $f(y)$ матиме єдиний аналітичний вираз, коли функція змінюється на проміжку $(0;a]$. Побудуємо функцію розподілу $F(y)$ при деякому значенні y, яке належить області зміни функції. Пряма $Y = y$ перетинає графік функції у точках $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = \varphi_2$. Звідси маємо:

$$F(y) = P(Y < y) = P(0 \le \varphi < \varphi_1) + P(\varphi_2 \le \varphi < \pi) = \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{\pi} d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\pi} \frac{1}{\pi} d\varphi.$$

Знайдемо значення φ_1 і φ_2. Із рівняння $y = a\sin\varphi$ знаходимо: $\varphi_1 = \arcsin\frac{y}{a}$, $\varphi_2 = \pi - \arcsin\frac{y}{a}$. Запишемо функцію розподілу $F(y)$, помінявши місцями у другому інтегралі межі інтегрування:

$$F(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\arcsin\frac{y}{a}} d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi-\arcsin\frac{y}{a}} d\varphi.$$

Знайдемо щільність розподілу $f(y)$ диференціюванням функції розподілу, застосувавши таку залежність: якщо $G(y) = \int_a^{\phi(y)} f(x)\,dx$, то $G'(y) = f(\phi(y))\,\phi'(y)$.

$$f(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}\frac{1}{a} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}\frac{1}{a} = \frac{2}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}.$$

Підінтегральна функція в інтегралах дорівнювала одиниці, тому їхні похідні дорівнювали похідним за верхньою межею інтегрування. Остаточно шукана щільність розподілу функції набуває вигляду:

$$f(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y \le 0; \\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}, & \text{якщо } 0 < y \le a; \\ 0, & \text{якщо } y > a. \end{cases}$$

Приклад 7. Випадкову величину X задано такою щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \dfrac{1}{5}, & \text{якщо } 0 < x \le 5; \\ 0, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

Знайти $f(y)$, якщо $Y = e^{X^2-4X}$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції. Для цього знайдемо похідну: $y' = e^{x^2-4x}(2x-4)$; $e^{x^2-4x}(2x-4) = 0; x = 2$. При переході через точку $x = 2$ похідна змінює знак з «мінуса» на «плюс», тому $x = 2$ — точка мінімуму; $y(2) = e^{-4}; y(0) = 1; y(5) = e^5$. Будуємо графік функції (рис. 2.3).

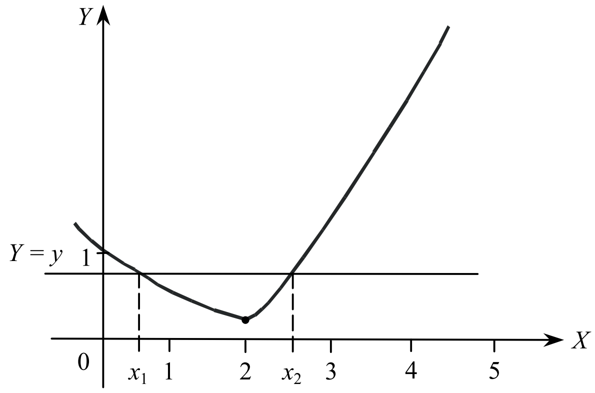

Рис. 2.3

Якщо $e^{-4} < y < 1$, пряма $Y = y$ перетинає графік функції в точках x_1 і x_2. Знаходимо функцію розподілу:

$$F(y) = P(Y < y) = P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{5}\int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{1}{5}\int_{a}^{x_2} dx - \frac{1}{5}\int_{a}^{x_1} dx.$$

Щоб виразити x_1 і x_2 через у, розв'яжемо рівняння $y = e^{x^2-4x}$ відносно x, попередньо прологарифмувавши обидві його частини:

$$\ln y = x^2 - 4x;\ x^2 - 4x - \ln y = 0;\ x_1 = 2 - \sqrt{4 + \ln y};\ x_2 = 2 + \sqrt{4 + \ln y}.$$

Підставляємо здобуті вирази у функцію розподілу:

$$F(y) = \frac{1}{5}\int_{a}^{2+\sqrt{4+\ln y}} dx - \frac{1}{5}\int_{a}^{2-\sqrt{4+\ln y}} dx.$$

Диференціюємо функцію розподілу:

$$f(y) = \frac{1}{5}\frac{1}{2y\sqrt{4+\ln y}} + \frac{1}{5}\frac{1}{2y\sqrt{4+\ln y}} = \frac{1}{5y\sqrt{4+\ln y}}.$$

Якщо $y \in (1, e^5]$, то функція монотонно зростає і $f(y) =$ $= f_1(\psi(y))|\psi'(y)|$; $\psi(y) = 2 + \sqrt{4 + \ln y}$; $\psi'(y) = \dfrac{1}{2y\sqrt{4 + \ln y}}$; $f(y) =$ $= \dfrac{1}{10y\sqrt{4 + \ln y}}$.

Отже, остаточна щільність розподілу набуває вигляду:

$$f(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y \le e^{-4}; \\ \dfrac{1}{5y\sqrt{4 + \ln y}}, & \text{якщо } e^{-4} < y \le 1; \\ \dfrac{1}{10y\sqrt{4 + \ln y}}, & \text{якщо } 1 < y \le e^5; \\ 0, & \text{якщо } y > e^5. \end{cases}$$

Приклад 9. Під час сортування сталевих кульок за їхніми розмірами до групи з номінальним розміром діаметра 10 мм потрапляють кульки, які проходять через отвір діаметром 10,1 мм, і ті, що не проходять через отвір діаметром 9,9 мм. Кульки виготовлені зі сталі, густина якої 7,85 г/см^3. Знайти математичне сподівання і дисперсію маси кульок, вважаючи розподіл діаметра кожної кульки в полі допуску рівномірним.

Розв'язання. Згідно з умовою щільність розподілу X — діаметра кульки:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0{,}99; \\ 50, & \text{якщо } 0{,}99 < x \le 1{,}01; \\ 0, & \text{якщо } x > 1{,}01. \end{cases}$$

Маса кульки $Y = \dfrac{\gamma \pi X^3}{6}$, де γ — густина сталі. Якщо $Y = \varphi(X)$, то математичне сподівання обчислюємо за формулою:

$$MY = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_1(x) dx.$$

Отже, $MY = \int_{0,99}^{1,01} \dfrac{25}{3} \gamma \pi x^3 dx = \dfrac{25}{12} 7{,}85 \pi x^4 \Big|_{0,99}^{1,01} \approx 4{,}11$ г.

Дисперсію обчислюємо так:

$$MY^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x))^2 f_1(x)dx,$$

звідки $MY^2 = \int_{0,99}^{1,01} \frac{25}{18}\gamma^2\pi^2x^6dx = \frac{25}{126}7{,}85^2\pi^2x^7 \Big|_{0,99}^{1,01} \approx 16{,}903;$

$$DY = 16{,}903 - (4{,}11)^2 \approx 0{,}0105.$$

Приклад 10. Знайти функціональне перетворення, за допомогою якого з послідовності випадкових величин, розподілених рівномірно на проміжку $(0;1]$, можна дістати послідовність величин, розподілених показниково з параметром a.

Розв'язання. Шукаємо монотонно зростаючу диференційовну функцію. Щоб визначити її, запишемо формулу для відшукання щільності $f(y)$ за даною щільністю $f_1(x)$:

$$f(y) = f_1(\psi(y))\psi'(y).$$

Згідно з умовою

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 1, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Тоді $f_1(\psi(y)) = 1;$ $f(y) = ae^{-ay};$ $x = \psi(y);$ $\psi'(y) = \frac{dx}{dy}.$ Дістали диференціальне рівняння $ae^{-ay} = \frac{dx}{dy}$. Розв'яжемо його:

$$dx = ae^{-ay}dy;\ x = \int ae^{-ay}dy + C;\ x = -e^{-ay} + C.$$

Розв'яжемо здобуте співвідношення відносно y:

$$Y = -\frac{1}{a}\ln(C - X).$$

Якщо $X = 0$, то й $Y = 0$. Тоді $C = 1$ і $Y = -\frac{1}{a}\ln(1 - X)$.

Знайдене перетворення дає змогу діставати з послідовності рівномірно розподілених на проміжку $(0,1]$ випадкових величин послідовність випадкових величин, розподілених показниково з параметром a.

Вправи для самостійного розв'язування

2.50. Робітник обслуговує 16 однотипних верстатів, розміщених у 4 ряди по 4 верстати в ряду. Відстань між рядами верстатів дорівнює b, а між верстатами — a. Події — «робітник перебуває біля довільного верстата» і «довільний верстат потребує обслуговування» — рівноможливі. Знайти математичне сподівання відстані, яку проходить робітник між двома обслуговуваннями.

2.51. Довести, що сума двох випадкових величин, розподілених за законом Пуассона, має також закон розподілу Пуассона.

2.52. Кількість відказів телевізора протягом гарантійного строку розподілена за законом Пуассона з $a = 0{,}5$. У разі i-го відказу витрати на ремонт $y_i = \left(i^2 + 2i\right)c$. Знайти математичне сподівання і дисперсію витрат упродовж гарантійного строку.

2.53. Залежно від умов зберігання кількість придатної продукції через період t визначається за формулою:

$$Y\left(t\right) = Ae^{-Xt},$$

де, A — кількість продукції, закладеної на зберігання; X — випадкова величина, яка рівномірно розподілена на проміжку $(c; d]$.

Визначити закон розподілу для $Y(t)$. Знайти для нього математичне сподівання та дисперсію.

2.54. Закон розподілу похибок при вимірюванні радіуса R кола — нормальний з параметрами $a = 100$, $\sigma = 0{,}25$. Знайти закон розподілу і числові характеристики похибок при обчисленні довжини кола та площі круга.

2.55. Залишок матеріалу A на початок місяця становив 300 одиниць. Витрати матеріалу за день роботи — випадкова величина, яка рівномірно розподілена на проміжку (10; 15]. Знайти закон розподілу та математичне сподівання:

а) для тривалості періоду Y, на який вистачить матеріалу;

б) для залишку матеріалу Z після 20 днів роботи.

2.56. Урожайність зернових, ц/га, — випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку (15; 45]. Знайти закон розподілу та математичне сподівання випадкової величини Y — собівартості виробництва 1 ц зерна, якщо витрати з виробництва зерна на 1 га становлять b грн.

2.57. Залежно від режиму температур випадкова величина опору X розподілена за законом, який задається щільністю розподілу $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, (x>0)$. Знайти закон розподілу величини I — сили струму у мережі, якщо напруга в ній 220 В.

2.58. Знайти закон розподілу та математичне сподівання довжини хорди X, яка сполучає задану точку кола радіусом a з іншою точкою, усі положення якої на колі рівноможливі.

2.59. Знайти функціональне перетворення, за допомогою якого рівномірно розподілена на проміжку (0; 1] випадкова величина X перетворюється на нормально розподілену величину Y з $a=0$, і $\sigma=1$.

2.60. Яким функціональним перетворенням випадкова величина X, що розподілена показниково $\left(f(x)=ae^{-ax}(x>0)\right)$, перетворюється на випадкову величину Y, що розподілена за законом Коші $\left(f(y)=\frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}\right)$?

2.4. ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ФУНКЦІЇ

Закон розподілу випадкової величини X може бути заданий характеристичною функцією $g_X(t)=Me^{itX}$ $\left(i=\sqrt{-1}\right)$. У загальному випадку ця функція набуває комплексних значень. Визначають характеристичну функцію залежно від типу випадкової величини підсумовуванням або інтегруванням. Розглянемо властивості характеристичної функції.

1) $g_X(0)=1$;

2) якщо $Y=aX+b$ і відома $g_X(t)$, то $g_Y(t)=e^{itb}g_X(at)$;

3) характеристична функція суми двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх характеристичних функцій;

4) якщо існує абсолютний момент порядку n для випадкової величини X, то $g_X(t)$ диференційовна принаймні n раз і $g_X^{(k)}(0)=\frac{1}{i^k}\nu_k$.

Розглянемо характеристичні функції деяких законів розподілу.

1) біноміальний закон розподілу: $g_X(t)=\left(pe^{it}+1-p\right)^n$;

2) закон розподілу Пуассона: $g_X(t)=e^{-a\left(1-e^{it}\right)}$;

3) рівномірний закон розподілу на проміжку $(a;b]$: $g_X(t)=\dfrac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$;

4) показниковий закон розподілу: $g_X(t)=\dfrac{a}{a-it}$;

5) нормальний закон розподілу: $g_X(t)=e^{ita-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$; якщо $a=0$ і $\sigma=1$, то $g_X(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Розглянемо граничні теореми, які виконуються для послідовності $F_n(x)$ і відповідної їй послідовності характеристичних функцій.

Пряма теорема. Якщо послідовність функцій розподілу $F_n(x)$ збігається до функції $F(x)$ у всіх точках неперервності останньої, то послідовність характеристичних функцій $g_n(t)$ збігається, якщо $n\to\infty$, до функції $g(t)$, яка буде характеристичною функцією, що відповідає $F(x)$.

Обернена теорема. Якщо послідовність характеристичних функцій $g_n(t)$ збігається на всій осі до неперервної функції $g(t)$, то послідовність функцій розподілу $F_n(x)$, якщо $n\to\infty$, збігається до $F(x)$, причому $F(x)$ буде функцією розподілу, яка відповідає характеристичній функції $g(t)$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Задано графік функції розподілу $F(x)$ (рис. 2.4). Знайти $g_X(t)$.

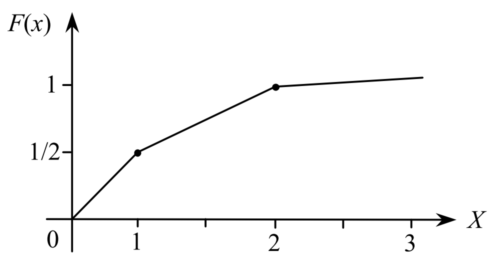

Рис. 2.4

Розв'язання. Випадкова величина X неперервна, тому для визначення $g_X(t)$ застосуємо формулу $g_X(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx.$ Щоб знайти $f(x)$, насамперед потрібно записати аналітичний вираз для функції розподілу. При недодатних значеннях x функція розподілу дорівнює нулю. Коли x змінюється від нуля до одиниці, то $F(x)=ax$. Щоб знайти a, скористаємося тим, що $F(1)=\frac{1}{2}$. Тоді $a=\frac{1}{2}$. Для визначення функції розподілу на проміжку $x\in(0,3]$ скористаємося неперервністю $F(x)$. Аналітичний вираз її на ньому такий: $F(x)=ax+b$. Дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{1}{2}; \\ 3a+b=1. \end{cases} \quad 2a=\frac{1}{2},\ a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{4}.$$

Очевидно, що для $x > 3$ функція розподілу дорівнює одиниці. Остаточно маємо:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0; \\ \dfrac{1}{2}x, & \text{якщо } 0<x\le 1; \\ \dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}, & \text{якщо } 1<\text{x}\le 3; \\ 1, & \text{якщо } x>3. \end{cases}$$

Диференціюванням функції розподілу знайдемо щільність розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0; \\ \dfrac{1}{2}, & \text{якщо } 0<x\le 1; \\ \dfrac{1}{4}, & \text{якщо } 1<x\le 3; \\ 0, & \text{якщо } x>3. \end{cases}$$

Отже, характеристичною функцією буде така:

$$g_x(t)=\int_0^1 e^{itx}\frac{1}{2}dx+\int_1^3 e^{itx}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2it}e^{itx}\Big|_0^1+\frac{1}{4it}e^{itx}\Big|_1^3=\frac{e^{it}}{2it}-\frac{1}{2it}+\frac{e^{3it}}{4it}-\frac{e^{it}}{4it}=$$

$$=\frac{e^{it}-2+e^{3it}}{4it}.$$

Приклад 2. Випадкова величина *X* розподілена за таким законом:

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \frac{1}{2}x, & \text{якщо } 0<x\le 2;\\ 0, & \text{якщо } x>2.\end{cases}$$

Визначити характеристичну функцію для випадкової величини $Y=2X+3$.

Розв'язання. Знайдемо характеристичну функцію для випадкової величини *X*, а далі скористаємося властивістю характеристичних функцій:

$$g_X(t)=\int_0^2\frac{1}{2}xe^{itx}dx=\left|\begin{matrix}u=x;\ du=dx;\\ dv=e^{itx}dx;\ v=\frac{1}{it}e^{itx};\end{matrix}\right|=\frac{x}{2it}e^{itx}\Big|_0^2-\frac{1}{2it}\int_0^2 e^{itx}dx=\frac{e^{2it}}{it}-$$

$$-\frac{1}{2i^2t^2}e^{itx}\Big|_0^2=\frac{e^{2it}}{it}+\frac{e^{2it}}{2t^2}-\frac{1}{2t^2}=\frac{e^{2it}-1-2ite^{2it}}{2t^2}.$$

Застосуємо другу властивість характеристичної функції: якщо $Y=aX+b$ і відома характеристична функція $g_X(t)$, $b=3$. то $g_Y(t)=e^{itb}g_X(at)$. За умовою $a=2$; Тоді $g_Y(t)=\frac{e^{3it}\left(e^{4it}-1-4ite^{4it}\right)}{8t^2}$.

Приклад 3. Довести за допомогою характеристичної функції, що закон розподілу Пуассона стійкий. (Закон розподілу називається ***стійким***, якщо сума незалежних випадкових величин, розподілених за цим законом, має розподіл такого самого типу.)

Розв'язання. Нехай випадкова величина *X* розподілена за законом Пуассона з параметром *a*, а випадкова величина Y розподілена за цим самим законом із параметром b. Покажемо, що випадкова величина $Z=X+Y$ також матиме закон розподілу Пуассона.

Знаходимо характеристичні функції для випадкових величин X і Y:

$$g_X(t) = e^{-a\left(1-e^{it}\right)}; \quad g_Y(t) = e^{-b\left(1-e^{it}\right)}.$$

За умовою $Z = X + Y$, причому величини X і Y між собою незалежні. Тоді

$$g_Z(t) = g_X(t) g_Y(t) = e^{-a\left(1-e^{it}\right)} e^{-b\left(1-e^{it}\right)} = e^{-(a+b)\left(1-e^{it}\right)}.$$

Позначивши $c = a + b$, дістанемо $g_Z(t) = e^{-c\left(1-e^{it}\right)}$. Маємо характеристичну функцію для розподілу Пуассона. Звідси випливає, що закон розподілу Пуассона стійкий. Одночасно установили, що параметр Z визначається додаванням параметрів X і Y.

Приклад 4. Задано послідовність функцій розподілу:

$$F_n(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^i}{i!}, \; n = 2r + 1, \; r \in Z_0.$$

Визначити $g(t)$ — граничну функцію для відповідної послідовності характеристичних функцій.

Розв'язання. Застосуємо теорему про граничну характеристичну функцію для послідовності функцій розподілу. Знайдемо граничну функцію розподілу.

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^i}{i!}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^i}{i!} = 1 - e^{-x}.$$

Отже, гранична функція розподілу — функція показникового розподілу з параметром $a = 1$. Тоді гранична характеристична функція $g(t) = \dfrac{1}{1 - it}$.

Вправи для самостійного розв'язування

2.61. Знайти характеристичну функцію випадкової величини X, яку задано функцією розподілу $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -2, \\ 0{,}1, & \text{якщо } -2 < x \le -1, \\ 0{,}45, & \text{якщо } -1 < x \le 0, \\ 0{,}65, & \text{якщо } 0 < x \le 1, \\ 0{,}8, & \text{якщо } 1 < x \le 2, \\ 1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

2.62. Випадкова величина розподілена рівномірно на проміжку (–4; 4]. Знайти $g_Y(t)$, якщо $Y = 3X + 6$.

2.63. Незалежні випадкові величини X і Y розподілені нормально, $MX = 4$; $DX = 16$; $MY = 6$; $DY = 20$. Знайти $g_Z(t)$, якщо $Z = 5X + 3Y$.

2.64. Випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ попарно незалежні і однаково розподілені (рівномірний розподіл на проміжку (–1; 1]). Знайти характеристичну функцію їхньої суми.

2.65. Визначити характеристичну функцію випадкової величини X, якщо щільність розподілу її — трикутник *ABC*. Точка *B* лежить на осі ординат, а точки *A* і *C* мають координати: *A*(–2; 0), *C*(2; 0).

2.66. Вивести умову, за якої біноміальний закон розподілу стійкий.

2.67. З допомогою характеристичних функцій довести стійкість розподілу x^2. (Розглянути незалежні випадкові величини U і V, які мають χ^2 розподіл з одним ступенем волі. Знайти їхні характеристичні функції і $g_Z(t)$, якщо $Z = U + V$).

2.68. Задана послідовність функцій розподілу:

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Визначити $g(t)$ — граничну функцію для відповідної послідовності характеристичних функцій.

2.5. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

Нерівності Чебишова. *Перша форма*: якщо випадкова величина *X* невід'ємна і $MX < \infty$, то $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{MX}{\varepsilon}$.

Друга форма: якщо для випадкової величини існують моменти першого та другого порядку, то $P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$.

Нехай задано послідовність випадкових величин:

$$X_1, X_2, ..., X_n, ... \quad (1)$$

Послідовність (1) задовольняє закон великих чисел, якщо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Окремі форми закону великих чисел різняться обмеженнями, які накладаються на випадкові величини, що входять у послідовність (1).

Теорема Хінчина. Якщо випадкові величини у послідовності (1) незалежні, однаково розподілені і мають скінченне математичне сподівання a, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема Чебишова. Якщо випадкові величини у послідовності (1) незалежні, мають скінченні математичні сподівання і рівномірно обмежені дисперсії $(DX_i \le C,\ i = 1,2,...)$, то до послідовності (1) можна застосувати закон великих чисел.

Теорема Маркова. Нехай випадкові величини в послідовності (1) мають скінченні і як завгодно залежні математичні сподівання. Тоді, якщо $\frac{1}{n^2} D\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0$, при $n \to \infty$, то для послідовності (1) можна застосувати закон великих чисел.

Теорема Бернуллі. Нехай проводиться n незалежних повторних випробувань, у кожному з яких імовірність настання події A дорівнює p. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

де m — частота події A у даних випробуваннях.

Центральна гранична теорема. Для послідовності випадкових величин (1) розглянемо:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i;\ DX_i = b_i^2;\ B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} b^2;\ S_n^* = \frac{S_n - MS_n}{B_n}.$$

Теорема 1. Якщо випадкові величини в послідовності (1) незалежні, однаково розподілені і для них існують моменти другого порядку, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(S_n^* < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{2}$$

тобто граничним розподілом для S_n^* є нормальний закон розподілу з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Теорема Ляпунова. Якщо для незалежних випадкових величин, які утворюють послідовність (1), існують моменти третього порядку і виконується умова

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^3} \sum\limits_{i=1}^{n} M\left|X_i\right|^3 = 0,$ то для S_n^* виконується співвідношення (2).

Наслідком розглянутих теорем є **інтегральна теорема Лапласа**.

У схемі незалежних повторних випробувань

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$ Це випливає з того, що частоту події можна подати як суму n випадкових величин — частот настання події в окремих випробуваннях. При достатньо великих значеннях n закон розподілу цієї суми близький до нормального.

Аналогічними міркуваннями для цієї схеми легко дістати формулу:

$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right),$ де m — частота події A у n випробуваннях.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Середнє споживання електроенергії протягом травня у місті дорівнює 360 000 кВт. год.

1. Оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії у травні поточного року перевищить 1 000 000 кВт. год.

2. Оцінити ту саму ймовірність за умови, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії за травень дорівнює 40 000 кВт. год.

Розв'язання. 1. Випадкова величина X — споживання електроенергії набуває невід'ємних значень. Математичне сподівання її дорівнює 360 000. Оцінимо ймовірність за допомогою першої форми нерівності Чебишова: $P(X \geq 1\,000\,000) \leq \frac{360\,000}{1\,000\,000} = 0{,}36.$

2. Оцінимо цю саму нерівність, якщо відоме середнє квадратичне відхилення X. Скористаємося другою формою нерівності Чебишова:

$$P(X \geq 1\,000\,000) = 1 - P(X < 1\,000\,000) = 1 - P(0 < X < 1\,000\,000) = 1 -$$
$$- P(-360\,000 < X < -MX < 640\,000) = 1 - P(|X - MX| < 640\,000) \leq 1 - 1 +$$
$$+ \frac{(40\,000)^2}{(640\,000)^2} = \frac{1}{256}.$$

Отже, якщо існує момент другого порядку, оцінка ймовірності істотно менша.

Приклад 2. Імовірність деякої події визначається методом Монте-Карло. Знайти кількість незалежних випробувань, які забезпечують з імовірністю не менш як 0,99 обчислення шуканої ймовірності з похибкою, що не перевищує 0,01. Оцінку подати за допомогою нерівності Чебишова і теореми Лапласа.

Розв'язання. Оцінкою для ймовірності є відносна частота $\frac{m}{n}$. Знаходимо її числові характеристики:

$$M\left(\frac{m}{n}\right) = p;\ D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Для відносної частоти існують моменти другого порядку. Запишемо другу форму нерівності Чебишова для відносної частоти:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Значення $\varepsilon = 0{,}01$, добуток $p(1-p)$ оцінимо максимальним числом 0,25. Підставивши ці значення у праву частину нерівності Чебишова, дістанемо:

$$1 - \frac{0{,}25}{n(0{,}01)^2} \geq 0{,}99;\ 0{,}01 \geq \frac{2500}{n};\ n \geq 250\,000.$$

Оцінимо тепер n за допомогою теореми Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right).\ 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \geq 0{,}99;$$

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \geq 0{,}495;\quad \varepsilon\sqrt{\frac{n}{0{,}25}} \geq 2{,}58;\ n \geq \frac{(2{,}58)^2 \cdot 0{,}25}{(0{,}01)^2} = 16641$$

Як бачимо, оцінка за нерівністю Чебишова значно більша, ніж за теоремою Лапласа.

Приклад 3. Дано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$. Випадкова величина X_k може набувати значень $-\sqrt{k}$, 0, $\sqrt{k}$ з імовірностями, що дорівнюють відповідно $\frac{1}{k+1}$, $1-\frac{2}{k+1}$, $\frac{1}{k+1}$. Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

Розв'язання. Знайдемо числові характеристики для випадкової величини X_k:

$$MX_k = 0;\ DX_k = MX_k^2 = \frac{2k}{k+1}.$$

Дисперсії величин, які утворюють послідовність, обмежені зверху числом 2. Отже, закон великих чисел можна застосувати.

Приклад 4. Дано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$. Математичні сподівання цих величин дорівнюють нулю, а $DX_k = k^\alpha$ (α — додатна стала, яка менша від 1). Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

Розв'язання. З'ясуємо, яку з теорем можна застосувати до цієї послідовності. Не можна застосувати ні теорему Хінчина, бо величини мають різні закони розподілу, ні теорему Чебишова, бо дисперсії зростають і необмежені зверху $\lim\limits_{k\to\infty} DX_k = \infty$.

Розглянемо умови теореми Маркова.

Знаходимо $D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$ і оцінюємо цю суму:

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha < \int_1^{n+1} x^\alpha dx < \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} = 0$, то згідно з теоремою Маркова до послідовості можна застосувати закон великих чисел.

Приклад 5. Контролер перевіряє деякі вироби. На першому етапі перевірки, який триває 10 с, він або відразу оцінює виріб, або приймає рішення, що перевірку треба повторити. Повторна перевірка триває 10 с, у результаті чого обов'язково приймається рішення про якість продукції. Знайти ймовірність того, що за семигодинний робочий день контролер перевірить понад 1800 виробів; понад 1640 виробів; не менш як 1500 виробів. Передбачається, що кожний виріб незалежно від інших з імовірністю 0,5 проходить повторну перевірку.

Розв'язання. Нехай X_i — час, потрібний для перевірки *і*-го виробу. Дістаємо послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$. Кожна з них має такий закон розподілу:

x_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Загальний час S_n, що його витрачає робітник на перевірку *n* виробів, є сумою *n* незалежних однаково розподілених величин: $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Числові характеристики такі:

$$MX_i = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}; \; DX_i = \frac{1}{72} + \frac{1}{18} - \frac{1}{16} = \frac{1}{144}.$$

Згідно з теоремою 1 величина S_n має закон розподілу, близький до нормального.

Якщо $n = 1800$, то $MS_n = 450$, $DS_n = 12{,}5$. Тривалість зміни становить 420 хв. Тоді маємо:

$$P(S_n < 420) = \Phi\left(\frac{420 - 450}{\sqrt{12{,}5}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 420}{\sqrt{12{,}5}}\right) = -\Phi\left(6\sqrt{2}\right) + \Phi\left(90\sqrt{2}\right) = 0.$$

Якщо $n = 1640$, то $MS_n = 410$, $DS_n = \frac{205}{18} \approx 11{,}39$. У такому разі дістаємо:

$$P(S_n < 420) = \Phi\left(\frac{420 - 410}{\sqrt{11{,}39}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 410}{\sqrt{11{,}39}}\right) = \Phi(2{,}96) + \Phi(121{,}5) \approx 0{,}9985.$$

І, нарешті, без обчислень можна стверджувати, що коли $n = 1500$, то $P(S_n < 420) = 1$.

Вправи для самостійного розв'язування

2.69. Середня витрата води в населеному пункті становить 50 000 л за день. Оцінити ймовірність того, що в цьому населеному пункті протягом одного певного дня витрата води не перевищить 150 000 л.

2.70. Середнє квадратичне відхилення похибки вимірювання азимуту дорівнює $20'$ (математичне сподівання її дорівнює нулю). Визначити ймовірність того, що похибка середнього арифметичного трьох вимірювань не перевищить одного градуса.

2.71. Імовірність настання події A в кожному випробуванні $p=\frac{1}{3}$. Яку найменшу кількість випробувань потрібно виконати, щоб з імовірністю не менш як 0,99 можна було стверджувати, що частість настання події A відхилялась за абсолютною величиною від її ймовірності не більш ніж на 0,01?

Для розв'язування скористатися:

а) нерівністю Чебишова;

б) інтегральною теоремою Лапласа.

2.72. Задано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, які набувають значень $-\sqrt{n}$, 0, $\sqrt{n}$ з імовірностями відповідно $\frac{2}{n}$, $1-\frac{4}{n}$, $\frac{2}{n}$. Чи можна до цієї послідовності застосувати закон великих чисел?

2.73. Задано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, які набувають значень $-n\alpha$, 0, $n\alpha$ $(\alpha>0)$ з імовірностями відповідно $\frac{1}{2^n}$, $1-\frac{1}{2^{n-1}}$, $\frac{1}{2^n}$. Чи можна до цієї послідовності застосувати закон великих чисел?

2.74. Випадкова величина — середня арифметична незалежних однаково розподілених випадкових величин: $n=225$, $\sigma=15$. Якого максимального відхилення цієї величини від її математичного сподівання можна очікувати з імовірністю P = = 0,9544?

2.75. Перевіряється партія деталей. З імовірністю p = 0,01 деталь може мати дефект A і незалежно від цього з імовірністю p = 0,03 — дефект B. В яких межах при P = 0,9973 перебуватиме кількість стандартних деталей у партії із 1000 деталей?

2.76. При виготовленні виливків брак становить 20 %. Скільки потрібно виготовити виливків, щоб з імовірністю P = 0,95 забезпечити програму випуску виробів, згідно з якою передбачено отримати 50 бездефектних виливків?

2.77. При складанні статистичного звіту треба було додати 10 000 000 чисел, кожне з яких округлювалося з точністю до 10^{-m}. Вважаючи, що похибки округлення взаємно незалежні і рівномірно розподілені на проміжку $\left(-0{,}5\cdot 10^{-m}; 0{,}5\cdot 10^{-m}\right]$ знайти межі, в яких міститься сумарна похибка ($P = 0{,}9544$).

2.78. Нехай кожний із перехожих, опинившись біля газетного кіоску, купує газету з імовірністю $p = 0{,}25$, а X — випадкова величина — кількість людей, які пройшли повз кіоск за час, поки продавець продав перші 100 газет. Знайти закон розподілу X.

Розділ 3

СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

3.1. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН І ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, ЯКІ ВХОДЯТЬ ДО СИСТЕМИ

Сукупність випадкових величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$, які розглядаються спільно, називається ***системою n випадкових величин***. Якщо $n = 2$, тобто розглядається система двох випадкових величин (X, Y), то геометрично її можна тлумачити як випадкову точку з координатами (X, Y) на площині XOY або як випадковий вектор, складові якого — випадкові величини X і Y. Аналогічно, якщо $n = 3$, то маємо випадкову точку (X, Y, Z) або випадковий вектор у тривимірному просторі. У загальному випадку систему n випадкових величин можна інтерпретувати як випадкову точку або випадковий вектор у просторі n вимірів.

Розглядають системи дискретних випадкових величин, неперервних випадкових величин, а також системи, до яких входять як дискретні, так і неперервні випадкові величини. Закони розподілу систем випадкових величин задаються різними способами. Так, закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин можна задати таблицею:

x_i \ y_i	y_1	y_2	…	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

У цій таблиці $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$.

Функція розподілу $F(x, y)$ системи двох випадкових величин визначає ймовірність спільного настання двох подій: $X < x$ і $Y < y$;

$F(x,y)=P(X<x;Y<y)$. Геометрично функцію розподілу можна інтерпретувати як імовірність потрапляння випадкової точки в нескінченний прямокутник із вершиною (x,y), обмежений згори і праворуч (рис. 3.1).

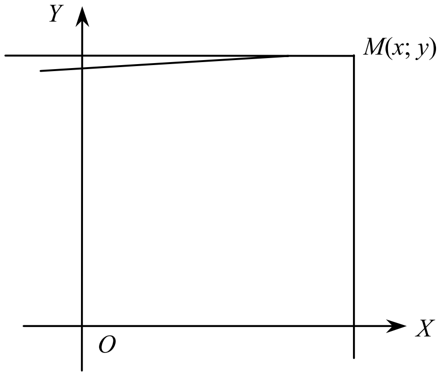

Рис. 3.1

Функція розподілу має такі властивості:

1) $0 \le F(x,y) \le 1$;

2) $F(x,y)$ — неспадна функція x і y;

3) $F(-\infty,-\infty)=F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0$;

4) $F(+\infty,+\infty)=1$;

5) $F(x,+\infty)=F_1(x)$, $F(+\infty,y)=F_2(y)$.

Функції $F_1(x)$ і $F_2(y)$ визначають закони розподілу для випадкових величин X і Y, які входять до системи.

За допомогою функції розподілу можна подати ймовірність потрапляння випадкової точки у прямокутник, сторони якого паралельні осям координат:

$$P(x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1).$$

Якщо розглядається система неперервних випадкових величин, то для неї визначається щільність розподілу $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$. При цьому $f(x,y)$ має такі властивості:

1) $f(x,y)\ge 0$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$.

Імовірність потрапляння випадкової точки (x, y) у довільну область D подається формулою:

$$P\big((x,y)\in D\big)=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Функція розподілу системи двох випадкових величин виражається через щільність розподілу:

$$F(x, y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)dudv\,.$$

Коли відомий закон розподілу системи випадкових величин, то можна знайти закони розподілу для її складових. Якщо в таблиці задано закон розподілу системи (X, Y), то ймовірності $p(x_i)$ і $p(y_j)$ визначаються за формулами:

$$p(x_i)=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,,\ i=1,2,\ldots,m;\ p(y_j)=\sum_{i=1}^{m} p_{ij}\,,\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Скориставшись властивостями функції розподілу системи неперервних величин, можна знайти щільності розподілу величин, які входять до цієї системи:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy,\quad f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx.$$

Умовним законом розподілу випадкової величини, яка належить системі, називається закон розподілу, знайдений за умови, що друга випадкова величина набула певного значення.

Умовні щільності розподілу визначаються за формулами:

$$f_1(x/y)=\frac{f(x, y)}{f_2(y)}=\frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx};\quad f_2(y/x)=\frac{f(x, y)}{f_1(x)}=\frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy}.$$

Для умовних законів розподілу розглядають числові характеристики — умовне математичне сподівання і умовну дисперсію, які обчислюються за формулами:

$$M(Y/x)=\int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y/x)dy,\quad D(Y/x)=M\left(Y^2/x\right)-(M(Y/x))^2;$$

$$M(X/y)=\int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x/y)dx,\quad D(X/y)=M\left(X^2/y\right)-(M(X/y))^2.$$

Формули, які виражають умовні математичні сподівання, називаються ***рівняннями регресії першого роду***.

Випадкові величини, які входять до системи, незалежні, якщо умовні закони розподілу для них збігаються з безумовними. Якщо щільність розподілу системи величин подається як добуток функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної, то величини, які входять до системи, незалежні.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Система випадкових величин (X, Y) із невід'ємними складовими має функцію розподілу $F(x, y) = 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y}$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$. Знайти $f(x, y)$ і $P(1 \le X < 2;\ 2 \le Y < 3)$. Дослідити, чи будуть незалежними величини X і Y, які входять до системи.

Розв'язання. Обчислимо ймовірність за допомогою функції розподілу за наведеною раніше формулою:

$$P(1 \le X < 2;\ 2 \le Y < 3) = F(2,3) - F(1,3) - F(2,2) + F(1,2) = 1 - e^{-2\alpha} -$$
$$- e^{-3\beta} + e^{-2\alpha - 3\beta} - 1 + e^{-\alpha} + e^{-3\beta} - e^{-\alpha - 3\beta} - 1 + e^{-2\alpha} + e^{-2\beta} - e^{-2\alpha - 2\beta} +$$
$$+ 1 - e^{-\alpha} - e^{-2\beta} + e^{-\alpha - 2\beta} = e^{-2\alpha - 3\beta} - e^{-\alpha - 3\beta} - e^{-2\alpha - 2\beta} + e^{-\alpha - 2\beta} =$$
$$= -e^{-\alpha - 3\beta}\left(- e^{-\alpha} + 1\right) + e^{-\alpha - 2\beta}\left(- e^{-\alpha} + 1\right) = \left(1 - e^{-\alpha}\right)\left(1 - e^{-\beta}\right) e^{-\alpha - 2\beta}.$$

Для дослідження незалежності X і Y знайдемо щільність розподілу системи $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \alpha e^{-\alpha x} - \alpha e^{-\alpha x - \beta y};\ f(x, y) = \alpha\beta e^{-\alpha x - \beta y} = \alpha e^{-\alpha x} \beta e^{-\beta y}.$$

Щільність розподілу системи подано як добуток двох функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної. Отже, величини, що утворюють систему, незалежні.

Приклад 2. Система випадкових величин рівномірно розподілена в даній області D (рис. 3.2). Знайти $f(x, y)$, $f_1(x)$, $f_2(y/x)$, $M(Y/x)$, $D(Y/x)$ й умовну ймовірність $P(0{,}2 \le Y < 1{,}6 / X = 3{,}5)$.

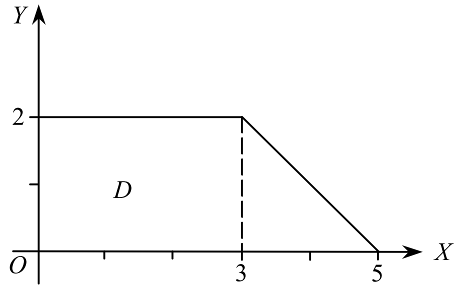

Рис. 3.2

Розв'язання. Для визначення щільності розподілу даної системи випадкових величин скористаємося її властивістю: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$, а також тим, що в області D функція $f(x,y) = c.$ Тоді $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = 1;\quad c\iint\limits_{D} dxdy = 1.$ Оскільки даний подвійний інтеграл чисельно дорівнює площі області, обчислимо його як площу трапеції: $S_D = \frac{3+5}{2}\cdot 2 = 8.$

Тоді

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (x,y) \notin D; \\ \frac{1}{8}, & \text{якщо } (x,y) \in D. \end{cases}$$

Знайдемо щільність розподілу $f_1(x).$ За формулою $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy.$ Якщо значення x недодатні, то щільність розподілу системи дорівнює нулю, а отже, щільність $f_1(x) = 0.$ Якщо $x \in (0,3]$, то область обмежена лініями $y = 0$ і $y = 2$. Маємо, $f_1(x) = \int\limits_0^2 \frac{1}{8}dy = \frac{1}{4}.$ Коли x змінюється на проміжку (3,5], обмеження області D за y такі: знизу $y = 0$, угорі $y = 5 - x$. Звідси $f_1(x) = \int\limits_0^{5-x} \frac{1}{8}dy = \frac{5-x}{8}.$ Нарешті, якщо $x > 5$, $f_1(x) = 0$ (згідно зі значенням $f(x,y)$). Запишемо щільність розподілу для X:

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \dfrac{1}{4}, & \text{якщо } 0<x\le 3;\\ \dfrac{5-x}{8}, & \text{якщо } 3<x\le 5;\\ 0, & \text{якщо } x>5.\end{cases}$$

Знайдемо умовну щільність розподілу, скориставшись формулою $f_2(y/x)=\dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}$.

$$f_2(y/x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{якщо } 0<y<2,\ 0<x\le 3;\\ \dfrac{1}{5-x}, & \text{якщо } 0<y<5-x,\ 3<x<5.\end{cases}$$

Умовна щільність має два відмінні від нуля аналітичні вирази, кожний з яких має певне умовне математичне сподівання та дисперсію.

Якщо $x\in(0,3)$, то $M(Y/x)=\int\limits_0^2 \dfrac{1}{2}y\,dy=\dfrac{y^2}{4}\Big|_0^2=1$,

а якщо $x\in(3,5)$, то $M(Y/x)=\int\limits_0^{5-x}\dfrac{y}{5-x}dy=\dfrac{1}{5-x}\cdot\dfrac{y^2}{2}\Big|_0^{5-x}=\dfrac{5-x}{2}$.

$$M(Y/x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } 0<x\le 3;\\ \dfrac{5-x}{2}, & \text{якщо } 3<x<5.\end{cases}$$

Для знаходження умовної дисперсії обчислимо $M(Y^2/x)$.

Якщо $x\in(0,3]$, то

$$M(Y^2/x)=\int\limits_0^2\frac{y^2}{2}dy=\frac{y^3}{6}\Big|_0^2=\frac{4}{3};\quad D(Y/x)=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3},$$

а якщо $x\in(3,5)$, то $M(Y^2/x)=\int\limits_0^{5-x}\dfrac{y^2}{5-x}dy=\dfrac{1}{5-x}\cdot\dfrac{y^3}{3}=\dfrac{(5-x)^2}{3}$;
$D(Y/x)=\dfrac{(5-x)^2}{3}-\dfrac{(5-x)^2}{4}=\dfrac{(5-x)^2}{12}$.

$$D(Y/x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & \text{якщо } 0<x\le 3;\\ \dfrac{(5-x)^2}{3}, & \text{якщо } 3<x<5.\end{cases}$$

Для обчислення умовної ймовірності потрібно зінтегрувати умовну щільність на відповідному проміжку:

$$P(0{,}2\le Y<1{,}6\,/\,X=3{,}5)=\int_{0,2}^{1,6} f_2(y/x)dy.$$

Якщо $x\in(3{,}5]$, то значення y обмежені нерівністю $0<y<5-x.$ Тоді при x = 3, 5 верхня межа для значення $y=1{,}5$. Підставляючи у вираз для умовної щільності значення x = 3,5, маємо: $P(0{,}2\le Y<1{,}6\,/\,X=3{,}5)=\int_{0,2}^{1,5}\frac{2}{3}dy=\frac{13}{15}.$

Вправи для самостійного розв’язування

3.1. Система випадкових величин (X,Y) рівномірно розподілена в області, яка являє собою багатокутник із вершинами $A(1,0)$, $B(0,2)$, $C(2,4)$, $D(4,1)$, $E(3,0)$. Знайти $f(x,y)$, $f_1(x)$ і $P(0{,}1\le Y<4\,/\,X=3)$.

3.2. Область значень системи випадкових величин (X,Y) — багатокутник із вершинами $A(-2{,}0)$, $B(-2{,}1)$, $C(0{,}1)$, $D(1{,}0)$. Знайти c ($|c|$ сталий в області), $f_2(y)$ і $P(-1{,}5\le X<1\,/\,Y=0{,}6)$, якщо $f(x,y)=c(x+y)$.

3.3. Система випадкових величин (X,Y) має щільність розподілу $(x,y)=\dfrac{A}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}$. Знайти A і функцію розподілу $F(x,y)$.

3.4. Координати випадкової точки (X,Y) розподілені рівномірно у прямокутнику, обмеженому прямими $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b.$ Визначити імовірність потрапляння випадкової точки у круг радіусом R, якщо $a>b$ і центр круга збігається з початком координат.

3.5. Задано щільність розподілу системи випадкових величин (X,Y):

$$f(x,y) = kxye^{-\left(x^2+y^2\right)}\ (x>0, y>0).$$

Визначити k і закони розподілу випадкових величин, які входять до системи.

3.6. Щільність розподілу системи випадкових величин (X,Y) задано формулою: $f(x,y) = Ae^{-ax^2+bxy-cy^2}\ (a>0, c>0)$. Знайти закони розподілу величин, які входять до системи.

3.7. Система випадкових величин (X,Y) рівномірно розподілена у багатокутнику з вершинами $A(1{,}0)$, $B(0{,}4)$, $C(5{,}4)$, $D(6{,}2)$, $F(4{,}0)$. Знайти $f(x,y)$ і $M(Y/x)$.

3.8. Система випадкових величин (X,Y) рівномірно розподілена у багатокутнику з вершинами $A(1{,}0)$, $B(3{,}5)$, $C(6{,}3)$, $D(5{,}0)$. Знайти $f(x,y)$ і $M(Y/x)$.

3.9. Закон розподілу системи дискретних випадкових величин задано в табличній формі:

x_i \ y_j	2	3	4	5
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	—	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	—	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	—

Знайти закони розподілу величин, які входять до системи, $M(X/Y=3)$ і $F(x/Y=3)$.

3.2. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Початковим моментом порядку $k+r$ ***системи*** (X,Y) називається величина $\nu_{k,r} = M\left(X^k \cdot Y^r\right)$. Якщо $k=1$, $r=0$, маємо $\nu_{1,0} = MX$; при $k=0$, $r=1$ дістаємо $\nu_{0,1} = MY$.

Центральним моментом порядку $k+r$ називається величина $\mu_{k,r} = M\left(\left(X - MX\right)^k \left(Y - MY\right)^r\right)$. При значеннях $k=2,\ r=0$ $\mu_{2,0} = M\left(X - MX\right)^2 = DX$. Якщо навпаки, $k=0$, а $r=2$, то $\mu_{0,2} = M\left(Y - MY\right)^2 = DY$; нарешті, при $k=1$ і $r=1$ $\mu_{1,1} = M\left(\left(X - MX\right)\left(Y - MY\right)\right)$ K_{XY} — ***кореляційний момент*** (***коваріація***) випадкових величин X і Y. Його можна обчислити також за формулою: $K_{XY} = M\left(XY\right) - MX \cdot MY$. Для незалежних випадкових величин кореляційний момент дорівнює нулю.

Кореляційний момент характеризує тісноту лінійної залежності між величинами. З цією самою метою застосовують ***коефіцієнт кореляції*** $\rho_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$. Якщо кореляційний момент (коефіцієнт кореляції) дорівнює нулю, то величини називаються ***некорельованими***. Із незалежності величин випливає їх некорельованість, але із некорельованості величин не випливає їх незалежність. Якщо величини пов'язані лінійною функціональною залежністю, то $\rho_{XY} = \pm 1$.

Для системи випадкових величин $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ числові характеристики задаються вектором математичних сподівань $\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ і кореляційною матрицею:

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & ... & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & ... & K_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ K_{n1} & K_{n2} & ... & K_{nn} \end{pmatrix}$$

Якщо елементи цієї матриці поділимо на добуток $\sigma_{X_i}\sigma_{Y_j}$, дістанемо матрицю, складену з коефіцієнтів кореляції:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & ... & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & ... & \rho_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Частка продукції заводу, що містить брак через дефект *A*, становить 3 %, а через дефект *B* — 4,5 %. Придатна продукція становить 95 %. Знайти коефіцієнти кореляції дефектів *A* і *B*.

Розв'язання. Розглянемо систему дискретних випадкових величин (X,Y). Вони дорівнюють відповідно 1, якщо продукція має дефект *A* або *B*, і нулю, якщо дефект відсутній. Можливі 4 комбінації значень змінних. Визначимо їхні ймовірності. За умовами придатна продукція становить 95 %, тому $P(X=0;Y=0)=0{,}95$. Випадкова величина *X* набуває значення 1 з імовірністю 0,03, тоді $P(X=0)=1-0{,}03=0{,}97$.

Отже, $P(X=0;Y=1)=P(X=0)-P(X=0;\ Y=0)$ = 0,97 – 0,95 = 0,02.

Далі визначаємо такі ймовірності: $P(X=1;Y=1)=P(Y=1)-$ $-P(X=0;Y=1)=0{,}045-0{,}02=0{,}025$.

Нарешті обчислюємо $P(Y=0)=1-P(Y=1)=1-0{,}045=0{,}955$.

Запишемо результати обчислень у таблицю:

$Y \backslash X$	1	0	$p(y)$
1	0,025	0,02	0,045
0	0,005	0,95	0,955
$p(x)$	0,03	0,97	1

Для обчислення коефіцієнта кореляції ρ_{XY} визначимо кореляційний момент: $K_{XY}=M(XY)-MX\cdot MY$. Знайдемо значення величин, які входять до цієї формули:

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_i y_j p_{ij}=0{,}025;\ MX=0{,}03;\ MY=0{,}045;$$

$$K_{XY}=0{,}025-0{,}03\cdot 0{,}045=0{,}02365.$$

Обчислимо дисперсії X і Y:

$$MX^2=0{,}03;\ DX=0{,}0291;\ MY^2=0{,}045;\ DY=0{,}042975;$$

$$\rho_{XY}=\frac{0{,}02365}{\sqrt{0{,}0291\cdot 0{,}042975}}\approx 0{,}669.$$

Приклад 2. Випадкові величини X і Y мають відповідно математичні сподівання a і b, дисперсії σ_1^2 і σ_2^2 і коефіцієнт кореляції ρ_{XY}. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Z=\alpha X+\beta Y+\gamma$, де α,β і γ — сталі.

Розв'язання. Згідно з властивостями математичного сподівання маємо:

$$MZ = M\left(\alpha X + \beta Y + \gamma\right) = \alpha MX + \beta MY + \gamma = \alpha a + \beta b + \gamma.$$

Величини X і Y залежні. Виведемо формулу для визначення дисперсії Z:

$$DZ = M(Z - MZ)^2 = M((\alpha X + \beta Y + \gamma) - M(\alpha X + \beta Y + \gamma))^2 =$$

$$= M((\alpha X + \beta Y + \gamma) - (\alpha a + \beta b + \gamma))^2 = M(\alpha(X - a) + \beta(Y - b))^2 =$$

$$= M\left(\alpha^2(X - a)^2 + 2\alpha\beta(X - a)(Y - b) + \beta^2(Y - b)^2\right) = \alpha^2 M(X - a)^2 +$$

$$+ 2\alpha\beta M(X - a)(Y - b) + \beta^2 M(Y - b)^2 = \alpha^2\sigma_1^2 + 2\alpha\beta\rho_{XY} + \beta^2\sigma_2^2.$$

Приклад 3. Визначити математичні сподівання і кореляційну матрицю системи випадкових величин (X, Y), якщо $f(x,y) = \dfrac{2}{\pi\left(x^2 + y^2 + 1\right)^3}$.

Розв'язання. Знайдемо числові характеристики системи за наведеними раніше формулами:

$$MX = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^3} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dy \int \left(x^2 + y^2 + 1\right)^{-3} d\left(x^2 + y^2 + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{b\to\infty}\frac{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^{-2}}{-2}\Big|_{-b}^{b}\right)dy = 0.$$

Очевидно, що з огляду на симетрію розподілу, математичне сподівання Y також дорівнює нулю.

Визначаємо дисперсії величин, які входять до системи: $DX = MX^2 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^3}$. Цей інтеграл обчислюємо, інтегруючи один раз частинами, а далі переходимо до полярних координат.

$$DX = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^3} = \begin{pmatrix} x = u;\ du = dx; \\ dv = \dfrac{xdx}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^3};\ v = -\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2}; \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{x}{4\left(x^2+y^2+1\right)^2}\right)\Bigg|_{-b}^{b}\right)dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} =$$

$$= \begin{pmatrix} x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi; \\ dxdy = rdrd\varphi; \\ x^2+y^2 = r^2; \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{\infty}\frac{rdr}{\left(r^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2\left(r^2+1\right)}\Bigg|_{0}^{b}\right)\right)d\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}d\varphi = \frac{1}{2}.$$

На підставі симетричності щільності розподілу системи маємо: $DY = DX = \frac{1}{2}$. Залишилося знайти K_{XY}. Математичні сподівання X і Y дорівнюють нулю, а тому

$$K_{XY} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ydy\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+y^2+1\right)^3} = 0$$

(нулю дорівнює внутрішній інтеграл, який було обчислено при знаходженні математичного сподівання X).

Отже,

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Вправи для самостійного розв’язування

3.10. Систему випадкових величин (X,Y) задано законом розподілу:

$Y \backslash X$	–1	0	1
–1	0,1	0,3	0,2
0	0,1	0,1	0,05
1	0,05	0,04	0,06

Знайти числові характеристики системи.

3.11. Систему випадкових величин (X, Y) задано законом розподілу:

Y \ X	0	1
–1	0,3	0,2
0	0,2	0,2
1	0,05	0,05

Знайти математичні сподівання та дисперсії величин, які входять до системи.

3.12. Систему випадкових величин розподілено рівномірно в області, що являє собою трикутник із вершинами $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(4,2)$. Знайти кореляційну матрицю системи.

3.13. Задано матрицю K системи випадкових величин (X, Y, Z):

$$K = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 10 \\ -8 & 9 & -9 \\ 10 & -9 & 25 \end{pmatrix}.$$

Знайти $D(2X + Y + 3Z)$.

3.14. Скласти кореляційну матрицю для системи випадкових величин (X, Y, Z), якщо $\sigma_X = 4$, $K_{XY} = 2$, $K_{XY} = -1{,}6$, $\rho_{XY} = 0{,}4$, $\rho_{XZ} = -0{,}5$, а випадкові величини Z і Y некорельовані.

3.15. Випадкові величини X та Y розподілені нормально з тими самими параметрами a і σ. Знайти коефіцієнт кореляції системи величин $(\alpha X + \beta Y, 2\alpha X - 3\beta Y)$, якщо $\rho_{XY} = -0{,}6$.

3.16. Виконуються чотири незалежні вимірювання тієї самої величини. Результати вимірювання X_1, X_2, X_3, X_4 мають однакові математичні сподівання та дисперсії. Розглянемо величини $Y_1 = -X_1 - X_2$, $Y_2 = X_2 + X_3$, $Y_3 = X_4 - X_2$. Знайти числові характеристики системи (Y_1, Y_2, Y_3).

3.17. $Z = \alpha X + \beta Y$. За яких умов $DZ < \alpha^2 DX + \beta^2 DY$?

3.18. Вивести формулу для дисперсії добутку двох незалежних випадкових величин.

3.19. Значення X коливається під впливом випадкових факторів A і B. Середнє квадратичне відхилення в результаті дії A дорівнює 1,2, а B — 1,1. Коефіцієнт кореляції між відхиленнями дорівнює 0,125. Знайти σ_X як результат дії двох факторів.

3.20. Випадкову величину X розподілено рівномірно на проміжку (–1, 1]. $Y = X^m$ (m — ціле число). Знайти ρ_{XY}.

3.21. Випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ мають однакові математичні сподівання і дисперсії, $\rho_{ij} = \rho_0$; $Y = \sum_{i=1}^{m} X_i$; $Z = \sum_{i=m+1}^{m+r} X_i$; $U = \sum_{i=m+1}^{n} X_i$. Для системи (Y, Z, U) знайти кореляційну матрицю.

3.22. Задано систему випадкових величин (X, Y). $MX = MY = 0$, DX = 100, DY = 64. При якому значенні a випадкові величини $U = X$ і $V = aX + Y$ будуть некорельованими, якщо MXY = 32? Знайти MV і DV.

3.3. ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ВИПАДКОВИХ АРГУМЕНТІВ

Нехай задано систему випадкових величин (X, Y) і функцію $Z = \varphi(X, Y)$. Потрібно знайти закон розподілу для Z. Якщо (X, Y) — система дискретних величин, то відомі ймовірності $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$ і можна знайти ймовірності $P(Z = z_{ij} = \varphi(x_i, y_j)) = p_{ij}$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

А якщо маємо систему неперервних випадкових величин, то для визначення $f(z)$ обчислюємо $F(z) = \iint\limits_{D(z)} f(x, y)dxdy$, де $D(z)$ — область на площині XOY, в якій $\varphi(x, y) < z$.

Щільність розподілу $f(z)$ дістаємо диференціюванням функції розподілу.

Щільність розподілу суми двох випадкових величин $Z = X + Y$ подається формулами:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, z - y)dy.$$

Якщо X і Y — незалежні випадкові величини, то $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ і $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z - x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z - y) f_2(y)dy$.

Нерідко доводиться розглядати суми випадкових величин, розподілених за нормальним законом. Здобута випадкова величина — результат підсумовування — має нормальний закон розподілу. Параметри розподілу додаються в тому разі, якщо величини незалежні. Додаючи дві нормально розподілені величини із параметрами $MX = a_1$, $DX = \sigma_1^2$, $MY = a_2$, $DY = \sigma_2^2$ і коефіцієнтом кореляції ρ_{XY}, маємо нормальний закон розподілу з параметрами $MZ = a_1 + a_2$, $DZ = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho_{XY}\sigma_1 \cdot \sigma_2$.

У загальному випадку закон розподілу функцій двох неперервних випадкових величин визначаємо за такою схемою:

1) відшукуємо область зміни системи випадкових величин (X, Y);

2) обчислюємо найбільше і найменше значення функції $Z = \varphi(X, Y)$ у заданій області;

3) розглядаємо сім'ю кривих $z = \varphi(x, y)$ і встановлюємо, скільки аналітичних виразів матиме $f(z)$;

4) будуємо лінію $z = \varphi(x, y)$ і визначаємо $D(z)$, тобто множину точок, для яких $\varphi(x, y) < z$;

5) інтегруємо щільність розподілу на множині $D(z)$, дістаючи $F(z)$;

6) щоб знайти $f(z)$, диференціюємо функцію розподілу, враховуючи той факт, що коли:

$$\Phi(z) = \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} dx \int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x, y)dy,$$

то

$$\Phi'(z) = \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} \left(f(x, \psi_2(x, z))\psi_2'(x, z) - f(x, \psi_1(x, z))\psi_1'(x, z) \right) dx.$$

Числові характеристики функцій можна знайти, визначивши закон розподілу, а також скориставшись формулами, аналогічними тим, які застосовувались для функцій одного випадкового аргументу: $MZ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) f(x,y)dxdy;$ $DZ = MZ^2 - (MZ)^2;$

$MZ^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x,y))^2 f(x,y)dxdy.$

Деякі розподіли випадкових величин, що застосовуються в математичній статистиці

Розглянемо деякі розподіли випадкових величин, що застосовуються в математичній статистиці. Вони являють собою функції кількох випадкових аргументів.

1. Розподіл χ^2. Розглядаємо послідовність $X_1, X_2, ..., X_n$ попарно незалежних випадкових величин, які розподілені нормально з нульовими математичними сподіваннями і одиничними дисперсіями.

Якщо $U = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, то ця сума має розподіл χ^2 з n ступенями волі. Щільність розподілу $f_{\chi^2}(u) = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}$, $u > 0$. Числові характеристики розподілу: $MU = n;\ DU = 2n$. До виразу щільності розподілу входить гамма-функція $\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} dx.$

Графік щільності розподілу зображено на рис. 3.3.

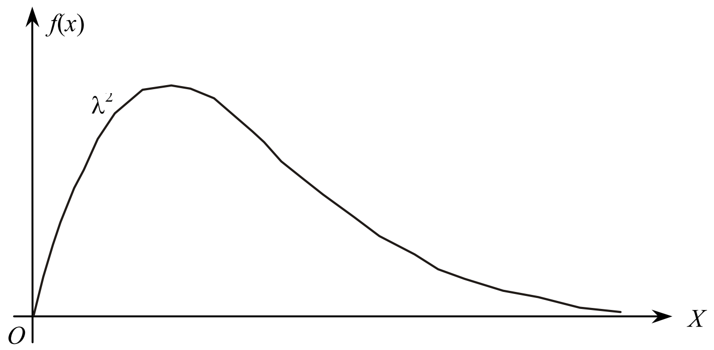

Рис. 3.3

Для розподілу χ^2 складено таблиці виду $P\left(\chi^2 > \chi_\alpha^2\right) = \int_{\chi_\alpha^2}^{\infty} f_{\chi^2}(x)dx$ для кількості ступенів волі від 1 до 30. У таблицях для заданих значень імовірностей (здебільшого $\alpha = 0{,}99$; $0{,}98$; $0{,}95$; $0{,}9$; $0{,}8$; $0{,}7$; $0{,}5$; $0{,}3$; $0{,}2$; $0{,}1$; $0{,}05$; $0{,}02$; $0{,}01$; $0{,}005$; $0{,}002$; $0{,}001$) вказано значення χ_α^2 для відповідної кількості ступенів волі. Якщо кількість ступенів волі більша від 30, то розподіл мало відрізняється від нормального з відповідними математичним сподіванням і дисперсією.

2. Розподіл Стьюдента. Розподіл Стьюдента з n ступенями волі має випадкова величина $T = \dfrac{X}{V}\sqrt{n}$, де X — нормально розподілена величина з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією, а $V=\sqrt{U}$. Випадкова величина U не залежить від X і має розподіл χ^2 з n ступенями волі. Щільність розподілу $f(t)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$. Графік щільності розподілу Стьюдента за зовнішнім виглядом нагадує нормальні криві. Але вони значно повільніше спадають до осі t, якщо $|t|\to\infty$, особливо за малих значень n (рис. 3.4).

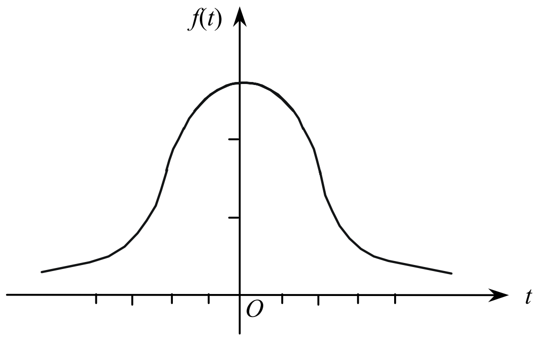

Рис. 3.4

Складено таблиці розподілу Стьюдента, здебільшого виду $F(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} f(z)dz$, для кількості ступенів волі від 1 до 20. Якщо кількість ступенів волі більша, то можна застосовувати нормальний закон розподілу з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

3. Розподіл Фішера. Якщо випадкові величини U і V незалежні і мають χ^2 — розподіл відповідно з n_1 і n_2 ступенями волі, то випадкова величина $F=\dfrac{U}{V}\dfrac{n_2}{n_1}$ має розподіл Фішера з n_1, n_2 ступенями волі. Щільність цього розподілу подається формулою:

$$f_F(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}x^{\frac{n_1}{2}-1}(n_2+n_1x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}},\ x>0.$$

Щільність розподілу Фішера має графік, зображений на рис. 3.5.

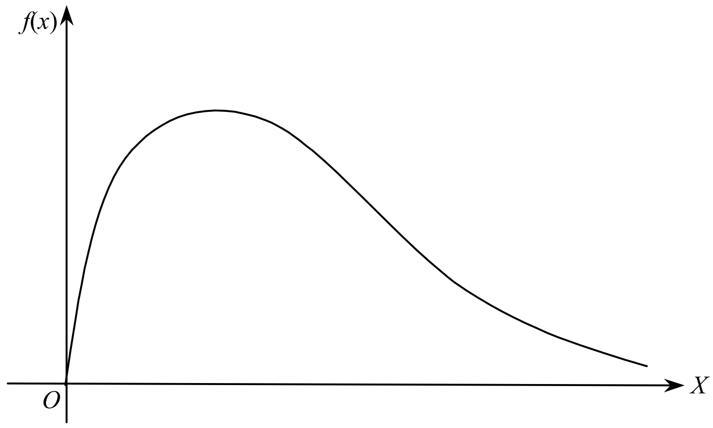

Рис. 3.5

Для розподілу Фішера складено таблиці, в яких для відповідної кількості ступенів волі для ймовірностей $\alpha = 0{,}05$ і $\alpha = 0{,}01$ наведено значення f_α – $P(F > f_\alpha) = \alpha$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Махове колесо виготовляється із двох однакових частин. Маса кожної з них — нормально розподілена величина з математичним сподіванням, що дорівнює a, і дисперсією σ^2. Для балансування колеса важливою є різниця мас зазначених частин. Знайти закон розподілу заданої випадкової величини.

Розв'язання. Позначимо масу першої частини літерою X, а другої — Y. Різниця мас $Z = |X - Y|$. Закони розподілу X і Y задаються щільностями розподілу: $f_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $f_2(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Спільний розподіл X і Y: $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)}$. Область зміни системи (X, Y) — уся числова площина, функція Z набуває невід'ємних значень. При деякому додатному значенні z побудуємо область $|x-y|<z$. Ця область обмежена прямими $x-y-z=0$ і $x-y+z=0$.

Відповідну побудову виконано на рис. 3.6.

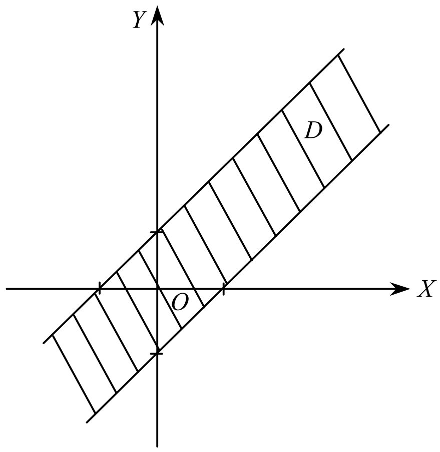

Рис. 3.6

Область $D(z)$, тобто область, для якої $|x-y|<z$, лежить між прямими (на рис. 3.6 її заштриховано). Побудуємо функцію розподілу: $F(z)=\iint\limits_{D(z)} f(x,y)dxdy=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2}dx\int\limits_{x-z}^{2x+z} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-a)^2}dy.$
Диференціюючи функцію розподілу, дістаємо щільність розподілу:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2}\left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+z-a)^2}+e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-z-a)^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-a)^2+(x-a+z)^2\right)}dx+\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma}\left((x-a)^2+(x-a-z)^2\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-a)^2+(x-a)^2+2z(x-a)+z^2\right)}dx+\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-a)^2+(x-a)^2-2z(x-a)+z^2\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left((x-a)^2+z(x-a)\right)}dx+\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left((x-a)^2-z(x-a)\right)}dx\right).$$

Для обчислення знайдених невласних інтегралів застосуємо наведений далі інтеграл, який при $A > 0$ виражається за допомогою інтеграла Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2 \pm 2Bx + C} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{AC - B^2}{A}}.$$

Тоді $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-a)^2 + z(x+a)\right)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-a)^2 - z(x+a)\right)} dx = \sigma\sqrt{\pi} e^{\frac{z^2}{4\sigma^2}}.$

Отже, щільність розподілу буде такою: $f(z) =$

$$= 2\frac{1}{2\pi\sigma^2}\sigma\sqrt{\pi} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{z^2}{4\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}, \ (z > 0).$$

З точністю до сталої дістали так званий напівнормальний закон розподілу.

Приклад 2. Маса деталей — випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку $(2;2{,}5]$. Знайти закон розподілу маси двох деталей.

Розв'язання. Позначимо масу однієї деталі літерою *X*, а другої — *Y*. Вага двох деталей $Z = X + Y$. Закони розподілу X і Y і системи (X, Y) визначаються через щільності розподілу:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 2; \\ 2, \text{ якщо } 2 < x \le 2{,}5; \\ 0, \text{ якщо } x > 2{,}5. \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 2; \\ 2, \text{ якщо } 2 < x \le 2{,}5; \\ 0, \text{ якщо } x > 2{,}5. \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } (x, y) \notin S; \\ 4, \text{ якщо } (x, y) \in S. \end{cases}$$

Множину S зображено на рис. 3.7.

Наведені раніше формули для визначення закону розподілу суми двох випадкових величин застосувати не можна, тому розв'яжемо задачу за загальними правилами. Знайдемо область значень для суми. Очевидно, що $z \in (4;5]$. Пряма $x + y = z$ проходить через множину S і, якщо $4 < z < 4{,}5$, перетинає прямі $x = 2$ і $y = 2$. Область $D(z)$ — множина точок, які лежать нижче від прямої. Справді, якщо підставимо в рівняння прямої, координати, наприклад, точки (2; 2), то вона задовольняє умову. Отже, якщо $z \in (4;4{,}5)$, то область $D(z)$ має такий вигляд, як зображено на рис. 3.8.

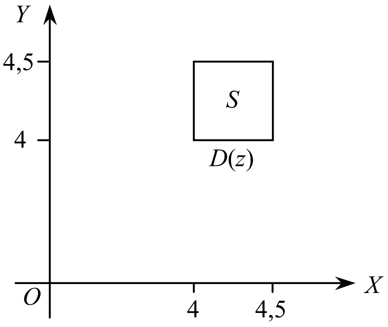

Рис. 3.7

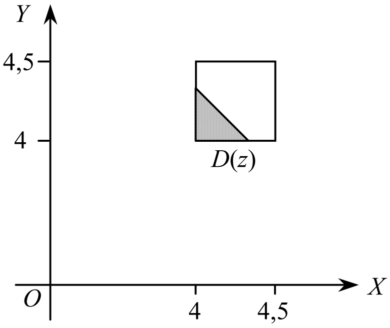

Рис. 3.8

Якщо $z \in (4{,}5;5)$, то пряма $x + y = z$ перетинає прямі $x = 2{,}5$ і $y = 2{,}5$. Область $D(z)$ лежить нижче від прямої (рис. 3.9).

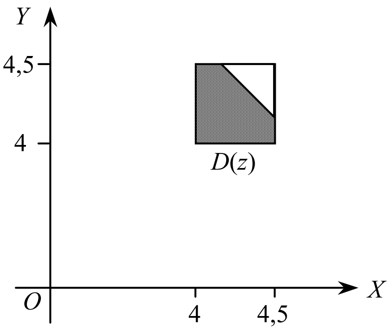

Рис. 3.9

Знайдемо аналітичні вирази для $f(z)$. Якщо $z \le 4$, то $F(z) = 0$ і $f(z) = 0$; якщо $4 < z \le 4{,}5$ то $F(z) = \iint\limits_{D(z)} f(x,y)dxdy = \frac{1}{4}\int\limits_2^{z-2} dx \int\limits_2^{z-x} dy$; $f(z) = \frac{1}{4}\int\limits_2^{z-2} dy = \frac{z-4}{4}$; а якщо $4{,}5 < z \le 5$, то $F(z) = \iint\limits_{D(z)} f(x,y)dxdy =$ $= 1 - \iint\limits_{S \setminus D(z)} f(x,y)dxdy.$

Для того щоб зменшити кількість інтегралів, які потрібно обчислювати, знайдемо ймовірність протилежної події і зінтегруємо за множиною $S \setminus D(z)$ (на рис. 3.10 її не заштриховано):

$$F(z)=1-\frac{1}{4}\int_{z-2,5}^{2,5}dx\int_{z-x}^{2,5}dy;\ f(z)=\frac{1}{4}\int_{z-2,5}^{2,5}dy=\frac{5-z}{4}.$$

Нарешті, якщо $z>5$, $F(z)=1$ і $f(z)=0$. Запишемо щільність розподілу:

$$f(z)=\begin{cases}0, & \text{якщо } z\le 4;\\ \dfrac{z-4}{4}, & \text{якщо } 4<z\le 4{,}5;\\ \dfrac{5-z}{4}, & \text{якщо } 4{,}5<z\le 5;\\ 0, & \text{якщо } z>5.\end{cases}$$

Приклад 3. Для підвищення надійності роботи системи паралельно приєднуються n елементів, тривалість функціонування яких — випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. Знайти закон розподілу для випадкової величини — тривалості роботи системи.

Розв'язання. Елементи з'єднано паралельно, тому тривалість безвідказної роботи $Z=\max\{X_1,X_2,...,X_n\}$. Величина X_i — тривалість безвідказної роботи i-го елемента. Знайдемо функцію розподілу для випадкової величини Z. Вона набуває значень, менших від z, якщо виконується добуток подій $(X_1<z)\bigcap(X_2<z)\bigcap...\bigcap(X_n<z)$. Імовірність добутку цих подій дорівнює добутку їхніх імовірностей:

$$F(z)=P(Z<z)=P((X_1<z)\bigcap(X_2<z)\bigcap...\bigcap(X_n<z))=$$
$$=\prod_{i=1}^{n}P(X_i<z)=(F_1(z))^n.$$

Щільність розподілу $f(z)$ дістаємо, диференціюючи функцію розподілу:

$$f(z)=n(F_1(z))^{n-1}f_1(z).$$

У формулі $F_1(z)$ і $f_1(z)$ — відповідно функція і щільність розподілу величин, які входять до системи.

Приклад 4. Знайти закон розподілу для випадкової величини Z — тривалості безвідказної роботи системи, в якій послідовно з'єднано 4 елементи, час безвідказної роботи яких розподілено показниково з параметром $a = 0{,}01$. Знайти $P(Z \ge 50)$.

Розв'язання. Випадкова величина Z визначаться співвідношенням:

$$Z = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}.$$

Випадкова величина X_i — тривалість безвідказної роботи *і*-го елемента, $i = 1,2,3,4$. Функцію визначено так, бо вихід із ладу довільного елемента виводить систему з робочого стану.

Розглянемо загальний випадок для функції $Z = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Функцію $F(z) = P(Z < z)$ подамо через імовірність протилежної події:

$$F(z) = P(Z < z) = 1 - P(Z \ge z) =$$
$$= 1 - P((X_1 \ge z) \cap (X_2 \ge z) \cap ... \cap (X_n \ge z)).$$

Застосуємо теорему множення ймовірностей, ураховуючи, що $P(X_i \ge z) = 1 - P(X_i < z) = 1 - F_i(z)$. Тоді дістанемо: $F(z) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_i(z))$.

У частинному випадку, якщо всі випадкові величини однаково розподілені з функцією розподілу $F_1(x)$, то маємо: $F(z) = 1 - (1 - F_1(z))^n$. Диференціюємо функцію розподілу:

$$f(z) = n(1 - F_1(z))^{n-1} f_1(z).$$

Повернемося до нашої задачі. Оскільки $n = 4$; $F_1(x) = 1 - e^{-ax}$; $a = 0{,}01$, то

$$f(z) = 4\left(1 - 1 + e^{-az}\right)^3 ae^{-az} = 4ae^{-4az}, \ z \ge 0.$$

Виконаємо обчислення:

$$P(Z \ge 50) = 1 - P(Z < 50) = 1 - \int_0^{50} f(z)dz = 1 - 4a\int_0^{50} e^{-4az}dz = 1 + e^{-4az}\Big|_0^{50} =$$
$$= 1 + e^{-200a} - 1 = e^{-2} \approx 0{,}13534.$$

Вправи для самостійного розв'язування

3.23. Знайти $Z = \varphi(X, Y)$ і область зміни системи (X, Y), коли задано:

$$F(z) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } z \le -2, \\ \int\limits_{-z}^{2} dy \int\limits_{0}^{z+y} f(x, y)\, dx, \quad \text{якщо } -2 < z \le 0, \\ 1 - \int\limits_{z}^{2} dx \int\limits_{0}^{x-z} f(x, y)\, dy, \quad \text{якщо } 0 < z \le 2, \\ 1, \quad \text{якщо } z > 2. \end{cases}$$

3.24. Знайти $Z = \varphi(X, Y)$ і область зміни системи (X, Y), якщо задано:

$$F(z) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } z \le 1, \\ 1 - \left(\int\limits_{\frac{z-1}{2}}^{\frac{z+1}{2}} dx \int\limits_{z-x}^{x+1} f(x,y) dy + \int\limits_{\frac{z+1}{2}}^{\infty} dx \int\limits_{x-1}^{x+1} f(x,y) dy \right), \quad \text{якщо } z > 1. \end{cases}$$

3.25. Знайти $Z = \varphi(X, Y)$ і область зміни системи (X, Y), коли задано

$$F(z) = \begin{cases} 0, \quad \text{якщо } z \le 0, \\ \int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{0}^{zx} f(x,y) dy, \quad \text{якщо } 0 < z \le 0{,}25, \\ \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y}{z}}^{4} f(x,y) dx, \quad \text{якщо } 0{,}25 < z \le 1, \\ 1, \quad \text{якщо } z > 1. \end{cases}$$

3.26. Випадкові величини X і Y розподілені за такими законами: $f(x) = e^{-x}$, якщо $x > 0$, $f(y) = e^{-y}$, якщо $y > 0$. Знайти закон розподілу для випадкової величини $Z = \dfrac{X}{Y}$ і визначити $P(1 \le Z < 5)$.

3.27. Випадкові величини рівномірно розподілені на проміжку (0, 3]. Знайти закон розподілу для $Z = X + Y^2$.

3.28. Випадкові величини рівномірно розподілені на проміжку (1, 3]. Знайти закон розподілу для $Z = \dfrac{X}{X+Y}$.

3.29. Випадкові величини рівномірно розподілені на проміжку (0, 2]. Знайти закон розподілу для $Z = X^2 - Y^2$.

3.30. Випадкові величини рівномірно розподілені на проміжку (1, 2]. Знайти закон розподілу для $Z = \dfrac{Y^2}{X}$.

3.31. Випадкові величини рівномірно розподілені на проміжку (1, 2]. Знайти закон розподілу для $Z = \ln(X+Y)$.

3.32. Тріщини, які утворюються всередині довгих прямокутних пластин листового металу, можна розглядати як відрізки прямої, довжина якої — випадкова величина X, рівномірно розподілена на проміжку (0, l]. Вони розміщені в металі довільним способом. Нехай φ — кут, який утворює відрізок прямої з прямою, що перпендикулярна до сторін пластини. За появи тріщини необхідно вирізати смугу, обмежену прямими, які перпендикулярні до сторін пластини і дотикаються до обох кінців тріщини. Знайти закон розподілу випадкової величини Z — довжини куска, який вирізується.

3.33. Для підвищення надійності роботи вузла приладу паралельно під'єднано *n* однакових елементів, тривалість роботи яких розподілена показниково з параметром *a*. Знайти закон розподілу випадкової величини Z — тривалості роботи приладу. Скільки потрібно взяти елементів, щоб з $P > 0{,}9$ гарантувалася безперервна робота приладу протягом 150 год, якщо $a = 0{,}01$?

3.34. В електричній мережі послідовно з'єднано 5 опорів. Тривалість роботи кожного з них — випадкова величина X зі щільністю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ ax, & \text{якщо } 0 < x \le 5, \\ 0, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

Знайти закон розподілу для випадкової величини Z — тривалості безперервної роботи опорів.

3.35. У разі профілактичного обслуговування обладнання майстер оглядає і за потреби ремонтує *k* верстатів. Відомо, що тривалість ремонту одного верстата — випадкова величина, розподілена показниково з параметром a. Знайти закон розподілу загальної тривалості ремонту.

3.36. Систему випадкових величин (X, Y) задано законом розподілу:

$X \backslash Y$	0	1
–1	0,1	0,15
0	0,15	0,25
1	0,2	0,15

Знайти DZ, якщо $Z = X^2 + 2Y^2$.

3.37. Систему випадкових величин (X, Y) рівномірно розподілено в області, що являє собою багатокутник з вершинами $A(4{,}0)$, $B(4{,}2)$, $C(0{,}2)$, $O(0{,}0)$. Знайти $D(XY)$.

3.38. Тривалість безперервної роботи ЕОМ розподілено показниково з $a = 0{,}01$, Тривалість ремонту розподілено рівномірно на проміжку (0,2; 2]. Вартість виконання ремонту залежить від тривалості ремонту і пов'язана з ним співвідношенням $Y = 0{,}5X^2T$. У цій формулі Y — витрати на ремонт; X — тривалість ремонту; T — тривалість безперервної роботи машини. Знайти математичне сподівання витрат на ремонт за період 720 год.

Розділ 4

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Теорія випадкових процесів — це розділ математичної науки, який вивчає закономірності випадкових явищ у динаміці їхнього розвитку.

4.1. ОЗНАЧЕННЯ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Випадковим процесом $X(t)$ називається процес, значення якого за будь-якого значення аргументу t є випадковою величиною.

Реалізацією випадкового процесу називається детермінована функція $x(t)$, на яку перетворюється випадковий процес $X(t)$ внаслідок випробування, тобто його траєкторія.

Кілька реалізацій певного випадкового процесу зображено на рис. 4.1. Нехай переріз цього процесу при даному t є неперервною випадковою величиною. Тоді випадковий процес $X(t)$ при даному t визначається щільністю ймовірності $\varphi(x,t)$.

Очевидно, що щільність імовірності $\varphi(x,t)$ не є вичерпним заданням випадкового процесу $X(t)$, оскільки вона не виражає залежності між його перерізами в різні моменти часу.

Випадковий процес $X(t)$ являє собою сукупність усіх перерізів за всіх можливих значень t, тому для його задання необхідно розглядати багатовимірну випадкову величину $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))$, утворену з усіх перерізів цього процесу.

Таких перерізів нескінченно багато, але для задання випадкового процесу вдається обмежитись порівняльно невеликою кількістю перерізів.

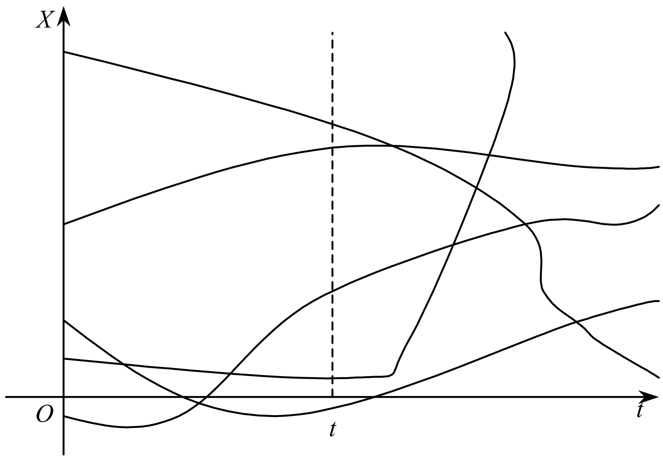

Рис. 4.1

Випадковий процес має порядок n, якщо він повністю визначається щільністю спільного розподілу $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n)$ n довільних перерізів процесу, тобто щільністю n-вимірної випадкової величини $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))$, де $X(t_j)$ — переріз випадкового процесу $X(t)$ у момент часу t_j, $j = 1, 2, ..., n$.

Випадковий процес може бути заданий ***числовими характеристиками***.

Математичним сподіванням випадкового процесу $X(t)$ називається детермінована функція $a_x(t)$, яка за будь-якого значення змінної t дорівнює математичному сподіванню відповідного перерізу випадкового процесу $X(t)$, тобто $a_x(t) = M[X(t)]$.

Дисперсією випадкового процесу $X(t)$ називається детермінована функція $D_x(t)$, яка за будь-якого значення змінної t дорівнює дисперсії відповідного перерізу випадкового процесу $X(t)$, тобто $D_x(t) = D[X(t)]$.

Середнім квадратичним відхиленням $\sigma_x(t)$ випадкового процесу $X(t)$ називається арифметичне значення квадратного кореня з його дисперсії, тобто $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$.

Математичне сподівання випадкового процесу характеризує середню траєкторію всіх можливих його реалізацій, а його дисперсія або середнє квадратичне відхилення — розкид реалізацій відносно середньої траєкторії.

Кореляційною функцією випадкового процесу $X(t)$ називається детермінована функція:

$$K_x(t_1,t_2)=M\left[\left(X(t_1)-a_x(t_1)\right)\left(X(t_2)-a_x(t_2)\right)\right]$$

двох змінних t_1 і t_2, яка для кожної пари змінних t_1 і t_2 дорівнює коваріації відповідних перерізів $X(t_1)$ і $X(t_2)$ випадкового процесу.

Кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)$ характеризує не лише ступінь близькості лінійної залежності між двома перерізами, а й розкид цих перерізів відносно математичного сподівання $a_x(t)$.

Тому розглядається також *нормована кореляційна функція випадкового процесу.*

Нормованою кореляційною функцією випадкового процесу $X(t)$ називається функція

$$\rho_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}.$$

Приклад. Випадковий процес визначається формулою $X(t)=$ $=X\cos\omega t,$ де X — випадкова величина. Знайти основні характеристики цього процесу, якщо $M(x)=a,$ $D(X)=\sigma^2.$

Розв'язання. Згідно з властивостями математичного сподівання і дисперсії маємо:

$$a_x(t)=M[X(t)]=M[X\cos\omega t]=\cos\omega tM(X)=a\cos\omega t;$$

$$D_x(t)=D[X(t)]=D[X\cos\omega t]=\cos^2\omega tD(X)=a\cos^2\omega t\ .$$

Знаходимо далі кореляційну функцію

$$K_x(t_1,t_2)=M\left[(X\cos\omega t_1-a\cos\omega t_1)(X\cos\omega t_2-a\cos\omega t_2)\right]=$$
$$=\cos\omega t_1\cos\omega t_2\cdot M\left[(X-a)(X-a)\right]=\cos\omega t_1\cos\omega t_2\cdot D(X)=$$
$$=\sigma^2\cos\omega t_1\cos\omega t_2,$$

а також нормовану кореляційну функцію

$$\rho_x(t_1,t_2)=\frac{\sigma^2\cos\omega t_1\cos\omega t_2}{(\sigma\cos\omega t_1)(\sigma\cos\omega t_2)}\equiv 1.$$

Випадкові процеси можна класифікувати залежно від того, плавно чи стрибкоподібно змінюються стани системи, в якій вони відбуваються, скінченна чи нескінченна множина цих станів. Серед випадкових процесів особливе місце посідають *марковські випадкові процеси*, що становлять основу теорії масового обслуговування.

4.2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

На практиці часто доводиться стикатися із системами, призначеними для багаторазового використання під час розв'язування однотипних задач. Процеси, які при цьому відбуваються, називають ***процесами обслуговування***, а відповідні системи — *системами масового обслуговування* (СМО).

Прикладами таких систем є телефонні системи, ремонтні майстерні, обчислювальні комплекси, каси, де продаються залізничні чи авіаквитки, магазини, перукарні тощо.

Кожна МСО складається з певної кількості обслуговуваних одиниць (пристроїв, пунктів, станцій), які називатимемо ***каналами*** обслуговування. Каналами можуть бути лінії зв'язку, робочі точки, обчислювальні машини, продавці і т. п. За кількістю каналів СМО поділяються на *одно-* та *багатоканальні*.

Заявки надходять до СМО звичайно не регулярно, а випадково, створюючи так званий ***випадковий потік заявок*** (***посилань***). Обслуговування заявок також триває протягом певного випадкового часу. З огляду на випадковість потоку заявок і часу обслуговування СМО завантажуються нерівномірно: у певні періоди нагромаджується дуже багато заявок (вони або стають у чергу, або залишають СМО не обслуговуваними), в інші періоди СМО працює з недовантаженням або простоює.

Предметом теорії масового обслуговування є побудова математичних моделей, що пов'язують задані умови роботи СМО з показниками її ефективності, які описують здатність цієї системи обробляти потоки заявок.

Показниками ефективності СМО є такі:

— середня кількість заявок, що їх вона обслуговує за одиницю часу;

— середня кількість заявок у черзі;

— середній час очікування обслуговування;

— імовірність відмови (відказу) в обслуговуванні без очікування;

— імовірність того, що кількість заявок у черзі перевищує певне значення тощо.

СМО поділяються на два основні класи: ***СМО з відмовами і СМО з очікуванням*** (***чергою***).

У СМО з відмовами заявка, яка надійшла в момент, коли всі канали були зайняті, отримавши відмову, залишає СМО і в подальшому процесі обслуговування не бере участі.

У СМО з очікуванням заявка, що надходить у момент, коли всі канали зайняті, не залишає систему, а стає в чергу на обслуговування.

Процес роботи СМО являє собою ***випадковий процес***.

Процес називається ***процесом із дискретними станами***, якщо його можливі стани $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ можна зарані перелічити, а перехід системи з одного до іншого відбувається миттєво (стрибкоподібно). Процес називається ***процесом із неперервним часом***, якщо моменти можливих переходів системи з одного стану до іншого не фіксовані заздалегідь, а випадкові.

Процес функціонування СМО являє собою випадковий процес із дискретними станами та неперервним часом.

Математичний аналіз роботи СМО істотно спрощується, якщо процес цієї роботи — ***марковський***.

4.3. ПОНЯТТЯ МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

Випадковий процес називається ***марковським***, якщо для будь-якого моменту часу t_0 імовірнісні характеристики процесу в майбутньому залежать лише від його стану в даний момент t_0 і не залежать від того, коли і як система набула цього стану.

Приклад. Система θ — лічильник у таксі. Стан системи в момент t характеризується кількістю кілометрів, пройдених автомобілем до даного моменту. Нехай у момент t_0 лічильник показує S_0. Імовірність того, що в момент $t > t_0$ лічильник показуватиме ту чи іншу кількість кілометрів S_1, залежить від S_0, але не залежить від того, в які моменти часу змінювались покази лічильника до моменту t_0.

Деякі процеси можна наближено вважати марковськими.

Приклад. Система θ — група шахістів. Стан системи характеризується кількістю фігур супротивника, що збереглися на дошці до моменту t_0. Імовірність того, що в момент $t > t_0$ матеріальна перевага буде на боці одного із супротивників, залежить насамперед від того, в якому стані перебуває система в даний момент t_0, а не від того, коли і в якій послідовності зникали фігури з дошки до моменту t_0.

Аналізуючи випадкові процеси з дискретними станами, зручно користуватися геометричною схемою — так званим ***графом станів***. Зазвичай стани системи зображають прямокутниками (кручежками), а можливі переходи від одного стану до іншого — стрілками, що сполучають стани.

Приклад. Побудувати граф станів такого випадкового процесу: пристрій θ утворено із двох вузлів, кожний з яких у випадковий момент часу може вийти з ладу, після чого негайно починається ремонт вузла, який триває протягом зарані не відомого випадкового часу.

Розв'язання. Можливі стани системи: θ_0 — обидва вузли справні; θ_1 — перший вузол ремонтується, а другий справний; θ_2 — другий вузол ремонтується, а перший справний; θ_3 — обидва вузли ремонтуються.

Граф системи наведено на рис. 4.2.

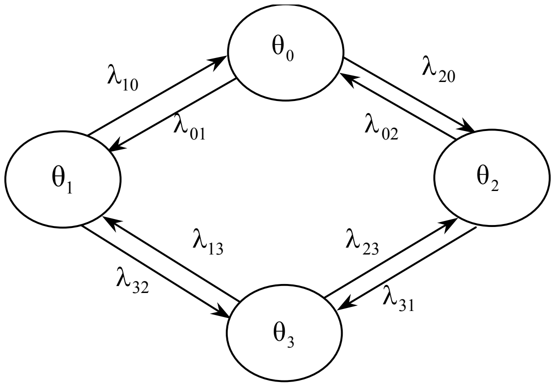

Рис. 4.2

Стрілка, напрямлена із θ_0 до θ_1, означає перехід системи в момент відказу першого вузла; стрілка із θ_1 до θ_0 — перехід у момент закінчення ремонту цього вузла. Стрілки із θ_0 до θ_3 немає, оскільки припускається, що вузли виходять із ладу незалежно один від одного.

Для математичного опису марковського випадкового процесу з дискретними станами і неперервним часом, що відбувається в СМО, розглянемо одне з важливих понять теорії ймовірностей — поняття ***потоку подій***.

4.4. НАЙПРОСТІШИЙ ПОТІК ПОДІЙ

Потоком подій називається послідовність подій, які відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу. Наприклад, потік заявок, що надходить до підприємства побутового обслуговування, потік викликів до телефонної станції, потік відказів (збоїв) під час роботи на ПЕОМ тощо. Середня кількість подій, які відбуваються за одиницю часу, називається ***інтенсивністю потоку***.

Потік називається ***найпростішим***, якщо він має такі властивості:

1) ***стаціонарність*** — імовірність того, що за деякий проміжок часу *t* відбудеться та чи інша кількість подій, залежить лише від довжини проміжку і не залежить від початку його відліку, тобто інтенсивність потоку стала;

2) ***відсутність післядії*** — імовірність настання деякої кількості подій на довільному проміжку часу не залежить від того, яка кількість подій відбулась до початку цього проміжку;

3) ***ординарність*** — імовірність настання двох і більше подій за малий проміжок часу *t* істотно менша за ймовірність того, що відбудеться одна подія.

Якщо потік подій найпростіший, то ймовірність того, що за проміжок часу *t* подія *A* настане *m* раз, визначається формулою: $P_t(m)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}$, де λ — інтенсивність потоку. Ця формула відбиває всі властивості найпростішого потоку, а отже, є його математичною моделлю.

Приклад. Середня кількість заявок, які надходять до комбінату побутового обслуговування за 1 год, дорівнює 4. Знайти ймовірність того, що за 3 год надійде: 1) 6 заявок; 2) менш як 6 заявок; 3) не менш як 6 заявок.

Розв'язання. Нехай подія А — «надходження однієї заявки». Потік заявок найпростіший. Тому для розв'язування задачі застосуємо наведену щойно формулу, в якій $\lambda=4$, $t=3$, $m=6$, $m<6$, $m\geq 6$. Обчислимо відповідні ймовірності.

1) $P_3(6)=\frac{12^6}{6!}e^{-12}\approx 0{,}0249;$

2) $P_3(m_3<6)=P_3(0)+P_3(1)+P_3(2)+P_3(3)+P_3(4)+P_3(5)\approx 1{,}0199;$

3) $P_3(m_3\geq 6)=1-P_3(m<6)=1-0{,}0199=0{,}9801.$

4.5. РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА. ГРАНИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ СТАНІВ

Імовірністю і-го стану називається ймовірність $p_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ того, що в момент *t* система перебуватиме у стані θ_i $(i = 1,2,...,n)$.

Очевидно, що для будь-якого моменту *t* сума ймовірностей станів дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1. \tag{1}$$

Правило побудови рівнянь Колмогорова. У лівій частині кожного з рівнянь має бути похідна ймовірності *і*-го стану. У правій частині — сума добутків імовірностей усіх станів (з яких відбувається перехід до даного стану) на інтенсивності відповідних потоків подій мінус сумарна інтенсивність усіх потоків, що виводять систему із даного *і*-го стану, помножена на ймовірність цього стану.

Наприклад, для системи θ, що має чотири стани θ_0; θ_1; θ_2; θ_3, система диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned}
p_0' &= \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0,\\
p_1' &= \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1,\\
p_2' &= \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2,\\
p_3' &= \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3.
\end{aligned} \tag{2}$$

У системі (2) незалежних рівнянь на одне менше від загальної кількості рівнянь. Тому для розв’язування системи необхідно додати рівняння (1) при *n* = 3.

Особливість розв’язання диференціальних рівнянь взагалі полягає в тому, що потрібно задавати так звані початкові умови, у даному разі — імовірності станів системи в початковий момент $t = 0$. Так, систему (2) маємо розв’язувати за умовою, що в початковий момент обидва вузли справні і система перебувала у стані θ_0, тобто за початкових умов $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$

Рівняння Колмогорова дають змогу знаходити всі ймовірності станів як **функції часу**. Особливий інтерес становить імовірності системи $p_i(t)$ $(i = 1,...,n)$ у ***граничному стаціонарному режимі***, тобто при $t \to \infty$, які називаються ***граничними ймовірностями станів***.

У теорії випадкових процесів доведено, що коли кількість станів системи скінченна і з кожного з них можна перейти до будь-якого іншого стану, то граничні ймовірності існують.

Гранична ймовірність стану θ_i має такий зміст: вона показує середню відносну тривалість перебування системи в цьому стані. Наприклад, якщо гранична ймовірність стану θ_0 становить $p_0 = 0{,}5$, то це означає, що в середньому половину часу система перебуває у стані θ_i.

Приклад 1. Знайти граничні ймовірності для системи θ з прикладу, наведеного на с. 114, граф станів якої наведено на рис. 4.2. При $\lambda_{01} = 1$, $\lambda_{02} = 2$, $\lambda_{10} = 2$, $\lambda_{13} = 2$, $\lambda_{20} = 3$, $\lambda_{23} = 1$, $\lambda_{31} = 3$, $\lambda_{32} = 2$.

Розв'язання. Система алгебраїчних рівнянь, що описує стаціонарний режим для даної системи, належить до виду (1):

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2; \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3; \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, дістаємо $p_0 = 0{,}4$, $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}27$, $p_3 = 0{,}13$. Отже, у граничному стаціонарному режимі система θ в середньому 40 % часу перебуватиме у стані θ_0, 20 % — у стані θ_1, 27 % — у стані θ_2, 13 % — у стані θ_3.

Приклад 2. Знайти прибуток від експлуатації у стаціонарному режимі системи θ, коли відомо, що за одиницю часу справна робота першого та другого вузлів приносить дохід, який становить відповідно 10 і 6 ум. од., а їх ремонт потребує витрат, що становлять відповідно 4 і 2 ум. од.

Оцінити економічну ефективність зменшення вдвічі середньої тривалості ремонту кожного з цих вузлів, якщо в такому разі доведеться вдвічі збільшити витрати на ремонт.

Розв'язання. З прикладу 1 випливає, що в середньому перший вузол справний протягом частки часу, що становить $p_0 + p_2 = 0{,}4 + 0{,}27 = 0{,}67$, а другий вузол — протягом частки $p_0 + p_1 = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$. В такому разі перший вузол перебуває в ремонті в середньому частку часу, що дорівнює $p_1 + p_3 = 0{,}2 + 0{,}13 = 0{,}33$, а другий — $p_2 + p_3 = 0{,}27 + 0{,}13 = 0{,}4$. Тому середній прибуток за одиницю часу від експлуатації системи (різниця між доходом та витратами) буде таким:

ПРИБУТОК = 0,67 ·10 + 0,60 · 6 – 0,33 · 4 – 0,40 ·2 = 8,18 (ум. од)

Зменшення вдвічі середнього часу ремонту кожного з вузлів згідно з $a = \sigma = \frac{1}{\lambda}$ означатиме збільшення вдвічі інтенсивності потоку «закінчення ремонту» кожного вузла. Отже, у такому разі $\lambda_{10} = 4$, $\lambda_{20} = 6$, $\lambda_{31} = 6$, $\lambda_{32} = 4$ і система лінійних алгебраїчних рівнянь (1) набирає вигляду:

$$\begin{cases} 3p_0 = 4p_1 + 6p_2; \\ 6p_1 = p_0 + 6p_3; \\ 7p_2 = 2p_0 + 4p_3; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, дістаємо $p_0 = 0{,}6$, $p_1 = 0{,}15$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}05$.

Оскільки $p_0 + p_2 = 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8$; $p_0 + p_1 = 0{,}6 + 0{,}15 = 0{,}75$, $p_1 + p_3 = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2$; $p_2 + p_3 = 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}25$, то витрати на ремонт першого та другого вузла становитимуть відповідно 8 і 4 ум. од. Звідси маємо середній прибуток за одиницю часу:

$(\text{ПРИБУТОК})_1$ = 0,8 ·10 + 0,75 · 6 – 0,2 · 8 – 0,25 · 4 = 9,9 (ум. од.).

$(\text{ПРИБУТОК})_1$ більший за ПРИБУТОК (наближено — на 2 %), тому економічна доцільність скорочення термінів ремонту вузлів очевидна.

Вправи для самостійного розв'язування

4.1. Середня кількість літаків, які прибувають до аеропорту за 1 хв, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що до 2 хв прибуде:

1) 4 літаки;
2) менш як 4 літаки;
3) не менш як 4 літаки.

Потік прибуття літаків вважається найпростішим.

4.2. Середня кількість викликів, які надходять на АТС за 1 хв, дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що за 4 хв надійде:

1) 3 виклики;
2) менш як 3 виклики;
3) не менш як 3 виклики.

Потік викликів вважається найпростішим.

4.3. Середня кількість обривів ниток на ткацькому верстаті за хвилину становить 3. Знайти ймовірність того, що за 3 хв буде:

1) 5 обривів ниток;
2) менш як 5 обривів ниток;
3) не менш як 5 обривів ниток.

Потік подій вважається найпростішим.

4.4. На АТС надходить найпростіший потік викликів з інтенсивністю $\lambda = 1{,}2$ викликів за хвилину. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини:

1) не надійде жодного виклику;
2) надійде рівно один виклик;
3) надійде хоча б один виклик.

4.5. Випадковий процес описується формулою $X(t) = Xe^{-t}$ $(t > 0)$, де X — випадкова величина, розподілена за нормальним законом з параметрами a і σ^2. Знайти математичне сподівання, дисперсію, кореляційну і нормовану кореляційну функції випадкового процесу.

4.6. Побудувати граф станів такого випадкового процесу: систему утворено з двох автоматів з продажу газованої води, кожний з яких може бути зайнятим або вільним.

4.7. Побудувати граф станів системи θ, що являє собою електричне коло з електричною лампочкою, яка у випадковий момент часу може бути або вимкненою, або ввімкненою, або зіпсованою.

4.8. Знайти граничні ймовірності для систем θ, графи яких зображено на рис. 4.3 і 4.4.

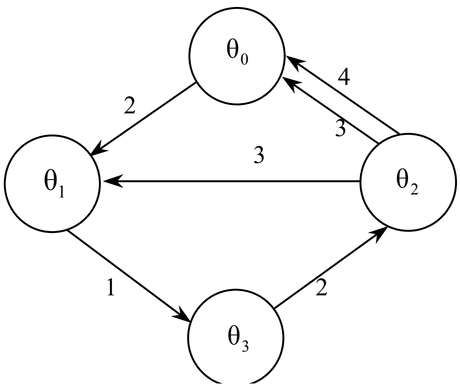

Рис. 4.3

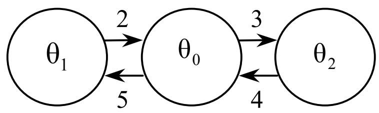

Рис. 4.4

4.9. Середня кількість заявок на таксі, що надходять на диспетчерський пункт за 1 хв, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини надійде:

1) 4 виклики;

2) принаймні один виклик;

3) не надійде жодного виклику.

4.10. Погода на деякому острові через певні проміжки часу стає чи дощовою (Д), чи сонячною (С). Імовірності щоденних змін задано матрицею:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{Д} & \text{С} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Д} \\ \text{С} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

1) Якщо в середу погода дощова, то яка ймовірність того, що вона буде дощовою в найближчу п'ятницю?

2) Якщо в середу очікується дощова погода з імовірністю 0,3, то яка ймовірність того, що вона буде дощовою в найближчу п'ятницю?

4.11. Імовірності переходу за один крок у ланцюгу Маркова задано матрицею:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Потрібно: 1) знайти кількість станів; 2) побудувати граф, що відповідає матриці P.

4.12. Довести, що всі стохастичні матриці виду

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix},$$

де $0 < \alpha < 1$ мають однаковий стаціонарний розподіл.

Розділ 5

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

5.1. ПЕРВИННА ОБРОБКА І ГРАФІЧНЕ ПОДАННЯ ВИБІРКОВИХ ДАНИХ. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИБІРКОВОЇ СУКУПНОСТІ

Генеральною сукупністю в математичній статистиці називається множина однотипних об'єктів, кількісна чи якісна ознака яких підлягає вивченню. Підмножина об'єктів, дібраних у відповідний спосіб із генеральної сукупності, називається ***вибірковою сукупністю***. Вважаємо, що ознака, яка вивчається, є випадковою величиною X із функцією розподілу $F(x)$. Результати вибірки розглядатимемо як послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$. Закон розподілу для всіх X_i визначається функцією $F(x)$. Результати вибірки — реалізації випадкових величин — позначатимемо відповідно через $x_1, x_2, ..., x_n$. Розмістивши ці числа в порядку зростання і записавши частоти n_i, з якими зустрічаються ці значення, дістанемо ***варіаційний***, або ***статистичний***, ряд:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
Частоти	n_1	n_2	…	n_k

На підставі такого ряду можна побудувати статистичну функцію розподілу $F_n^*(x) = \sum\limits_{x_i < X} \frac{n(x_i)}{n}$. Якщо $n \to \infty$, то статистична функція розподілу збігається до теоретичної функції розподілу.

Статистичний ряд графічно подається ***полігоном розподілу***. Щоб побудувати його, на осі абсцис відкладають значення реалізацій, а на осі ординат — відповідні їм частоти (відносні частоти). Здобуті точки сполучають відрізками прямих.

У разі, коли X — неперервна величина і обсяг вибірки великий, результати вибірки подають інтервальним рядом. Для цього область реалізацій розбивають на k інтервалів і для кожного інтервалу визначають частоти. Кількість інтервалів $k \le 5\lg n$, а їхню довжину Δx_i найчастіше беруть однаковою. Здобутий ряд геометрично подається гістограмою. Для побудови її на осі абсцис відкладають інтервали, а на них як на основах будують прямокутники, висота яких пропорційна до частоти (відносної частоти) інтервалу. Гістограма дає певне уявлення про графік щільності розподілу.

Для вибіркової сукупності обчислюють числові характеристики — вибіркові випадкові функції: вибіркову середню $\overline{X}$, вибіркову дисперсію S^2, статистичні моменти розподілу тощо. Реалізації цих вибіркових функцій знаходять за формулами, вигляд яких залежить від того, в якій формі подано вибіркові дані. Якщо вибіркові дані не згруповано, то $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$.

Якщо вибіркові дані зведено у статистичний ряд, то $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$, $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 n_i$.

Якщо дані подаються інтервальним рядом, то перехід до статистичного ряду виконують, обчислюючи для кожного інтервалу його середину.

Початкові і центральні статистичні моменти розподілу обчислюють відповідно за такими формулами

$$\nu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \ \text{ і } \ \mu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Формули, за якими центральні статистичні моменти подаються через початкові, аналогічні тим, які виконуються для теоретичних моментів розподілу.

Крім того, розглядають звичайні і умовні моменти розподілу. Звичайні моменти обчислюють за формулою $h_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - C\right)^r$. У разі подання вибіркових даних інтервальним рядом з однаковими довжинами інтервалів обчислення числових характеристик значно спрощується завдяки застосуванню умовних моментів розподілу. Якщо u_i — середини інтервалів і виконано заміну $v_i = \frac{u_i - C}{\Delta x}$ за умови, що C — одне зі значень u_i, то значення v_i

будуть цілими числами. Тоді $h_r^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} v_i^r n_i$ — умовні моменти розподілу. Звичайні моменти розподілу пов'язані з умовними формулою $h_r = (\Delta x)^r h_r^*$. Це дає змогу обчислювати всі числові характеристики з допомогою умовних моментів розподілу: $\bar{x} = C + \Delta x h_1^*$, $s^2 = (\Delta x)^2\left(h_2^* - \left(h_1^*\right)^2\right)$ тощо. Дисперсію часто обчислюють за формулою $s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$.

Якщо розглядається вибірка із двовимірної сукупності (X, Y), то за великого її обсягу зручною формою подання даних є кореляційна таблиця. Щоб побудувати її, області реалізацій за обома змінними розбивають на інтервали. В такому разі, як правило, $\Delta x_i = \Delta x$ і $\Delta y_j = \Delta y$. Для перетинів відповідних інтервалів визначають частоти n_{ij}. Коли обчислюють числові характеристики, то кожний інтервал характеризують його серединою. Крім середніх значень і вибіркових дисперсій для складових системи визначають статистичний кореляційний момент $K_{XY}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})n_{ij}$ і вибірковий коефіцієнт кореляції $r_{xy} = \frac{K_{xy}^*}{s_x \cdot s_y}$. Побудувавши кореляційну таблицю з $\Delta x_i = \Delta x$ і $\Delta y_j = \Delta y$, для обчислення числових характеристик можна використати умовні моменти розподілу. З цією метою виконують заміну змінних $u_i = \frac{x_i - C_1}{\Delta x}$, $v_j = \frac{y_j - C_2}{\Delta y}$ (C_1 і C_2 — відповідно деякі значення x_i і y_j). Числові характеристики вибірки можна знайти за формулами:

$$\bar{x} = C_1 + \Delta x\bar{u},\ \mathrm{s}_{\mathrm{x}}^2 = (\Delta x)^2\left(\overline{u^2} - (\bar{u})^2\right) = (\Delta x)^2 s_u^2;$$

$$\bar{y} = C_2 + \Delta y\bar{v},\ s_y^2 = (\Delta y)^2\left(\overline{v^2} - (\bar{v})^2\right) = (\Delta y)^2 s_v^2;$$

$$K_{xy}^* = \Delta x\Delta y(\overline{uv} - \bar{u}\bar{v}) = \Delta x\Delta y K_{uv}^*;\ r_{xy} = \frac{K_{uv}^*}{s_u s_v}.$$

Значення середніх величин обчислюють за відомими формулами.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. У цеху встановлено 5 верстатів. Протягом 25 днів реєструвалась кількість верстатів, які не працювали. Здобуто такі значення: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 5, 0. Побудувати статистичну функцію розподілу. Знайти $\max\limits_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right|$, вважаючи, що виконується біноміальний закон розподілу з $p = \frac{1}{3}$. Обчислити $\bar{x}$ і s^2. Порівняти знайдені значення з MX і DX згідно з гіпотезою про закон розподілу, а також знайти m_o, m_e, R.

Розв'язання. На підставі вибіркових даних складемо статистичний ряд:

x_i	0	1	2	3	4	5
Частоти	5	7	7	4	1	1

Запишемо статистичну функцію розподілу, скориставшись формулою $F_n^*(x) = \sum\limits_{x_i < x} \frac{n(x_i)}{n}$.

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \frac{1}{5}, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ \frac{12}{25}, & \text{якщо } 1 < x \le 2; \\ \frac{19}{25}, & \text{якщо } 2 < x \le 3; \\ \frac{23}{25}, & \text{якщо } 3 < x \le 4; \\ \frac{24}{25}, & \text{якщо } 4 < x \le 5; \\ 1, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

Щоб визначити $\max\limits_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right|$, знайдемо функцію розподілу за біноміальним законом з $n = 5$ і $p = \frac{1}{3}$.

Обчислимо ймовірності: $P(X=m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$;

$$P(X=0)=\frac{32}{243};\;\; P(X=1)=\frac{80}{243};\;\; P(X=2)=\frac{80}{243};\;\; P(X=3)=\frac{40}{243};$$

$$P(X=4)=\frac{10}{243};\;\; P(X=5)=\frac{1}{243}.$$

Запишемо теоретичну функцію розподілу згідно з формулою $F(x)=\sum\limits_{x_i<x} p(x_i)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0; \\ \dfrac{32}{243}, & \text{якщо } 0<x\le 1; \\ \dfrac{112}{243}, & \text{якщо } 1<x\le 2; \\ \dfrac{192}{243}, & \text{якщо } 2<x\le 3; \\ \dfrac{232}{243}, & \text{якщо } 3<x\le 4; \\ \dfrac{242}{243}, & \text{якщо } 4<x\le 5; \\ 1, & \text{якщо } x>5. \end{cases}$$

Визначимо модуль максимальної різниці значень теоретичної та статистичної функцій розподілу:

$$\max_x \left|F(x)-F_n^*(x)\right|=$$

$$=\max\left|0-0;\frac{32}{243}-\frac{1}{5};\frac{112}{243}-\frac{12}{25};\frac{192}{243}-\frac{19}{25};\frac{232}{243}-\frac{23}{25};\frac{242}{243}-\frac{24}{25};1-1\right|=\frac{83}{1215}.$$

Істотність знайденого відхилення буде оцінено пізніше, під час перевірки статистичних гіпотез за критерієм Колмогорова.

Знайдемо числові характеристики вибіркової сукупності.

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i=\frac{1}{25}(7+14+12+4+5)=1{,}68.$$

Дисперсію визначимо за формулою $s^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$. Знайдемо середнє значення квадрата x:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{25}(7 + 28 + 36 + 16 + 25) = 4{,}48.$$

Отже, $s^2 = 4{,}48 - (1{,}68)^2 = 1{,}6576.$

Згідно з гіпотезою про закон розподілу теоретичні числові характеристики $MX \approx 1{,}67;\ DX \approx 1{,}11.$ Бачимо, що значення математичного сподівання і вибіркового середнього різняться мало, тоді як між теоретичною і вибірковою дисперсією різниця значна.

Вибірковий розподіл має два значення з найбільшою частотою, розподіл двомодальний, медіана розподілу $m_e = 2.$ Розмах варіації R = 5 – 0 = 5.

Приклад 2. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом n = 32. Здобуто такі реалізації випадкової величини: 2,2; 7,1; 6,3; 3,9; 5,9; 5,6; 5,6; 4,7; 7,9; 3,2; 6,1; 5,5; 6,4; 6,0; 6,9; 4,7; 6,4; 6,9; 6,7; 7,9; 4,2; 6,7; 6,0; 9,2; 5,5; 6,5; 3,5; 4,9; 7,2; 4,9; 8,9; 5,7. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Запропонувати гіпотезу про вигляд $F(x)$ у сукупності. За допомогою умовних моментів розподілу знайти $\overline{x}$, s^2, As^*, Ek^*.

Розв'язання. Для побудови інтервального ряду розбиваємо область реалізацій на 7 інтервалів з однаковими довжинами інтервалів: $\Delta x = \dfrac{\max\limits_i(x_i) - \min\limits_i(x_i)}{7}$; $\Delta x = \dfrac{9{,}2 - 2{,}2}{7} = 1.$ Частоти кожного інтервалу знайдемо, визначивши для кожного значення інтервал. Якщо значення x_i потрапляє на межу, то збільшуємо на 1 частоту нижнього інтервалу.

Інтервал	2,2—3,2	3,2—4,2	4,2—5,2	5,2—6,2	6,2—7,2	7,2—8,2	8,2—9,2
Частота	2	3	4	9	10	2	2

Згідно зі знайденим рядом будуємо гістограму (рис. 5.1).

На підставі побудованої гістограми можна висунути гіпотезу про нормальний закон розподілу в сукупності.

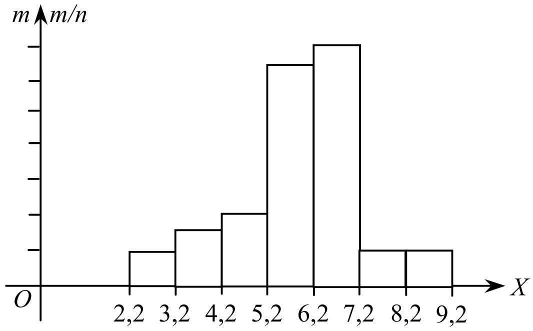

Рис. 5.1

Для обчислення умовних моментів розподілу складемо таблицю, в якій запишемо середини інтервалів $u_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, їхні частоти n_i і нові змінні $v_i = \dfrac{u_i - C}{\Delta x}$. Візьмемо C, що дорівнює $u_4 = 5{,}7$. У наступних стовпцях обчислені значення $v_i n_i$, $v_i^2 n_i$, $v_i^3 n_i$, $v_i^4 n_i$, а в останньому рядку таблиці — їхні суми.

u_i	n_i	v_i	$v_i n_i$	$v_i^2 n_i$	$v_i^3 n_i$	$v_i^4 n_i$
2,7	2	–3	–6	18	–54	162
3,7	3	–2	–6	12	–24	48
4,7	4	–1	–4	4	–4	4
5,7	9	0	0	0	0	0
6,7	10	1	10	10	10	10
7,7	2	2	4	8	16	32
8,7	2	3	6	18	54	162
Сума	32	—	4	70	–2	418

Знайдемо умовні моменти розподілу від першого до четвертого порядків включно:

$$h_1^* = \frac{\sum v_i n_i}{n} = \frac{4}{32} = 0{,}125; \quad h_2^* = \frac{\sum v_i^2 n_i}{n} = \frac{70}{32} = 2{,}1875;$$

$$h_3^* = \frac{\sum v_i^3 n_i}{n} = \frac{-2}{32} = -0{,}0625; \quad h_4^* = \frac{\sum v_i^4 n_i}{n} = \frac{418}{32} = 13{,}0525.$$

Визначимо числові характеристики за допомогою умовних моментів розподілу:

$$\overline{x} = C + h_1^* \Delta x = 5{,}7 + 0{,}125 \cdot 1 = 5{,}825;$$

$$s^2 = (\Delta x)^2 \left(h_2^* - \left(h_1^*\right)^2 \right) = 2{,}1875 - (0{,}125)^2 \approx 2{,}172;$$

$$\mu_3^* = (\Delta x)^3 \left(h_3^* - 3h_2^* h_1^* + 2\left(h_1^*\right)^3 \right) = -0{,}0625 -$$
$$- 2{,}1875 \cdot 0{,}125 + 2(0{,}125)^3 \approx -0{,}332031;$$

$$\mu_4^* = (\Delta x)^4 \left(h_4^* - 4h_3^* h_1^* + 6h_2^* \left(h_1^*\right)^2 - 3\left(h_1^*\right)^4 \right) = 13{,}0625 + 4 \cdot 0{,}0625 \cdot 0{,}125 +$$

$$+ 6 \cdot 2{,}1875(0{,}125)^2 - 3(0{,}125)^4 \approx 13{,}29809; \; A_S^* = \frac{\mu_3^*}{s^3} = -\frac{0{,}332031}{\sqrt{(2{,}172)^3}} \approx -0{,}1037;$$

$$E_k^* = \frac{\mu_4^*}{s^4} - 3 = \frac{13{,}29809}{(2{,}172)^2} - 3 \approx -0{,}1812.$$

Отже, асиметрія та ексцес близькі до нуля, чим підтверджується припущення про нормальний закон розподілу в сукупності.

Приклад 3. Було виміряно чутливість відео- X і звукового Y каналів телеприймачів. Дані вимірювань наведено в таблиці.

X	5,8	1,2	4,8	1,8	0,9	2,2	5,3	3,6	4,4	3,0
Y	1,2	1,7	0,7	4,9	4,2	1,2	1,6	1,5	1,5	2,0
X	3,6	5,7	4,2	4,0	4,1	5,8	5,5	4,2	3,2	3,3
Y	1,5	1,8	1,7	1,5	1,5	1,3	1,7	1,0	0,7	2,3
X	1,7	3,0	4,5	4,8	3,8	4,2	4,5	3,7	3,6	5,0
Y	3,5	1,4	0,9	0,8	1,8	1,8	1,4	1,5	2,7	1,2

Визначити числові характеристики вибіркової сукупності.

Розв'язання. Складемо на основі наведених даних кореляційну таблицю. За кожною змінною область реалізацій розбивається на 7 інтервалів:

$$\min\{x_i\} = 0{,}9; \; \max\{x_i\} = 5{,}8; \; \Delta x = 0{,}7; \; \min\{y_i\} = 0{,}7; \; \max\{y_i\} = 4{,}9; \; \Delta y = 0{,}6.$$

Y \ X	0,7—1,3	1,3—1,9	1,9—2,5	2,5—3,1	3,1—3,7	3,7—4,3	4,3—4,9	n_{x_i}
0,9—1,6		1				1		2
1,6—2,3	1				1		1	3
2,3—3,0	1	1	1					2
3,0—3,7	1	3	1	1				6
3,7—4,4		6						7
4,4—5,1	4	1						5
5,1—6,1	2	3						5
n_{y_j}	9	15	2	1	1	1	1	

Обчислюючи частоти n_{ij}, розглядають пари значень (x_i, y_i) і за кожною змінною визначають інтервал, в який вони потрапляють, та збільшують на 1 частоту n_{ij}. Якщо значення змінної потрапляє на межу інтервалу, то збільшують частоту нижнього інтервалу.

Додаючи частоти n_{ij} за рядками і стовпцями, дістанемо відповідно n_{x_i} і n_{y_j}. Щоб знайти числові характеристики, перейдемо до середин інтервалів за обома змінними і обчислимо змінні u та v за формулами $u_i = \dfrac{x_i - C_1}{\Delta x}$; $v_j = \dfrac{y_j - C_2}{\Delta y}$. При цьому $C_1 = 14{,}05$; $C_2 = 1{,}6$. Перейдемо до нової таблиці.

u \ v	–1	0	1	2	3	4	5	n_{x_i}
– 4		1				1		2
–3	1				1		1	3
–2		1	1					2
–1	1	3	1	1				6
0	1	6						7
1	4	1						5
2	2	3						5
n_{y_j}	9	15	2	1	1	1	1	

Знайдемо середні значення величин u, v, їхніх квадратів і добутку.

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum u_i n_{x_i} = \frac{-8-9-4-6+5+10}{30} = -0{,}4; \quad \overline{v} = \frac{1}{n}\sum v_j n_{y_j} =$$

$$= \frac{-9+2+2+3+4+5}{30} \approx 0{,}2333;$$

$$\overline{u^2} = \frac{1}{n}\sum u_i^2 n_{x_i} = \frac{32+27+8+6+5+20}{30} \approx 3{,}267;$$

$$\overline{v^2} = \frac{1}{n}\sum v_j^2 n_{y_j} = \frac{9+2+4+9+16+25}{30} \approx 2{,}167;$$

$$\overline{uv} = \frac{1}{n}\sum_i\sum_j u_i v_j n_{ij} = \frac{-16+3-9-15-2+1-1-2-4-4}{30} \approx -1{,}633.$$

Відшукуємо числові характеристики сукупності:

$$\overline{x} = C_1 + \Delta x\overline{u} = 4{,}05 - 0{,}7\cdot 0{,}4 = 3{,}77;$$

$$\overline{y} = C_2 + \Delta y\overline{v} = 1{,}6 + 0{,}6\cdot 0{,}2333 = 1{,}74;$$

$$s_x^2 = (\Delta x)^2\left(\overline{u^2} - (\overline{u})^2\right) = (0{,}7)^2\left(3{,}267 - (-0{,}4)^2\right) \approx 1{,}522;$$

$$s_y^2 = (\Delta y)^2\left(\overline{v^2} - (\overline{v})^2\right) = (0{,}6)^2\left(2{,}167 - (0{,}2333)^2\right) \approx 0{,}7604;$$

$$K_{xy}^* = \Delta x\Delta y\left(\overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v}\right) = 0{,}7\cdot 0{,}6\left(-1{,}633 + 0{,}4\cdot 0{,}2333\right) \approx$$

$$\approx -0{,}6468; \quad r_{xy} = \frac{K_{xy}^*}{s_x s_y} = \frac{\overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v}}{s_u s_v} = \frac{-1{,}633 + 0{,}4\cdot 0{,}2333}{\sqrt{3{,}107\cdot 2{,}112}} \approx -0{,}6012.$$

Вправи для самостійного розв'язування

5.1. Кількість деталей, потрібних для ремонту обладнання на тиждень, визначалася на підставі спостережень, здійснюваних протягом 20 тижнів. У результаті було здобуто такі значення: 0, 1, 1, 1, 0, 0, 2, 3, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 4, 0, 5, 2, 3. Побудувати статистичну функцію розподілу і знайти $\max\limits_x\left|F(x) - F_n^*(x)\right|$, вважаючи, що кількість використовуваних деталей має розподіл Пуассона з $a = 1$. Обчислити $\overline{x}$ і s^2 за вибірковими даними і зіставити їх зі значеннями MX і DX, згідно з висунутою гіпотезою про закон розподілу у сукупності.

5.2. Для оцінювання ймовірності настання події було проведено 10 серій послідовних випробувань до першого успішного випробування. У результаті здобуто такі значення: 4, 3, 5, 3, 4, 4, 3, 5, 3, 4. Побудувати статистичну функцію розподілу і знайти $\max\limits_x |F(x) - F_n^*(x)|$, вважаючи, що справджується геометричний розподіл з p = 0,25. Знайти $\bar{x}$ і s^2, а також MX і DX для відповідного геометричного розподілу.

5.3. У вимірювальному приладі установлено 5 однотипних опорів. Під час експлуатації 15 приладів протягом року кількість опорів, які довелося замінити, була такою: 1, 3, 2, 0, 4, 1, 5, 5, 5, 4, 3, 4, 2, 1, 2. Побудувати статистичну функцію розподілу. Знайти $\max\limits_x |F(x) - F_n^*(x)|$, вважаючи, що кількість замінених опорів має розподіл Пуассона з $a = 3$. Знайти вибіркові середню величину та дисперсію і зіставити їхні значення з числовими характеристиками відповідного розподілу Пуассона.

5.4. Для контролю якості продукції, що належить певній сукупності, було зроблено серію вибірок обсягом n = 20. У результаті 10 серій дістали такі значення кількості бракованих деталей: 1, 3, 2, 1, 4, 3, 1, 1, 2, 1. Побудувати статистичну функцію розподілу і знайти $\max\limits_x |F(x) - F_n^*(x)|$, наблизивши гіпергеометричний розподіл розподілом Пуассона з $a = 2$. Знайти $\bar{x}$ і s^2, зіставивши їхні значення зі значенням a.

5.5. Маємо дані про строк служби радіоламп (у тисячах годин): 0,45; 0,21; 0,14; 0,15; 1,52; 0,1; 0,52; 1,59; 3,38; 2,25; 0,8; 1,26; 2,31; 0,84; 3,72; 2,11; 1,02; 4,2; 2,53; 0,78; 2,92; 0,71; 4,7; 3,02; 1,58; 4,12; 2,59; 0,88; 0,96; 1,76; 1,93; 4,9; 2,82; 1,14; 5,7; 1,21; 1,47; 3,52; 0,36; 0,64. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Висунути гіпотезу про закон розподілу в сукупності. Знайти $\bar{x}$ і s^2.

5.6. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом n = = 30. Здобуто такі вибіркові значення: 4; 4,3; 5,68; 6,2; 5,64; 5,8; 4,25; 5,4; 5,3; 5,2; 4,55; 5,32; 6; 6,15; 4,56; 6,64; 6,5; 4,7; 6,8; 6,15; 5,6; 5,1; 4,2; 4,8; 6,9; 7; 4,9; 5; 5,25; 6,2. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Висунути гіпотезу про закон розподілу в сукупності. Обчислити $\bar{x}$ і s^2.

5.7. У результаті свердління отворів тим самим свердлом та вимірювання діаметрів дістали такі дані, у мм: 40,25; 40,29; 40,46; 40,33; 40,37; 40,27; 40,39; 40,34; 40,33; 40,35; 40,38; 40,32; 40,28; 40,41; 40,45; 40,39; 40,29;40,3; 40,44; 40,37; 40,41; 40,33; 40,35; 40,35; 40,35; 40, 40; 40, 40; 40,3; 40,28; 40,34; 40,45; 40,44.

Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Висунути гіпотезу про закон розподілу сукупності. Знайти $\bar{x}$ і s^2.

5.8. У ВТК було виміряно глибину паза 40 плашок. Результати вимірювання, мм: 2,41; 2,62; 2,73; 2,52; 2,54; 2,41; 2,81; 2,53; 2,64; 2,61; 2,72; 2,45; 2,52; 2,1; 2,64; 2,52; 2,5; 2,33; 2,24; 2,4; 2,72; 2,51; 2,4; 2,61; 2,42; 2,43; 2,65; 2,54; 2,35; 2,54; 2,62; 2,9; 2,75; 2,24; 2,65; 2,45; 2,53; 2,32; 2,24; 2,55. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Висунути гіпотезу про закон розподілу в сукупності. Знайти вибіркове середнє, дисперсію, асиметрію і ексцес розподілу.

5.9. Вимірявши вміст кремнію Y у чавуні за різних температур X шлаку, дістали такі значення:

X	1330	1460	1335	1340	1340	1345	1405	1400	1395	1440	1445
Y	0,27	0,8	0,38	0,45	0,42	0,32	0,33	0,52	0,4	0,55	0,65
X	1450	1365	1410	1455	1415	1375	1380	1420	1470	1475	1425
Y	0,92	0,28	0,44	0,7	0,52	0,37	0,38	0,47	0,9	1,1	0,53
X	1385	1390	1430	1482	1340	1410	1420	1460	1470	1340	1350
Y	0,4	0,51	0,43	1,23	0,38	0,5	0,53	0,58	0,81	0,49	0,62
X	1410	1430	1415	1440	1340	1360	1365				
Y	0,8	0,74	1,02	1,12	0,48	0,6	0,62				

Визначити числові характеристики вибірки.

5.10. Під час аналізу 40 проб руди дістали такі результати про вміст свинцю X і срібла Y у відсотках:

X	1	1,3	27,3	5,3	10,9	34,6	1,4	16,8	5,9	29,8	1,3
Y	0,7	3,3	21,6	4,9	8,6	17,3	3,2	11,5	6,3	21,2	2,6
X	19,4	11,8	2,6	27,8	4,8	3,4	4,2	23,5	6,8	14,5	7,5
Y	17,2	10,7	3,4	23,1	3,6	2	5,8	22,4	9,7	13,2	6,7
X	4,7	24,3	18,7	4,6	14,8	9,3	32,6	8,6	8,8	21,4	13,7
Y	16,8	19,6	18,2	3,5	15,8	7,2	21,3	7,4	10,2	19,3	12,1
X	4,5	7,8	4,1	6,2	7,4	22,4	4,5				
Y	3,1	22,3	3,6	5,8	7,3	19,5	3,6				

Знайти числові характеристики вибірки.

5.11. На металургійному заводі зробили аналіз 30 плавок сталі, урахувавши вигоряння кремнію X і вихід сталі Y. Дістали такі значення, %:

X	7,9	0,9	3,7	8,1	6,9	0,8	6	7,2	8,8	10,2	11
Y	70	85	100	78	78	98	59	87	9	44	82
X	0,5	4,6	9,7	1	2,3	3,4	1,5	2,6	4,2	5,2	3,9
Y	97	68	92	92	89	92	90	87	78	94	93
X	4,2	8,3	5,3	4,2	1,3	2,5	3,6	4,8			
Y	71	69	73	69	89	75	70	71			

Знайти числові характеристики вибірки.

5.12. Виконавши вимірювання межі текучості X і межі міцності Y 30 марок сталі, дістали такі результати:

X	154	133	58	145	94	113	74	121	119	112	85
Y	178	164	75	161	107	141	94	127	138	125	97
X	41	96	45	99	51	101	167	87	88	83	106
Y	74	113	89	109	95	114	207	101	139	98	111
X	92	85	112	98	103	99	104	107			
Y	104	103	118	102	108	119	128	118			

Знайти числові характеристики вибірки.

5.13. Середню температуру повітря у червні в Москві та Ярославлі вимірювали протягом 40 років. Дані вимірювання наведено в таблиці:

X	12	12	12	12,8	12	13,8	13,1	13	13,9	14,2	14
Y	10,8	11,3	12	11	12	9,8	11,5	13	10,1	10	10
X	14	13,9	15	14,9	14,9	14,2	15	15,5	15,9	16	15,9
Y	12	12,4	11	13	14,2	13,8	16	13,9	14,7	13	15
X	16	16,9	17,2	16,9	16,9	17	16,8	17,5	18	18	18,1
Y	16	12,9	13,9	14,8	15	16	17	16	14	14	14,8
X	18,4	19,2	19,3	20	20	14	14				
Y	17,8	15	16	17	17,7	14,8	15,2				

Знайти числові характеристики вибірки.

5.2. ТОЧКОВІ ТА ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

Оцінка параметра розподілу сукупності θ у загальному випадку є випадковою величиною, яка визначається за даними вибірки і використовується замість невідомого значення параметра, який потрібно оцінити.

Оцінка називається ***обґрунтованою***, якщо вона збігається за ймовірністю до відповідного параметра при $n \to \infty$.

Оцінка називається ***незміщеною***, якщо її математичне сподівання збігається зі значенням параметра.

У різі вибору з усіх відомих незміщених обґрунтованих оцінок певної оцінки потрібно зазначити критерій, за яким зроблено вибір.

Найчастіше застосовується критерій, який полягає у виборі оцінки, що має найменшу можливу дисперсію. Така оцінка називається ***ефективною***. Нижня межа дисперсії незміщеної оцінки параметра θ (яку позначатимемо $\widehat{\theta}^*$), подається формулою:

$$D\widehat{\theta}^* = \frac{1}{nM\left(\frac{\partial \ln \varphi(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2} = -\frac{1}{nM\left(\frac{\partial^2 \ln \varphi(x,\theta)}{\partial \theta^2}\right)},$$

де $\varphi(x,\theta)$ — щільність розподілу випадкової величини (для дискретної випадкової величини $\varphi(x,\theta) = P(X = x)$).

Оцінки параметрів розподілу знаходять методами максимальної правдоподібності і моментів. Метод максимальної правдоподібності полягає ось у чому. Нехай закон розподілу випадкової величини подається через параметр θ, який у загальному випадку k-вимірний. Тоді для вибірки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ спільний закон розподілу подається функцією правдоподібності (запишемо, наприклад, для неперервних величин):

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) ... f(x_n, \theta).$$

За оцінки максимальної правдоподібності параметрів θ_i $(i = 1,2,...,k)$ беруться вибіркові функції, які є розв'язком системи рівнянь:

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial \theta_i} = 0, \ (i = 1,2,...,k).$$

Застосування методу моментів ґрунтується на збіжності (за ймовірністю) статистичних моментів розподілу до відповідних теоретичних моментів розподілу, які в такому разі мають існувати. Як відомо, теоретичні моменти розподілу виражаються через параметри розподілу. Складаємо систему k рівнянь, в якій попарно прирівнюємо відповідні теоретичні і статистичні моменти. Розв'язком цієї системи є оцінки для параметрів розподілу.

Нехай маємо точкову оцінку $\widehat{\theta}$ параметра θ. Знайдемо для параметра інтервальну оцінку, скориставшись умовою $P\left(\left|\widehat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right)=\gamma$. В такому разі ε називається ***точністю оцінки***, а γ — її ***надійністю***. Тоді інтервальна оцінка (довірчий інтервал) для параметра θ набуває вигляду $\left(\widehat{\theta}-\varepsilon, \widehat{\theta}+\varepsilon\right)$. Параметр θ — не випадкова величина, надійність γ можна розглядати як імовірність того, що випадковий інтервал покриває дійсне значення параметра. Величини ε і γ тісно зв'язані з обсягом вибірки n. Якщо задати дві з цих величин, то можна знайти третю. Для цього потрібно знати закон розподілу для $\widehat{\theta}=\varphi(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Вибірку обсягом n зроблено із сукупності, розподіленої за законом Релея

$$f(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ x>0.$$

Знайти оцінку для параметра σ^2 і перевірити її на незміщеність, обґрунтованість і ефективність.

Розв'язання. Застосуємо метод максимальної правдоподібності. Побудуємо функцію правдоподібності, складемо і розв'яжемо рівняння для визначення оцінки:

$$L\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)=\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i, \sigma^2\right)=\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sigma^2\right)^n} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2};$$

$$\ln L\left(x_1, x_2, ..., x_n, \sigma^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2;$$

$$\frac{\partial \ln L\left(x_1, x_2, ..., x_n, \sigma^2\right)}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n} x_i^2;$$

$$-\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n} x_i^2=0;\ \widehat{\sigma}^2=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Перевіримо оцінку на незміщеність, знайшовши її математичне сподівання:

$$M\widehat{\sigma}^2 = M\left(\frac{1}{2n}\sum_{i-1}^{n} x_i^2\right) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} MX_i^2 = \frac{nMX_i^2}{2n} = \frac{MX_i^2}{2}.$$

Перетворення виконано згідно з властивостями математичного сподівання та з урахуванням того, що результати вибірки є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами. Знайдемо MX^2 випадкової величини, розподіленої за законом Релея:

$$MX^2 = \int_0^{\infty} x^2 \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \begin{vmatrix} x^2 = u;\ du = 2xdx \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = dv;\ v = -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{vmatrix} =$$

$$= -\lim_{b\to\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^b + 2\int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = -2\sigma^2 \lim_{b\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^b = 2\sigma^2.$$

Тоді $M\widehat{\sigma}^2 = \sigma^2$, тобто оцінка незміщена.

Перевірку обґрунтованості оцінки виконаємо, скориставшись другою формою нерівності Чебишова, тобто оцінимо ймовірність $P\left(\left|\widehat{\sigma}^2 - \sigma^2\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\widehat{\sigma}^2}{\varepsilon^2}$. Щоб знайти дисперсію оцінки, виконаємо обчислення:

$$MX^4 = \int_0^{\infty} x^4 \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \begin{vmatrix} x^4 = u;\ du = 4x^3 dx \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = dv;\ v = -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{vmatrix} =$$

$$= -\lim_{b\to\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^b + 4\int_0^{\infty} x^2 x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 4\sigma^2 \int_0^{\infty} x^2 \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 8\sigma^4.$$

(Останній інтеграл, що є математичним сподіванням квадрата випадкової величини, дорівнює $2\sigma^2$ і обчислювався раніше.) Тоді $DX^2 = 8\sigma^4 - 4\sigma^4 = 4\sigma^4$. Отже, маємо:

$$D\widehat{\sigma}^2 = D\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i^2 = \frac{nDX_i^2}{4n^2} = \frac{4\sigma^4 n}{4n^2} = \frac{\sigma^4}{n}.$$

Підставляючи дисперсію оцінки в нерівність Чебишова, дістаємо:

$$P\left(\left|\widehat{\sigma}^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{\sigma^4}{n\varepsilon^2}\to 1,\ \text{якщо}\ n\to\infty.$$

Отже, оцінка обґрунтована.

Знаходимо дисперсію ефективної оцінки:

$$D\widehat{\sigma}^{2*}=-\frac{1}{nM\left(\dfrac{\partial^2\ln\varphi(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right)};\quad \varphi\left(x,\sigma^2\right)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}};$$

$$\ln\varphi(x,\sigma)=\ln x-\ln\sigma^2-\frac{x^2}{2\sigma^2};\quad \frac{\partial\ln\left(\varphi\left(x,\sigma^2\right)\right)}{\partial\sigma^2}=-\frac{1}{\sigma^2}+\frac{x^2}{2\sigma^4};$$

$$\frac{\partial^2\ln\varphi\left(x,\sigma^2\right)}{\partial{\sigma^2}^2}=\frac{1}{\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^6};\quad M\left(\frac{\partial^2\ln\varphi\left(x,\sigma^2\right)}{\partial{\sigma^2}^2}\right)=$$

$$=M\left(\frac{1}{\sigma^4}-\frac{x^2}{\sigma^6}\right)=\frac{1}{\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^6}MX^2=\frac{1}{\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^6}2\sigma^2=-\frac{1}{\sigma^4};\quad D\widehat{\sigma}^{2*}=\frac{\sigma^4}{n}.$$

Дисперсія ефективної оцінки збігається з дисперсією знайденої оцінки для σ^2, а це означає, що оцінка ефективна.

Приклад 2. За методом моментів знайти оцінку параметра p геометричного розподілу за даними вибірки обсягом n.

Розв'язання. Геометричний закон розподілу визначається формулою: $P(X=m)=p(1-p)^{m-1},\ \ m=1,2,...$ Оскільки потрібно знайти оцінку одного параметра, зрівнюємо теоретичні і статистичні початкові моменти першого порядку:

$$v_1=MX=\frac{1}{p};\ \ v_1^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x};\ \ \frac{1}{p}=\bar{x};\ \ \widehat{p}=\frac{1}{\bar{x}}.$$

Приклад 3. За даними вибірки обсягом n із нормально розподіленої сукупності, дисперсія якої σ^2, а надійність γ, знайти інтервальну оцінку для математичного сподівання цієї сукупності.

Розв'язання. Інтервальна оцінка для математичного сподівання, якщо дисперсія сукупності σ^2 відома, подається у вигляді $(\bar{x}-\varepsilon;\bar{x}+\varepsilon)$, де $\varepsilon=\dfrac{\sigma\beta}{\sqrt{n}}$, $\beta=\Phi^{-1}\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$, де $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функція Лапласа.

Для побудови оцінки розглядалась вибіркова функція $Z=\frac{\overline{X}-a}{\sigma}\sqrt{n},$ яка має нормальний закон розподілу з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Приклад 4. Розв'язати попередню задачу для випадку, коли дисперсія сукупності невідома.

Розв'язання. У цьому випадку інтервальну оцінку побудуємо за допомогою вибіркової функції $Z=\frac{\overline{X}-a}{S}\sqrt{n-1},$ яка розподілена за законом Стьюдента з n – 1 ступенями волі. Довірчий інтервал $(\overline{x}-\varepsilon,\overline{x}+\varepsilon),$ де $\varepsilon=\frac{ts}{\sqrt{n-1}},$ а $t=F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right),$ де $F(t)$ — функція розподілу Стьюдента з n – 1 ступенями волі. Якщо кількість ступенів волі перевищує 20, то розподіл Стьюдента практично не відрізняється від нормального закону розподілу з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Приклад 5. За результатами вибірки обсягом n із нормально розподіленої сукупності з надійністю γ знайти довірчий інтервал для дисперсії сукупності.

Розв'язання. Для визначення довірчого інтервалу беремо вибіркову функцію $U=\frac{nS^2}{\sigma^2},$ яка має розподіл χ^2 з n – 1 ступенями волі. Довірчий інтервал подається у вигляді $\left(\frac{ns^2}{u_2};\frac{ns^2}{u_1}\right).$ Значення u_1 і u_2 визначаються за допомогою таблиць розподілу χ^2 з відповідною кількістю ступенів волі: $u_1=\chi^2\left(\frac{1+\gamma}{2}\right),$ $u_2=\chi^2\left(\frac{1-\gamma}{2}\right).$

Приклад 6. Знайти з надійністю γ = 0,95 інтервальну оцінку для ймовірності настання події A в кожному із n =100 незалежних повторних випробувань, якщо подія відбулась m = 40 раз.

Розв'язання. Для визначення довірчого інтервалу беремо вибіркову функцію $Z=\frac{\frac{m}{n}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}},$ яка має закон розподілу, близький до нормального, з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією. Довірчий інтервал:

$$\left(\frac{1}{\beta^2+n}\left(\frac{\beta^2}{2}+m-\beta^2\sqrt{\frac{\beta^2}{4}+\frac{m(n-m)}{n}}\right);\frac{1}{\beta^2+n}\left(\frac{\beta^2}{2}+m+\beta^2\sqrt{\frac{\beta^2}{4}+\frac{m(n-m)}{n}}\right)\right),$$

де $\beta=\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\Phi^{-1}(0{,}475)=1{,}96$ — значення знайдено за таблицями функції Лапласа. Обчислимо p_1 і p_2 — ліву і праву межі довірчого інтервалу:

$$p_1=\frac{1}{(1{,}96)^2+100}\left(\frac{(1{,}96)^2}{2}+40-(1{,}96)^2\sqrt{\frac{(1{,}96)^2}{4}+\frac{40\cdot 60}{100}}\right)\approx 0{,}2189;$$

$$p_2=\frac{1}{(1{,}96)^2+100}\left(\frac{(1{,}96)^2}{2}+40+(1{,}96)^2\sqrt{\frac{(1{,}96)^2}{4}+\frac{40\cdot 60}{100}}\right)\approx 0{,}5885.$$

Маємо інтервал $(0{,}2189; 0{,}5885)$.

Приклад 7. Визначити мінімальний обсяг вибірки *n* для того, щоб із надійністю $\gamma=0{,}98$ можна було дістати оцінку математичного сподівання нормально розподіленої сукупності $\varepsilon=0{,}2$, якщо середнє квадратичне відхилення в генеральній сукупності $\sigma=1{,}5$ і оцінка знаходиться за допомогою вибіркової середньої величини.

Розв'язання. Скориставшись формулою $P(|\bar{x}-a|<\varepsilon)=2\Phi(\beta)=\gamma$, дістаємо $\beta=\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$. Знайдемо *n* із формули $\varepsilon=\frac{\beta\sigma}{\sqrt{n}}$, $n=\frac{\beta^2\sigma^2}{\varepsilon^2}$. За таблицями функції Лапласа $\beta=\Phi^{-1}(0{,}49)=2{,}33$, Отже, $n=$ $=\left(\frac{2{,}33\cdot 1{,}5}{0{,}2}\right)^2\approx 306.$

Приклад 8. Із партії однотипних високоомних опорів узято для контролю 10 штук. Вимірювання показали такі відхилення від номіналу, кОм:

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Відхилення	2	3	–2	2	2	4	2	5	3	4

Знайти вибіркову середню і дисперсію відхилення фактичного значення опору від номіналу в цій партії і визначити точність оцінки математичного сподівання вибірковою середньою величиною з надійністю $\gamma = 0{,}95$ (використати розподіл Стьюдента).

Розв'язання. Вважаємо, що відхилення X має нормальний закон розподілу з невідомими параметрами a і σ^2. Знаходимо числові характеристики $\bar{x}$ і s^2 вибіркової сукупності: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 2$; $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 5{,}2$. Точність оцінки ε визначаємо за формулою $\varepsilon = \frac{\beta s}{\sqrt{n-1}}$. Значення β відшукуємо за таблицями функції розподілу Стьюдента з 9 ступенями волі: $\beta = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = F^{-1}\left(\frac{1+0{,}95}{2}\right) = F^{-1}(0{,}975) \approx 2{,}28$; $\varepsilon = \frac{2{,}28\sqrt{5{,}2}}{\sqrt{9}} \approx 1{,}73$.

Отже, маємо такий довірчий інтервал для математичного сподівання: $(0{,}27;3{,}73)$.

Приклад 9. У ВТК було виміряно діаметри 200 валів, виготовлених на верстаті-автоматі. Відхилення виміряних діаметрів від номіналу, мкм, наведено в таблиці.

Інтервал	Частота
–20 — –15	7
–15 — –10	11
–10 — –5	15
–5—0	24
0—5	49
5—10	41
10—15	26
15—20	17
20—25	7
25—30	3

Вважаючи, що вибірку зроблено з нормально розподіленої сукупності, визначити з надійністю $\gamma = 0{,}98$ точність оцінки дисперсії σ^2 вибірковою дисперсією s^2.

Розв'язання. З допомогою умовних моментів розподілу обчислимо вибіркову дисперсію s^2, склавши таблицю:

Середина інтервалу, u_i	Частота, n_i	$v_i = \frac{u_i - C}{\Delta x}$	$v_i n_i$	$v_i^2 n_i$
–17,5	7	–4	–28	112
–12,5	11	–3	–33	99
–7,5	15	–2	–30	60
–2,5	24	–1	–24	24
2,5	49	0	0	0
7,5	41	1	41	41
12,5	26	2	52	104
17,5	17	3	51	153
22,5	7	4	28	112
27,5	3	5	15	75
Сума	200	—	72	780

Знайдемо умовні моменти розподілу і вибіркову дисперсію на основі розрахунків у таблиці:

$$h_1^* = \frac{72}{200} = 0{,}36;\ h_2^* = \frac{780}{200} = 3{,}9;$$
$$s^2 = (\Delta x)^2\left(h_2^* - \left(h_1^*\right)^2\right) = 5^2\left(3{,}9 - (0{,}36)^2\right) = 94{,}26.$$

Точність оцінки ε дорівнює половині довжини довірчого інтервалу $\left(\frac{ns^2}{u_2}; \frac{ns^2}{u_1}\right)$. Значення u_1 і u_2 обчислимо за допомогою таблиць розподілу χ^2 з $n - 1$ ступенями волі. Але в цій задачі обсяг вибірки $n = 200$, тоді як таблиці складено для значень n, які не перевищують 30. Тому скористаємось тим, що при $n > 30$ розподіл χ^2 наближається нормальним законом розподілу з відповідними математичним сподіванням та дисперсією. Вибіркова функція $U = \dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ має розподіл χ^2 з n – 1 ступенями волі. Тому $MU = n-1$, а $DU = 2(n-1)$.

Вибіркова функція $Z = \dfrac{U - MU}{\sqrt{DU}} = \dfrac{\dfrac{nS^2}{\sigma^2} - n + 1}{\sqrt{2(n-1)}}$ розподілена нормально з нульовим математичим сподіванням і одиничною дисперсією. Довірчий інтервал знайдемо з умови:

$$P\left(\left|\frac{\dfrac{ns^2}{\sigma^2} - n + 1}{\sqrt{2(n-1)}}\right| < \beta\right) = \gamma = 2\Phi(\beta).$$

Виконаємо перетворення для визначення границь довірчого інтервалу:

$$-\beta < \frac{\dfrac{ns^2}{\sigma^2} - n + 1}{\sqrt{2(n-1)}} < \beta; \quad n - 1 - \beta\sqrt{2(n-1)} < \frac{ns^2}{\sigma^2} < n - 1 + \beta\sqrt{2(n-1)};$$

$$\frac{ns^2}{n - 1 + \beta\sqrt{2(n-1)}} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{n - 1 - \beta\sqrt{2(n-1)}}.$$

Отже, довірчий інтервал для дисперсії такий: $\left(\dfrac{ns^2}{n - 1 + \beta\sqrt{2(n-1)}};\right.$ $\left.\dfrac{ns^2}{n - 1 - \beta\sqrt{2(n-1)}}\right)$.

Знайдемо точність оцінки як половину довжини довірчого інтервалу:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{ns^2}{n-1-\beta\sqrt{2(n-1)}} - \frac{ns^2}{n-1+\beta\sqrt{2(n-1)}}\right) =$$

$$= \frac{ns^2}{2} \cdot \frac{2\beta\sqrt{2(n-1)}}{(n-1)\left(n-1-2\beta^2\right)} = \frac{\beta ns^2\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}\left(n-1-2\beta^2\right)}.$$

Згідно зі значенням γ за таблицями функції Лапласа β = 2,33. Остаточно маємо: $\varepsilon = \dfrac{2{,}33 \cdot 200 \cdot 94{,}26 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{199}\left(200 - 1 - 2\cdot(2{,}33)^2\right)} \approx 23{,}41.$

Вправи для самостійного розв'язування

5.14. Із нормально розподіленої сукупності з $DX=\sigma^2$ зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінку для *MX*. Перевірити її на незміщеність, ефективність та обґрунтованість.

5.15. Із нормально розподіленої сукупності з $MX = a$ зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінку для *DX*. Перевірити її на незміщеність, ефективність та обґрунтованість.

5.16. Із сукупності, розподіл у якій задається щільністю $f(x)=\dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(x>0)$, зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінку для μ і перевірити її на незміщеність, ефективність та обґрунтованість (значення σ^2 відоме).

5.17. Із напівнормально розподіленої сукупності зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінку для σ^2. Перевірити оцінку на незміщеність, ефективність та обґрунтованість, якщо $f(x)=$ $=\dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x>0$.

5.18. Із сукупності зі щільністю:

$$f(x)=\begin{cases} ae^{-a(x-\mu)^2}, \text{ якщо } x\ge\mu, \\ 0, \text{ якщо } x<\mu. \end{cases}$$

зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінки для a і μ.

5.19. Із сукупності зі щільністю:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{\ln x-\mu}{2\sigma^2}\right)^2}, \text{ якщо } x>0, \\ 0, \text{ якщо } x\le 0. \end{cases}$$

зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінки для μ і σ^2.

5.20. Із сукупності, яка має подвійний розподіл Пуассона, зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінки параметрів a_1 і a_2, якщо $P(X=m)=\dfrac{1}{2}\dfrac{a_1^m}{m!}e^{-a_1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{a_2^m}{m!}e^{-a_2}$, $m=0,1,\ldots$.

5.21. Із сукупності, яка має поліноміальний закон розподілу, зроблено вибірку обсягом *r*. Знайти оцінки для параметрів

$p_1, p_2, ..., p_s$, якщо $P(X_1 = m_1, X_2 = m_2, ..., X_s = m_s) =$

$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{s}(m_i)!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_s^{m_s}.$$

5.22. Із сукупності, розподіленої за законом Паскаля, зроблено вибірку обсягом n. Знайти оцінку для параметра p, якщо $P(X = m) = C_{m+s-1}^{m} p^s (1-p)^m$, $m = 0,1,...$.

5.23. Із сукупності, розподіленої за біноміальним законом зроблено вибірку обсягом r. Знайти оцінку для параметра p і показати, що вона незміщена, ефективна та обґрунтована, якщо $P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, $m = 0,1,...,n$.

5.24. Із сукупності зі щільністю

$$f(x) = \frac{\alpha^p x^{p-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(p)}, x > 0$$

зроблено вибірку обсягом n. Знайти оцінку для параметра α і показати, що вона має додатне зміщення. Усунувши зміщення, переконатися в тому, що така оцінка асимптотично ефективна.

5.25. Із сукупності, розподіленої показниково, зроблено вибірку обсягом n. Знайти оцінку для параметра a, ліквідувати зміщення і перевірити, чи буде здобута оцінка ефективною.

5.26. Із сукупності зі щільністю $f(x) = ae^{-a(x-\alpha)}, x \geq \alpha$, зроблено вибірку обсягом n: $X_1, X_2, ..., X_n$. Як оцінка параметра α пропонується $\hat{\alpha} = \min_i \{X_i\}$. Чи буде ця оцінка:

а) незміщеною (якщо ні, то знайти незміщену оцінку); б) обґрунтованою?

5.27. Із рівномірно розподіленої сукупності зроблено вибірку обсягом n: $X_1, X_2, ... X_n$. Як оцінка довжини інтервалу $b - a$ пропонується $\hat{h} = Z - V$, де $Z = \max_i \{X_i\}, \mathrm{V} = \min_i \{X_i\}$. Чи буде ця оцінка незміщеною ?

5.28. Під час перевірки 400 лампочок середній строк їх горіння становив 1220 год. Оцінити з надійністю $\gamma = 0{,}95$ математичне сподівання тривалості горіння, якщо $\sigma = 35$ год і в сукупності виконується нормальний закон розподілу.

5.29. На основі 100 спостережень було визначено, що в середньому для виробництва деталі потрібно 5,5 с, а $s^2 = 2{,}89$. Вважаючи, що тривалість виготовлення деталі розподілена нормально, знайти інтервальні оцінки для a і σ^2 з надійністю 0,96 і 0,98 відповідно.

5.30. Систематичні помилки вимірювального приладу дорівнюють нулю, а випадкові розподілені нормально з $\sigma = 20$ м. Потрібно, щоб абсолютне значення різниці між здобутим результатом і справжнім її значенням не перевищувало 10 м. Визначити, з якою ймовірністю ця вимога виконуватиметься, якщо береться середнє арифметичне n вимірювань і n = 4, 9, 16, 25.

5.31. У результаті вимірювання максимальної ємності 20 конденсаторів дістали такі числові характеристики: $\bar{x} = 4{,}47$ пф, $s^2 = 0{,}0121$ пф^2. Порівняти точність оцінки матетичного сподівання a за допомогою $\bar{x}$ з надійністю $\gamma = 0{,}95$, скориставшись нормальним законом розподілу і законом розподілом Стьюдента.

5.32. У ВТК виміряно діаметри 200 валів, виготовлених одним верстатом-автоматом. При цьому здобуто такі числові характеристики відхилення розмірів від номіналу: $\bar{x} = 43$ мкм, $s^2 = 90{,}25$ мкм^2. За допомогою асимптотично нормального розподілу знайти інтервальні оцінки для математичного сподівання та дисперсії з надійністю $\gamma = 0{,}99$.

5.33. Для деякої партії втулок потрібно визначити відсоток браку. Вибірка обсягом $n = 500$ дала 30 дефектних виробів. З надійністю $\gamma = 0{,}99$ визначити межі для частки (у відсотках) браку у всій партії.

5.34. Як оцінку відстані до навігаційного знака беруть середнє арифметичне незалежних вимірювань, що їх виконали n дальномірів. Похибки вимірювання розподілені нормально з $a = 0$ і $\sigma = 10$ м. Скільки потрібно дальномірів, щоб абсолютна величина похибки вимірювання відстані з імовірністю 0,96 не перевищувала 15 м?

5.3. ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Статистичною називається гіпотеза, яка стосується виду або параметрів розподілу випадкової величини і яку можна перевірити на підставі результатів спостереження у випадковій вибірці. Перевіряючи статистичні гіпотези за результатами випадкової вибірки, завжди ризикують прийняти хибне рішення. Але в такому можна обчислити ймовірність прийняття хибного рішення і, якщо вона мала, ризик помилки буде невеликим. Помилки, яких можна припуститися, бувають двох родів. Помилка першого роду полягає в тому, що гіпотеза перевірювана H_0 відхиляється, тоді як вона правильна. Помилка другого роду полягає у тому, що гіпотеза H_0 приймається, тоді як вона хибна, а правильною є деяка гіпотеза H_1. Ця гіпотеза, яка протиставляється гіпотезі H_0, називається ***альтернативною***. При цьому, хоча множина альтернативних гіпотез може бути нескінченною, висувається тільки одна альтернативна гіпотеза H_1. Статистичні гіпотези поділяються на прості і складні. ***Проста гіпотеза*** однозначно визначає закон розподілу випадкової величини. Для побудови статистичного критерію, який дає змогу перевірити деяку гіпотезу H_0, необхідно вибрати ***статистичну характеристику*** гіпотези Q — деяку вибіркову функцію, визначити допустиму ймовірність помилки першого роду α (рівень значущості), сформулювати альтернативну гіпотезу H_1, знайти критичну область G для статистичної характеристики, щоб мінімізувати ймовірність помилки другого роду. Критична область G — це така множина значень Q, що коли $Q \in G$, то гіпотеза H_0 відхиляється на користь гіпотези H_1. Критична область визначається так, щоб імовірність потрапляння в неї статистичної характеристики за умови, що правильна гіпотеза H_0, дорівнювала α — заданому рівню значущості, тобто $P(Q \in G / H_0) = \alpha$. Крім того, необхідно, щоб $P(Q \in G / H_1)$ була максимальною, тобто ймовірність помилки другого роду має бути мінімальною. Останнє співвідношення називається ***вимогою максимізації потужності критерію***, який виражає ймовірність того, що не буде допущено помилки другого роду.

Статистичні гіпотези поділяються на ***параметричні*** і ***непараметричні***. Параметричні гіпотези передбачають, що вигляд закону розподілу відомий і перевірка зводиться до перевірки значень невідомих параметрів.

У разі, коли гіпотези H_0 і H_1 прості і розглядається неперервна випадкова величина, то побудова критерію ґрунтується на теоремі Неймана—Пірсона.

Коли гіпотеза, що перевіряється, і альтернативна їй гіпотеза є простими гіпотезами виду відповідно $H_0 : \theta = \theta_0$ і $H_1 : \theta = \theta_1$ і якщо $L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_0)$ і $L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_1)$ — функції правдоподібності, які знайдено за умови, що правильна відповідно гіпотеза H_0 або H_1, то існує найпотужніший критерій для гіпотези H_0 стосовно альтернативної гіпотези H_1. Критична область і статистична характеристика гіпотез визначаються нерівністю: $L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_1) \geq cL(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_0)$, де C — додатна стала, значення якого залежить від рівня значущості.

Якщо принаймні одна з гіпотез H_0 або H_1 не є простою, нерівність не можна застосувати. У цьому разі можна побудувати критерій, що ґрунтується на відношенні функцій правдоподібності (знову вважається, що розподіл у сукупності неперервний).

Припустимо, що змінна X має щільність виду $f(x, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_r)$, яка залежить від r параметрів, а гіпотеза H_0 подається у вигляді: $\overline{\theta} \in \omega$, де $\overline{\theta}$ — вектор з s компонентами $(s \leq r)$, а ω — деяка підмножина Ω усіх можливих значень параметра. Гіпотеза $H_1 : \overline{\theta} \in \Omega \setminus \omega$. Для побудови критерію визначають функцію правдоподібності $L(x_1, x_2, ..., x_n, \overline{\theta})$, а далі знаходять її максимуми для випадків, коли $\overline{\theta} \in \omega$ і $\overline{\theta} \in \Omega$. Далі складають відношення:

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\overline{\theta} \in \omega} L(x_1, x_2, ..., x_n, \overline{\theta})}{\max\limits_{\overline{\theta} \in \Omega} L(x_1, x_2, ..., x_n, \overline{\theta})}.$$

Значення λ завжди належить інтервалу $(0;1)$. Чим ближче λ до одиниці, тим правдоподібніша гіпотеза H_0 і навпаки: чим ближче значення λ до нуля, тим більше підстав для відхилення H_0. Критична область для λ лівостороння. Вона визначається з умови: $P(\lambda < \lambda_\alpha / H_0) = \alpha$.

Якщо відомий закон розподілу для λ, то можна знайти границю критичної області для заданого критерію. Критерії, що ґрунтуються на відношенні функцій правдоподібності, асимптотично найпотужніші.

Розглянемо основні параметричні статистичні критерії.

А. Перевірка гіпотези про математичне сподівання нормально розподіленої сукупності

Якщо дисперсія сукупності відома і дорівнює σ^2, то при H_0: $a = a_0$ і H_1: $a = a_1$ за статистичну характеристику береться вибіркова функція $Z = \frac{\overline{X} - a_0}{\sigma}\sqrt{n}$. Критична область визначається залежно від значення a_1 і відповідно до рівня значущості α. Можливі три випадки.

1. Якщо $a_1 > a_0$, то критична область правостороння. Її межа z_α визначається за умовою: $P(Z \ge z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{z_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$ $= 0,5 - \Phi(z_\alpha) = \alpha$. Тоді $z_\alpha = \Phi^{-1}(0,5 - \alpha)$.

2. Якщо $a_1 < a_0$, то критична область лівостороння, $z_\alpha =$ $= -\Phi^{-1}(0,5 - \alpha)$.

3. Якщо $a_1 \ne a_0$, то критичній області належать значення $z \ge z_{\frac{\alpha}{2}}$ і $z \le -z_{\frac{\alpha}{2}}$. При цьому $z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}\left(0,5 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Коли дисперсія сукупності невідома, то для перевірки гіпотези використовується вибіркова функція $Z = \frac{\overline{X} - a_0}{s}\sqrt{n-1}$, розподілена за законом Стьюдента з n – 1 ступенями волі. Вигляд критичної області визначають так само, як і в попередніх випадках, а межу знаходять за допомогою таблиць розподілу Стьюдента з відповідною кількістю ступенів волі. Якщо n > 20, то розподіл Стьюдента апроксимується нормальним розподілом з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Б. Перевірка гіпотези про дисперсію нормально розподіленої сукупності

Коли рівень значущості дорівнює α, перевіримо гіпотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ за альтернативної гіпотези H_1: $\sigma^2 = \sigma_1^2$. Якщо справджується гіпотеза, яка перевіряється, то вибіркова функція $U = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$ має розподіл χ^2 з n – 1 ступенями волі. Як і в попередніх випадках, вигляд критичної області визначається значенням σ_1^2. Межі критичної області визначаються так:

1) якщо $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$, то критична область G правостороння, $U_\alpha = \chi^2(\alpha)$;

2) якщо $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$, то критична область G лівостороння, $U_\alpha = \chi^2(1-\alpha)$;

3) якщо $\sigma_1^2 = \sigma_0^2$, то критична область двостороння. Їй належать значення $U \le u_1$ і $U \ge u_2$, де $u_1 = \chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, а $u_2 = \chi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

В. Перевірка гіпотези про істотність різниці математичних сподівань двох нормально розподілених сукупностей

Нехай задано дві нормально розподілені сукупності з однаковими дисперсіями, але, можливо, із різними математичними сподіваннями. Із цих сукупностей зроблено вибірки обсягом відповідно n_1 і n_2. Числові характеристики вибіркових сукупностей: $\overline{X}_1$, S_1^2 і $\overline{X}_2$, S_2^2. Якщо позначити різницю $a_1 - a_0 = \delta$, то гіпотезу $H_0: \delta = \delta_0$ можна перевірити за допомогою вибіркової функції $Z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$. Якщо гіпотеза H_0 правильна, то Z має розподіл Стьюдента з $n_1 + n_2 - 2$ ступенями волі. Залежно від значення δ_1 у альтернативній гіпотезі визначають критичну область за допомогою таблиць розподілу Стьюдента, а в разі великих значень n_1 і n_2 — за допомогою таблиць функції Лапласа.

Г. Перевірка гіпотези про рівність дисперсій двох нормально розподілених сукупностей

Нехай задано дві нормально розподілені сукупності. На підставі вибірок обсягом n_1 і n_2 із цих сукупностей потрібно перевірити гіпотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ за альтернативної гіпотези H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Статистичною характеристикою для перевірки гіпотези H_0 буде вибіркова функція $F = \dfrac{\dfrac{n_1}{n_1 - 1} s_1^2}{\dfrac{n_2}{n_2 - 1} s_2^2}$. При побудові відношення чисельник має бути не меншим від знаменника. Якщо гіпотеза H_0 правильна, то вибіркова функція F має розподіл Фішера з $n_1 - 1$ і $n_2 - 1$ ступенями волі. Критична область G правостороння і визначається умовою $P(F \geq f_\alpha) = \alpha$.

Д. Критерій дисперсійного аналізу

Нехай задано k нормально розподілених сукупностей з однаковими дисперсіями і, можливо, різними математичними сподіваннями. Із кожної сукупності зроблено вибірку обсягом n_i. Перевіряється гіпотеза H_0: $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$. Статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція

$$F = \frac{\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^2 n_i}{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)},$$

де X_{ij} — j-те значення випадкової величини X_i; $\overline{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$;

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\overline{x}_i n_i$; $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Якщо гіпотеза H_0 правильна, то вибіркова функція має розподіл Фішера з $k - 1$ і $n - k$ ступенями волі. Критична область правостороння і визначається так, як це було зроблено в попередньому пункті.

Крім наведених параметричних критеріїв перевірки статистичних гіпотез розглядаються критерії для перевірки непараметричних статистичних гіпотез, сутність яких можна схарактеризувати так.

Якщо маємо вибірку обсягом n, то чи правильним є твердження, що її зроблено із сукупності з даною функцією розподілу $F_0(x)$?

Критерій χ^2 Пірсона

Критерій ґрунтується на порівнянні теоретичних і емпіричних частот. Нехай область реалізацій випадкової величини розбито на k інтервалів, частоти яких дорівнюють n_i, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$ Якщо гіпотеза про закон розподілу в сукупності правильна, то можна обчислити ймовірності $p_i = P(x_{i-1} \le X < x_i)$, тобто ймовірність потрапляння випадкової величини на i-й інтервал. Теоретичні частоти потрапляння на цей інтервал можна розглядати як математичне сподівання компонентів випадкової величини, розподіленої за поліноміальним законом:

$$P(X_1 = m_1; X_2 = m_2; ...; X_k = m_k) =$$
$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}(m_i)!} p_i^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k}; \quad MX_i = n_i' = np_i, \ i = 1,2,...,k.$$

Статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція $U = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i' - n_i)^2}{n_i'}$. Якщо $n \to \infty$, то вибіркова функція має розподіл χ^2 з $k - r - 1$ ступенями волі, де r — кількість параметрів, оцінки для яких знайдено за вибірковими даними. Критична область для статистичної характеристики правостороння.

Критерій Колмогорова

Критерій ґрунтується на порівнянні статистичної і теоретичної функцій розподілу. Якщо

$$D_n = \max_x \left| F_n^*(x) - F(x) \right|,$$

то при $n \to \infty$

$$P\left(\sqrt{n} D_n \geq \lambda_\alpha\right) \to 1 - K(\lambda),$$

де $K(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2\lambda^2}$, $\lambda > 0$. За допомогою таблиць розподілу Колмогорова визначається правостороння критична область.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Побудувати найпотужніший критерій для перевірки гіпотези $H_0: a = a_0$ за альтернативної гіпотези $H_1: a = a_1$, якщо вибірку обсягом *n* зроблено з нормально розподіленої сукупності з дисперсією, що дорівнює σ^2. Дібрати таке значення *C*, при якому α = 0,02, якщо $a_0 = 10$, $a_1 = 12$, $\sigma^2 = 9$, $n = 25$. Яка з гіпотез приймається, якщо $\bar{x} = 10{,}9$?

Розв'язання. Застосуємо нерівність із теореми Неймана — Пірсона: $L(x_1, x_2, ..., x_n, a_1) \geq cL(x_1, x_2, ..., x_n, a_0)$. Побудуємо функції правдоподібності:

$$L(x_1, x_2, ..., x_{n.}, a_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2},$$

$$L(x_1, x_2, ..., x_{n.}, a_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_0)^2}.$$

Підставимо функції правдоподібності в нерівність і виконаємо спрощення скороченням сталих множників. Дістанемо нерівність $e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2} \geq Ce^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_0)^2}$, яку прологарифмуємо і виконаємо низку перетворень:

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a_1\right)^2 \geq \ln C - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a_0\right)^2;$$

$$\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a_0\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a_1\right)^2\right) \geq \ln C;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a_0\sum_{i=1}^{n} x_i + na_0^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2a_1\sum_{i=1}^{n} x_i - na_1^2 \geq 2\sigma^2 \ln C;$$

$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{2\sigma^2 \ln C + n\left(a_1^2 - a_0^2\right)}{2\left(a_1 - a_0\right)}$, бо за умовою $a_1 > a_0$. Після заміни $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$, остаточно дістанемо $\overline{X} \geq \frac{2\sigma^2 \ln C + n\left(a_1^2 - a_0^2\right)}{2n\left(a_1 - a_0\right)}$.

Отже, статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція $\overline{X}$, а критичною областю для неї — множина значень, не менших за $\frac{2\sigma^2 \ln C + n\left(a_1^2 - a_0^2\right)}{2n\left(a_1 - a_0\right)}$. Щоб дібрати значення C, потрібно знати закон розподілу вибіркової функції. Якщо справджується гіпотеза H_0, то вибірку зроблено з нормально розподіленої сукупності з $a = 10$ і $\sigma^2 = 9$. Тоді $M\overline{X} = 10$, а $D\overline{X} = 0{,}36$. Центруємо і нормуємо вибіркову функцію, щоб застосувати таблиці функції Лапласа. Аналогічні перетворення виконуємо з правою частиною нерівності: $\frac{\overline{X} - 10}{0{,}6} \geq \left(\frac{18\ln C + 25(144 - 100)}{50 \cdot 2} - 10\right) \cdot \frac{5}{3}$; $\frac{\overline{X} - 10}{0{,}6} \geq \frac{18\ln C + 100}{60}$. Критична область правостороння, тому її межа $z_\alpha = \Phi^{-1}(0{,}5 - \alpha)$;

$z_{0,02} = \Phi^{-1}(0{,}48) = 2{,}055.$ Отже, $\frac{18\ln C + 100}{60} = 2{,}055;$ $\ln C \approx 1{,}2944;$ $C \approx 3{,}649.$

Якщо $\bar{x} = 10{,}9$, то $\frac{\bar{x} - 10}{0{,}6} = \frac{0{,}9}{0{,}6} = 1{,}5$ не належить критичній області і гіпотеза H_0 приймається.

Приклад 2. Із нормально розподіленої сукупності, дисперсія якої дорівнює σ_0^2, зроблено вибірку обсягом *n*. Побудувати критерій для перевірки гіпотези $H_0\colon a = a_0$ при $H_1\colon -\infty < a < \infty.$ Знайти закон розподілу статистичної характеристики гіпотези.

Розв'язання. Гіпотеза H_1 не буде простою, тому не можна застосувати нерівність Неймана — Пірсона. Побудуємо критерій, що ґрунтується на відношенні функцій правдоподібності:

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\bar{\theta}\in\omega} L(x_1, x_2, ..., x_n, \bar{\theta})}{\max\limits_{\bar{\theta}\in\Omega} L(x_1, x_2, ..., x_n, \bar{\theta})}.$$

Параметр $\bar{\theta} = (a; \sigma_0^2)$, при цьому дисперсія відома. Згідно з гіпотезою $H_0\colon a = a_0$, і тому простір ω являє собою точку $(a_0; \sigma_0^2)$ і його розмірність дорівнює нулю. Простір Ω одновимірний і задається прямою $\sigma^2 = \sigma_0^2.$ Якщо $\bar{\theta} \in \omega,$ $\max L(x_1, x_2, ..., x_n, \bar{\theta}) =$ $= \frac{1}{\sigma_0^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_0)^2}$. Якщо $\bar{\theta} \in \Omega,$ то для визначення максимуму функції правдоподібності потрібно знайти оцінки для параметрів, за яких він виконується. Для цього складемо і розв'яжемо рівняння $\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n, \bar{\theta})}{\partial a} = 0.$

$$L(x_1, x_2, ..., x_{n.}, \bar{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\sigma_0^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a)^2},$$

$$\ln L(x_1, x_2, ..., x_n, \bar{\theta}) = n \ln \sigma_0 - \frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2;$$

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n, \bar{\theta})}{\partial a} = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = 0; \ \ \hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

Тоді $\max\limits_{\overline{\theta}\in\Omega} L(x_1, x_2, ..., x_n, \overline{\theta}) = \dfrac{1}{\sigma_0^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$ і

$$\lambda = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_0)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_0)^2-\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right)} = e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2a_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+na_0^2-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\overline{x}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n(\overline{x})^2\right)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(na_0^2-2a_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+2\overline{x}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n(\overline{x})^2\right)}.$$

З урахуванням того, що $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i = n\overline{x}$, вираз перетворюється до вигляду:

$$\lambda = e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(na_0^2-2a_0n\overline{x}+n(\overline{x})^2\right)} = e^{-\frac{n}{2\sigma_0^2}(\overline{x}-a_0)^2} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{x}-a_0}{\sigma_0}\sqrt{n}\right)^2}.$$

Вибіркова функція $V = \dfrac{\overline{X}-a_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$ розподілена нормально з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією. Тоді її квадрат має розподіл χ^2 з одним ступенем волі, а отже, $\lambda = e^{-\frac{1}{2}U}$, де $f(u) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}2^{\frac{1}{2}}} u^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{2}}$, $u > 0$.

Знайдемо закон розподілу для λ. Очевидно, що функція монотонно спадна — показникова функція з від'ємним показником степеня. Використаємо формулу $f_1(\lambda) = f(\psi(\lambda))|\psi'(\lambda)|$, де $u = \psi(\lambda)$ — обернена функція. Розв'яжемо рівняння $\lambda = e^{-\frac{1}{2}U}$ відносно u:

$$u = \psi(\lambda) = -2\ln\lambda;\ u' = -\frac{2}{\lambda};$$

$$f_1(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}2^{\frac{1}{2}}}(-2\ln\lambda)^{-\frac{1}{2}} e^{\ln\lambda}\frac{2}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-\ln\lambda)^{-\frac{1}{2}},\ 0 < \lambda \le 1.$$

Ураховуючи те, що λ є монотонною функцією випадкової величини, яка розподілена за законом χ^2 з одним ступенем волі, для визначення критичної області λ можна використати цей розподіл. Нехай, наприклад, $a_0 = 16$, $\sigma_0^2 = 4$, $\overline{x} = 17$, $\alpha = 0{,}05$ і $n = 16$.

Виконаємо обчислення для перевірки гіпотези H_0. Виконаємо обчислення для перевірки гіпотези H_0. Знайдемо реалізацію вибіркової функції $\lambda = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{17-16}{2}4\right)} = \frac{1}{e}$. Для визначення межі критичної області λ_α виведемо відповідне співвідношення:

$$P(\lambda < \lambda_\alpha) = P\left(e^{-\frac{1}{2}U} < \lambda_\alpha\right) = P\left(\frac{1}{2}U > u_\alpha\right) = \alpha.$$

За таблицями розподілу χ^2 з одним ступенем волі при $\alpha =$ $= 0{,}05$ знаходимо, що $2u_\alpha = 3{,}8$. До критичної області належать значення $0 < \lambda < e^{-1,9}$. Реалізація вибіркової функції $\lambda = \frac{1}{e}$ не належить критичній області, тому гіпотеза H_0 приймається.

Приклад 3. Із сукупності зі щільністю розподілу $f(x) =$ $= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x > 0$ зроблено вибірку обсягом *n*. Побудувати критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ при H_1: $\sigma^2 > 0$. Знайти закон розподілу для випадкової величини — аргументу λ.

Розв'язання. Гіпотеза H_1 складна, тому для її перевірки побудуємо критерій, що ґрунтується на відношенні функцій правдоподібності:

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\theta\in\omega} L\left(x_1, x_2, ..., x_n, \overline{\theta}\right)}{\max\limits_{\theta\in\Omega} L\left(x_1, x_2, ..., x_n, \overline{\theta}\right)}.$$

Параметр $\theta = \sigma^2$. Згідно з гіпотезою, яка перевіряється: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, тому ω має нульову розмірність. Тоді згідно з гіпотезою H_1 простір Ω має розмірність, яка дорівнює одиниці. Знайдемо максимальні значення функцій правдоподібності. Якщо справджується гіпотеза H_0, то

$$\max_{\theta\in\omega} L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = \frac{1}{\sigma_0^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Оцінка для σ^2, за якої досягається максимум функції правдоподібності, якщо $\theta \in \Omega$, визначається із рівняння $\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0.$

$$\ln L(x_1, x_2, ..., x_n, \sigma^2) = n \ln \sigma \; - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 ;$$

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0; \;\; \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Підставимо здобуту оцінку у функцію правдоподібності:

$$\max_{\sigma^2 \in \Omega} L(x_1, x_2, ..., x_n, \sigma^2) = \frac{2^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2}} .$$

Тоді

$$\lambda = \frac{2^n e^{-\frac{1}{2\sigma_o^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\sigma_o^2)^{\frac{n}{2}} 2^n} = \frac{e^{\frac{n}{2}}}{\sigma_0^n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2} .$$

Якщо позначимо $U = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, то $\lambda = \frac{e^{\frac{n}{2}}}{\sigma_0^n} U^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{nU}{2\sigma_0^2}}$, тобто статистична характеристика гіпотези, яка перевіряється, є функцією випадкової змінної U. Щоб знайти закон розподілу, розглянемо її особливості. Змінна U є середнім арифметичним суми квадратів n незалежних однаково розподілених випадкових величин. Знайти закон розподілу U можна буде, якщо під час підсумовування діставатимемо випадкові величини з однотипним законом розподілу, тобто закон розподілу суми квадратів буде стійким. Схема розв'язування задачі буде такою:

1) знайдемо закон розподілу X^2;

2) знайдемо характеристичну функцію $g_{X^2}(t)$;

3) знайдемо характеристичну функцію для $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$;

4) дослідимо здобуту характеристичну функцію і визначимо, чи буде закон розподілу стійким;

5) визначимо закон розподілу суми квадратів;

6) знайдемо закон розподілу U.

Виконуємо дії згідно з наведеною схемою. Позначимо $Y = X^2$, функція монотонно зростає в області зміни X. Знайдемо щільність розподілу для Y згідно з формулою:

$$f_1(y) = f(\psi(y))\psi'(y),$$

де $\psi(y) = x = \sqrt{y}$; $\psi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$; $f_1(y) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} =$

$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}$, $y > 0$.

Знайдемо характеристичну функцію для Y:

$$g_Y(t) = Me^{itY} = \int_0^\infty e^{ity} f_1(y)dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{ity} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{-\frac{y}{2}} e^{-y\left(\frac{1}{2\sigma^2} - it\right)} dy.$$

Для обчислення інтеграла зробимо заміну змінної:

$$z = y\left(\frac{1}{2\sigma^2} - it\right);\ dy = \frac{dz}{\frac{1}{2\sigma^2} - it};$$

Якщо $y = 0,\ z = 0,$ коли $y \to \infty,\ z \to \infty.$

$$g_Y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\left(\frac{1}{2\sigma^2} - it\right)^{\frac{1}{2}}}} \int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} dz = \frac{1}{\left(1 - 2\sigma^2 it\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Враховано, що $\int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} dz = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

Нехай тепер $V = \sum_{i=1}^n Y_i$. Характеристичну функцію $g_V(t)$ знаходять як n-й степінь $g_Y(t)$: $g_V(t) = \frac{1}{\left(1 - 2\sigma^2 it\right)^{\frac{n}{2}}}$. Як випливає з виразу характеристичної функції, закон розподілу V стійкий. Для визначення щільності $f(v)$ знайдемо закон розподілу для суми двох величин $V_2 = Y_1 + Y_2$, потім для суми трьох величин і за результатами визначимо закон розподілу для суми n величин. Закон розподілу V_2 знайдемо за формулою, яка визначає закон розподілу суми двох незалежних невід’ємних випадкових величин:

$$f_2(v)=\int\limits_0^v f(y_1)f(v-y_1)dy_1=\int\limits_0^v \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, y_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y_1}{2\sigma^2}}\, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(v-y_1)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(v-y_1)}{2\sigma^2}}dy_1=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{v}{2\sigma^2}}\int\limits_0^v y_1^{-\frac{1}{2}}(v-y_1)^{-\frac{1}{2}}dy_1=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{v}{2\sigma^2}}\int\limits_0^v\frac{dy_1}{\sqrt{y_1 v-y_1^2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{v}{2\sigma^2}}\int\limits_0^v\frac{dy_1}{\sqrt{\frac{v^2}{4}-\left(y_1-\frac{v}{2}\right)^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{v}{2\sigma^2}}\arcsin\frac{2y_1-v}{v}\Bigg|_0^v=\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{v}{2\sigma^2}}.$$

За законами розподілу Y і V_2 не можна встановити закон розподілу суми n доданків. Тому знайдемо закон розподілу суми трьох величин $V_3=V_2+Y$.

$$f_3(v)=\int\limits_0^v\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\,\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{(v-y)}{2\sigma^2}}dy=$$

$$=\frac{1}{2\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v}{2\sigma^2}}\int\limits_0^v y^{-\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}v^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{v}{2\sigma^2}}.$$

Випишемо тепер закони розподілу для випадків коли додаються 1, 2 і 3 випадкові величини:

$$f_1(v)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}v^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{v}{2\sigma^2}};\quad f_2(v)=\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{v}{2\sigma^2}};\quad f_3(v)=\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}v^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{v}{2\sigma^2}}.$$

Очевидно, що у вираз щільності розподілу при додаванні n величин входитимуть множники $\frac{1}{\sigma^n}$, $e^{-\frac{v}{2\sigma^2}}$, $v^{\frac{n}{2}-1}$. Потрібно ще знайти деяку сталу C_n. Для цього використаємо співвідношення $\int\limits_0^\infty f_n(v)dv=1$. $\frac{C_n}{\sigma^n}\int\limits_0^\infty v^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{v}{2\sigma^2}}dv=1$. Зробимо заміну змінної: $z=\frac{v}{2\sigma^2}$; $dv=2\sigma^2dz$; якщо v = 0, то і z = 0; коли $v\to\infty$, то також $z\to\infty$. $\frac{C_n}{\sigma^n}2^{\frac{n}{2}-1}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}-1}2\sigma^2\int\limits_0^\infty z^{\frac{n}{2}-1}e^{-z}dz=1$. Інтеграл $\int\limits_0^\infty z^{\frac{n}{2}-1}e^{-z}dz=\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, тому $C_n=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}}$.

Остаточно маємо $f_n(v)=\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\sigma^n}v^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{v}{2\sigma^2}}$, $v>0$.

Очевидно, що формулу задовольняють значення n = 1, 2, 3. За методом математичної індукції можна показати, що формула справджується для всіх натуральних значень n.

Як відомо $U=\dfrac{V}{n}$. Знайдемо закон розподілу для U як монотонної функції V.

$$v=\psi(u)=nu;\quad \psi'(u)=n;\quad f(u)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}(nu)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nu}{2\sigma^2}}n=$$

$$=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}u^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nu}{2\sigma^2}},\quad u>0.$$

Закон розподілу відомий, тому можна вирішувати питання про прийняття чи відхилення гіпотези, яка перевіряється, згідно із заданим рівнем значущості.

Приклад 4. Під час перевірки діаметрів 17 установочних кілець було здобуто такі числові характеристики: $\bar{x}=12{,}075$ мм і $s^2=0{,}065$ мм^2. Вважаючи, що розмір, який контролюється, має нормальний закон розподілу, перевірити гіпотезу $H_0\colon a=12$ мм при $H_1\colon a\neq 12$ мм, якщо $\alpha=0{,}05$.

Розв'язання. Статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція $Z=\dfrac{\overline{X}-a_0}{S}\sqrt{n-1}$, яка розподілена за законом Стьюдента з $n-1$ ступенями волі. Згідно з виглядом альтернативної гіпотези, критична область двостороння (рис. 5.2).

Межа критичної області $z_{\frac{\alpha}{2}}=F^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)=F^{-1}(1-0{,}025)=$ $=F^{-1}(0{,}975)=2{,}12.$

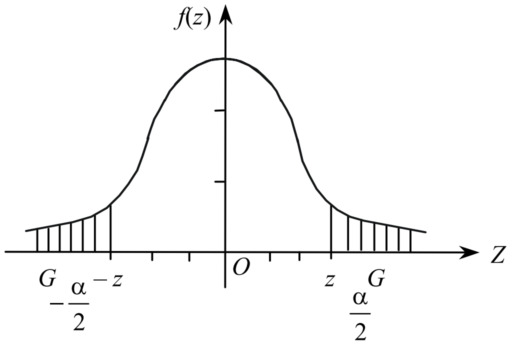

Рис. 5.2

Межу відшукували за таблицями функції розподілу Стьюдента при 16 ступенях волі. Обчислимо реалізацію вибіркової функції: $z = \frac{12{,}075 - 12}{\sqrt{0{,}065}}\sqrt{16} \approx 1{,}177.$ Реалізація вибіркової функції не належить до критичної області, і гіпотеза H_0 приймається.

Приклад 5. Із нормально розподіленої сукупності зроблено вибірку обсягом n = 15. За рівня значущості $\alpha = 0{,}02$ перевірити гіпотезу H_0: $\sigma^2 = 12$ при альтернативній гіпотезі H_1: $\sigma^2 = 10$, якщо $s^2 = 11$.

Розв'язання. Статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція $U = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$, розподілена за законом χ^2 з n – 1 ступенями волі. Критична область лівостороння, бо $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$ (рис. 5.3).

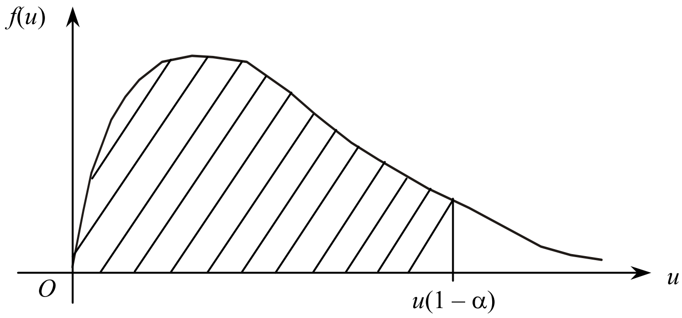

Рис. 5.3

Межу критичної області знаходимо за таблицями розподілу χ^2: $u_\alpha = \chi^2(1-\alpha) = \chi^2(0{,}98)$ при 14 ступенях волі. $u_{0{,}02} = 15{,}4$. Реалізація вибіркової функції $u = \frac{15 \cdot 11}{12} = 13{,}75.$

Значення функції належить критичній області, отже, гіпотеза H_0 відхиляється на користь альтернативної гіпотези H_1.

Приклад 6. На підприємстві розроблено два методи виготовлення виробів. Для перевірки цих методів на матеріалоємність зібрані дані про витрати сировини на одиницю продукції у процесі роботи обома методами. Витрати сировини за застосування першого методу становили: 2,0; 2,7; 2,5; 2,9; 2,3; 2,6; а другого — 2,5; 3,2; 3,5; 3,8; 3,5. Вважаючи, що розподіл у сукупностях нормальний і дисперсії у сукупностях однакові, перевірити гіпотезу H_0: $\delta_0 = 0$, при H_1: $\delta_0 \neq 0$, $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Для вибіркової функції $Z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$, яка розподілена за законом Стьюдента з $n_1 + n_2 - 2$ ступенями волі потрібно знайти критичну область (вона двостороння) і знайти фактичну реалізацію. Знайдемо числові характеристики вибіркових сукупностей:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{6}(2 + 2{,}7 + 2{,}5 + 2{,}9 + 2{,}3 + 2{,}6) = 2{,}5;$$

$$s_1^2 = \frac{1}{6}(0{,}25 + 0{,}04 + 0{,}16 + 0{,}04 + 0{,}01) = \frac{1}{12}.$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{5}(2{,}5 + 3{,}2 + 3{,}5 + 3{,}8 + 3{,}5) = 3{,}3;$$

$$s_2^2 = \frac{1}{5}(0{,}64 + 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}25 + 0{,}04) = \frac{49}{250}.$$

За таблицями розподілу Стьюдента для 9 ступенів волі знаходимо $z_{\frac{\alpha}{2}} = F^{-1}(0{,}975) \approx 2{,}26.$

Обчислимо значення статистичної характеристики:

$$z = \frac{2{,}5 - 3{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}5 + 0{,}98}{6 + 5 - 2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)}} \approx -3{,}258.$$

Отже, значення характеристики належить критичній області, і гіпотеза H_0 відхиляється.

Приклад 7. У прикладі 6 передбачалось, що дисперсії сукупностей однакові. Перевіримо цю гіпотезу при $\alpha = 0{,}05$, якщо $s_1^2 = \frac{1}{12}$, $s_2^2 = \frac{49}{250}$.

Розв'язання. Знайдемо реалізацію вибіркової функції $F = \dfrac{\frac{n_2}{n_2 - 1} S_2^2}{\frac{n_1}{n_1 - 1} S_1^2} = \dfrac{\frac{5}{5-1} \cdot \frac{49}{250}}{\frac{6}{6-1} \cdot \frac{1}{12}} \approx 2{,}45.$ Згідно з таблицями розподілу Фішера при $\alpha = 0{,}05$ і при 4 і 5 ступенях волі $f_\alpha = 5{,}19$. Значення вибіркової функції не потрапило у критичну область, і гіпотеза про рівність дисперсій приймається.

Приклад 8. Досліджується вплив чотирьох різних типів покриття на питому провідність телевізійних трубок. Результати спостережень наведено в таблиці:

Перший тип	Другий тип	Третій тип	Четвертий тип
56	64	45	42
55	61	46	39
62	50	45	45
59	55	39	43
60	56	43	41

Перевіряється гіпотеза $H_0: a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ за рівня значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Статистичною характеристикою гіпотези буде вибіркова функція

$$F=\frac{\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{X}_i-\overline{X}\right)^2 n_i}{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\overline{X}_i\right)^2}.$$

Для обчислення вибіркової функції знайдемо відповідні середні значення:

$$\bar{x}_1=\frac{1}{5}(56+55+62+59+60)=58{,}4;\ \bar{x}_2=\frac{1}{5}(64+1+50+55+56)=57{,}2;$$

$$\bar{x}_3=\frac{1}{5}(45+46+45+39+43)=43{,}6;\ \bar{x}_4=\frac{1}{5}(42+39+45+43+41)=42;$$

$$\bar{x}=\frac{1}{20}(58{,}4\cdot 5+57{,}2\cdot 5+43{,}6\cdot 5+42\cdot 5)=50{,}3.$$

Окремо обчислимо значення чисельника і знаменника виразу вибіркової функції:

$$\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{x}_i-\bar{x}\right)^2 n_i=\frac{1}{3}(8{,}1^2\cdot 5+6{,}9^2\cdot 5+6{,}7^2\cdot 5+8{,}3^2\cdot 5)\approx 378{,}3;$$

$$\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2=\frac{1}{16}(2{,}4^2+3{,}4^2+3{,}6\quad+0{,}6^2+1{,}6^2+6{,}8^2+$$

$$+3{,}8^2+7{,}2^2+1{,}7^2+1{,}2^2+1{,}4^2+2{,}4^2+1{,}4^2+4{,}6^2+0{,}6^2+0+3^2+3^2+1+1)\approx 12{,}7.$$

Тоді $F=\frac{378{,}3}{12{,}7}\approx 29{,}8.$ За таблицями розподілу Фішера з 13 і 16 ступенями волі при $\alpha=0{,}05$ $f_\alpha=3{,}16.$ Реалізація вибіркової функції належить критичній області, тому гіпотеза H_0 відхиляється.

Приклад 9. При відрахунках на шкалах вимірювальних приладів цифри показів звичайно оцінюють лише наближено у частках шкали. За рівня значущості $\alpha=0{,}05$ потрібно перевірити гіпотезу про рівномірний закон розподілу, скориставшись наведеними в таблиці даними.

Цифра показу	Частота, n_i	Теоретична частота, n_i'	Відхилення, $n_i - n_i'$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
0	35	20	15	11,25
1	16	20	–4	0,8
2	15	20	–5	1,25
3	17	20	–3	0,45
4	17	20	–3	0,45
5	19	20	–1	0,05
6	11	20	–9	4,05
7	16	20	–4	0,8
8	30	20	10	5
9	24	20	4	0,8
Сума	200	200	—	24,9

Розв'язання. Застосуємо критерій χ^2 Пірсона. Для обчислення значення статистичної характеристики гіпотези, яка перевіряється, у таблиці записані теоретичні частоти $n_i' = n \cdot p_i$. При цьому вважалось, що довільна цифра має однакову ймовірність $p_i = 0{,}1$, тому усі значення теоретичних частот $n_i' = 200 \cdot 0{,}1 = 20$. У останньому стовпці таблиці знайдено суму, яка дорівнює значенню вибіркової функції $U = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$. За таблицями розподілу χ^2 з 9 ступенями волі $u_\alpha = 16{,}9$. Критична область правостороння, і фактичне значення вибіркової функції належить їй. Тому гіпотеза рівномірності розподілу відхиляється, що свідчить про систематичні помилки при знятті показань.

Приклад 10. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу, що кількість верстатів, які не працюють, серед 5 верстатів, що є в цеху, розподілено за біноміальним законом з $p = \frac{1}{3}$, якщо $D_n = \max\limits_x \left| F(x) - F_n^*(x) \right| = 0{,}0683$ і $n = 25$.

Розв'язання. Використаємо для перевірки гіпотези критерій Колмогорова: $P\left(\sqrt{n} D_n \ge \lambda_\alpha\right) = 1 - K(\lambda) = \alpha$. Згідно з умовами $K(\lambda_\alpha) = 0{,}95$

і за таблицями розподілу Колмогорова $\lambda_\alpha = 1{,}356$. Обчислимо $\sqrt{n}D_n = \sqrt{25}\cdot 0{,}0683 = 0{,}3415 < \lambda_\alpha = 1{,}356$. Значення статистичної характеристики не належить критичній області, тому гіпотеза про біноміальний закон розподілу у сукупності приймається.

Вправи для самостійного розв'язування

5.35. Із нормально розподіленої сукупності з $MX = a$ зроблено вибірку обсягом *n*. Побудувати найпотужніший критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma^2 = 10$ за альтернативної гіпотези H_1: $\sigma^2 = 9$. Нехай *n* = 30, $s^2 = 9{,}6$. Визначити, при якому *C* значення $\alpha = 0{,}02$. Яка з гіпотез приймається?

5.36. Із нормально розподіленої сукупності зроблено вибірку обсягом *n* = 10. Побудувати найпотужніший критерій для перевірки гіпотези H_0: $a = 2$, $\sigma^2 = 2{,}4$ за альтернативної гіпотези H_1: $a = 3, \sigma^2 = 3{,}61$. Яка з гіпотез приймається, якщо *C* = 4, а вибіркова сукупність така: 1,7; 2,4; 3,6; 4,1; 1,8; 0,9; 0,8; 2,3; 4; 2,1?

5.37. Із сукупності, яка має гамма-розподіл зроблено вибірку обсягом *n* = 10. Побудувати найпотужніший критерій для перевірки гіпотези H_0: $\lambda = 3$ за альтернативної гіпотези H_1: $\lambda = 2$, якщо $f(x) = \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$. Яка із гіпотез приймається, якщо *P* = 15, *C* = 3? Вибіркова сукупність така: 4,1; 4,3; 3,6; 5,2; 4,8; 5,2; 6,1; 4,7; 6,3; 6,2.

5.38. Із показниково розподіленої сукупності зроблено вибірку обсягом *n* = 50. Побудувати найпотужніший критерій для перевірки гіпотези H_0: $a = 12$ при альтернативній гіпотезі H_1: $a = 13$. Нехай $\bar{x} = 0{,}075$. Яка із гіпотез приймається, якщо *C* = 4?

5.39. Із сукупності, яка має розподіл Релея, зроблено вибірку обсягом $n = 10$. Побудувати найпотужніший критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma^2 = 20$ при альтернативній гіпотезі H_1: $\sigma^2 = 25$, якщо $f(x) = \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}$, $x \ge 0$. Яка із гіпотез приймається, якщо *C* = 3? Вибіркова сукупність така: 2,4; 3,6; 4,8; 5,2; 5,3; 2,9; 8,6; 7,5; 9,2; 3,5.

5.40. Із сукупності, розподіленої напівнормально, зроблено вибірку обсягом *n* = 12. Побудувати найпотужніший критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma^2 = 340$ за альтернативної гіпотези H_1:

$\sigma^2 = 400$, якщо $f(x) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}$, $x > 0$. Яка із гіпотез приймається, якщо $C = 2$? Вибіркова сукупність така: 17,4; 18,3; 20,1; 19,5; 18,6; 17,3; 16,8; 18,3; 19,4; 19,2; 18,1; 17,2.

5.41. Із сукупності зі щільністю

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-a(x-\mu)}, \text{ якщо } x \geq \mu, \\ 0, \text{ якщо } x < \mu \end{cases}$$

зроблено вибірку обсягом $n = 10$. Побудувати найпотужніший критерій для перевірки гіпотези H_0: $a = 0{,}25$, $\mu = 12$ за альтернативної гіпотези H_1: $a = 0{,}75$, $\mu = 15$. Яка з гіпотез приймається, якщо $C = 3$, а вибіркова сукупність така: 14; 18; 19; 21; 16; 13; 11; 9; 17; 15?

5.42. Із сукупності, щільність розподілу якої $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2}$, $x > 0$; зроблено вибірку обсягом n. Побудувати найпотужніший критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ за альтернативної гіпотези H_1: $\sigma^2 = \sigma_1^2$ (значення μ відоме).

5.43. Із сукупності, щільність розподілу якої $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2}$, $x > 0$; зроблено вибірку обсягом n. Побудувати найпотужніший критерій для перевірки гіпотези H_0: $\mu = \mu_0$ за альтернативної гіпотези H_1: $\mu = \mu_1$ (значення σ^2 відоме).

5.44. Із нормально розподіленої сукупності з невідомою дисперсією зроблено вибірку обсягом n. Побудувати критерій для перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$ за альтернативної гіпотези H_1: $-\infty < a < \infty$. Знайти закон розподілу для випадкової величини — аргументу λ.

5.45. Із нормально розподіленої сукупності з невідомим математичним сподіванням зроблено вибірку обсягом n. Побудувати критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ за альтернативної гіпотези H_1: $\sigma^2 > 0$. Знайти закон розподілу для випадкової величини — аргументу λ.

5.46. Із сукупності, яка має гамма-розподіл, зроблено вибірку обсягом n. Побудувати критерій для перевірки гіпотези H_0: $\alpha = \alpha_0$ за альтернативної гіпотези H_1: $\alpha > 0$, якщо $f(x) =$

$=\dfrac{\alpha^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$, а значення p відоме. Знайти закон розподілу для випадкової величини — аргументу λ.

5.47. Із показниково розподіленої сукупності зроблено вибірку обсягом n. Побудувати критерій для перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$ за альтернативної гіпотези H_1: $a > 0$. Знайти закон розподілу для випадкової величини — аргументу λ.

5.48. Із сукупності, яка має розподіл Релея, зроблено вибірку обсягом n. Побудувати критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ за альтернативної гіпотези H_1: $\sigma^2 > 0$, якщо $f(x) = \dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}$, $x \geq 0$. Знайти закон розподілу для випадкової величини — аргументу λ.

5.49. Під час перевірки діаметра цапф проведено 150 вимірювань відхилення від номінального розміру. При цьому $\bar{x} = 40{,}48$ мкм. Перевірити, чи істотно перевищує розраховане за вибіркою значення $\bar{x}$ номінальний розмір 40 мкм. Вважається, що діаметр цапф розподілений нормально з $\sigma^2 = 32\ \text{км}^2$. Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$.

5.50. У 12 косозубих колес вимірювали певний розмір, номінальне значення якого дорівнює 90,018. Результати вимірювань такі: 90,01; 90,012; 90,024; 90,02; 90,012; 90,024; 90,02; 90,012; 90,014; 90,01; 90,022; 90,023. Перевірити, чи забезпечує верстат витримку номінального розміру, вважаючи, що закон розподілу в сукупності нормальний, а рівень значущості $\alpha = 0{,}05$.

5.51. Розробляючи норми виробітку, на підприємстві провели 26 вимірювань продуктивності праці робітників, які виконували певну операцію. При цьому середня продуктивність праці $\bar{x} = 5{,}2$, а $\sigma = 0{,}4$. Перевірити гіпотезу, що в разі масового випуску цієї продукції середня продуктивність праці становитиме 5,1 за рівня значущості $\alpha = 0{,}01$.

5.52. Електричні лічильники було відрегульовано, щоб синхронізувати їхню роботу із стандартним лічильником. Під час перевірки 10 лічильників визначалось значення деякого параметра, здобуто такі результати:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,983	1,002	0,998	0,995	1,002	0,983	0,994	0,991	1,005	0,986

Значення цього параметра у стандартному лічильнику, дорівнює 1. Чи можна відхилення від стандарту розглядати як випадкові? Під час перевірки вважалось, що вимірювання утворюють випадкову вибірку із нормально розподіленої сукупності з $a = 1$. Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$.

5.53. Вимірювання деталей, які вироблені на тому самому верстаті, показали, що відхилення характеристики від номіналу в середньому становить 18 км і є підстави вважати, що вони розподілені за нормальним законом. З метою зменшення відхилень застосовано додаткову операцію, а потім зроблено вибірку обсягом n = 20. Згідно з результатами обстеження середнє відхилення становить 14 мкм, а $s = 4{,}5$ мкм. Перевірити за рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ гіпотезу про те, що додаткова операція не істотно впливає на розмір відхилення.

5.54. Токарний верстат-автомат виробляє циліндричні гвинти певного виду. Із партії гвинтів зроблено вибірку обсягом n = 20 і проведено вимірювання довжини гвинтів. Після розрахунків маємо: $\bar{x} = 18$ мкм, а $s^2 = 784$ мкм^2. Допустимі відхилення становлять 20 мкм (теоретичне середнє квадратичне відхилення). Чи можна за даними вибірки вважати, що верстат дає допустимі відхилення? Рівень значущості α узяти таким, що дорівнює 0,02.

5.55. На робочому місці 9 раз фіксується тривалість виконання робітником певної операції. Числові характеристики вибірки такі: $\bar{x} = 83$ хв; $s^2 = 4{,}04$ хв^2. Перевірити, чи істотне відхилення вибіркової дисперсії від дисперсії $\sigma^2 = 3$ хв^2, значення якої здобуто на підставі багатьох вимірювань тривалості цієї операції. Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$.

5.56. Для порівняння густини цегли із двох зон випалювання *А* і *В* відібрали і зважили $n_1 = 14$ цеглин із зони *А* і $n_2 = 10$ цеглин із зони *В*. Кожного разу було помічено відхилення від номінального значення 1800 кг/м^3. Статистичні характеристики вибірок такі: для зони *А* — $\bar{x}_1 = 2{,}43$ кг/м^3, $s_1^2 = 16{,}41$, а для зони *В* — $\bar{x}_2 = 5{,}08$ кг/м^3, $s_2^2 = 22{,}5$. За рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про неістотність відмінності між a_1 і a_2, вважаючи, що дисперсії сукупностей однакові, а в сукупностях виконується нормальний закон розподілу.

5.57. Під час обробки втулок на верстаті-автоматі було взято дві проби, по 10 деталей у кожній. Результати вимірювання діаметрів втулок у порядку обробки наведено в таблиці:

Проба	Деталь									
	1	2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	2,066	2,063	2,068	2,06	2,067	2,063	2,069	2,062	2,062	2,060
2	2,063	2,06	2,057	2,056	2,059	2,058	2,062	2,059	2,055	2,057

Розподіл діаметрів вважається нормальним. Крім того, вважаємо, що дисперсії в обох вибірках однакові. Перевірити гіпотезу про те, що математичні сподівання сукупностей однакові. Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$.

5.58. Вибірка 50 електроламп заводу А показала середню тривалість горіння $\bar{x}_1 = 1282$ год із середнім квадратичним відхиленням $s_1 = 80$ год, а така сама вибірка того самого типу ламп заводу *B* — $\bar{x}_2 = 1208$ год, $s_2 = 94$ год. Перевірити гіпотезу про те, що строк служби ламп з обох заводів однаковий, якщо рівень значущості $\alpha = 0{,}02$.

5.59. Для перевірки істотності впливу на міцність бетону особливого способу приготування проведено експеримент. Із партії сировини було взято 6 однорідних проб. Ці вибірки було поділено випадковим способом на дві групи з трьох вибірок кожна. Із кожної вибірки було зроблено пробний куб, причому вибірки із другої групи піддавались особливій обробці. Через 28 днів визначили опір на стискування і дістали такі результати: у першій групі — 290, 311, 284; у другій групі — 309, 318, 318. Перевірити гіпотезу про те, що бетон у обох групах однаково міцний, якщо рівень значущості $\alpha = 0{,}05$.

5.60. Для перевірки точності двох верстатів проведено вимірювання деякого розміру виготовлюваних деталей. На першому верстаті було виготовлено 25 деталей, при цьому $s_1 = 63{,}68$ мкм, на другому верстаті було виготовлено 30 деталей і $s_2 = 32{,}6$ мкм. Чи можна на підставі цих даних зробити висновок, що точність другого верстата вища, якщо рівень значущості $\alpha = 0{,}05$?

5.61. Із двох нормально розподілених сукупностей зроблено вибірки, які характеризуються такими результатами: $n_1 = 10$, $s_1^2 = 12$, $n_2 = 12$, $s_2^2 = 8{,}5$. За рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про однаковість дисперсій у сукупностях.

5.62. Випробування на розтягування, які проводились для того самого сплаву, виготовленого на 5 різних заводах, дало такі результати:

Завод	Випробування				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	7216	7351	7412	7296	7335
2	7180	7214	7316	7235	7305
3	7080	7216	7304	7213	7082
4	7114	7253	7305	7204	7189
5	7520	7360	7315	7212	7403

Чи істотні відмінності у якості сплавів, якщо рівень значущості $\alpha = 0{,}05$?

5.63. У таблиці наведено тривалості нагрівання катода в секундах для трьох різних типів трубок:

Трубка	Випробування							
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
A	19	20	23	20	26	18	18	32
B	20	37	20	24	32	22	27	18
C	16	19	19	17	18	19	26	18

Перевірити гіпотезу про те, що середня тривалість нагрівання ламп (математичне сподівання) однакова для всіх типів трубок, узявши $\alpha = 0{,}05$.

5.64. Вважаючи, що довговічність електричної лампи має нормальний розподіл і відмінності у матеріалах чи технологіях не впливають на значення дисперсії, на підставі даних таблиці перевірити гіпотезу про однаковість математичних сподівань тривалості горіння ламп, виготовлених із різних матеріалів, якщо рівень значущості $\alpha = 0{,}05$.

Партія	Виробування							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1600	1610	1650	1680	1700	1700	1800	1820
2	1500	1640	1640	1700	1750			
3	1460	1550	1600	1620	1640	1660	1735	1815
4	1510	1520	1530	1568	1600	1680		

5.65. Для контрольних випробувань продукції 100 однотипних верстатів узято по 10 виробів із кожної партії, в яких по 40 деталей, і для кожної вибірки підраховано кількість деталей другого сорту:

x_i	0	1	2	3	4	5	6 і більше
m_i	1	10	27	36	25	1	0

Через m_i позначено кількість вибірок, які містять x_i виробів другого сорту. Кількість виробів, які випускалися другим сортом, протягом тривалого часу становила 30 %. За допомогою критерію χ^2 перевірити відповідність результатів випробування гіпергеометричному та біноміальному розподілам, узявши рівень значущості $\alpha = 0{,}05$.

5.66. За допомогою контрольного приладу було виміряно відстань X центра мас 600 деталей від осі їхньої зовнішньої циліндричної поверхні. Результати вибірки наведено в таблиці:

Межі інтервалу	Частота
0—16	40
16—32	128
32—48	139
48—64	126
64—80	91
80—96	45
96—112	19
112—128	8
128—144	3
144—160	1

Перевірити за допомогою критерію χ^2, чи узгоджуються дані спостереження із законом розподілу Релея: $f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}$, $x \geq 0$. Оцінку параметра σ^2 знайти методом максимальної правдоподібності. Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$.

5.67. Випробування 200 електролампочок на тривалість горіння дали такі результати:

Межі інтервалу	Частота
0—300	53
300—600	41
600—900	30
900—1200	22
1200—1500	16
1500—1800	12
1800—2100	9
2100—2400	7
2400—2700	5
2700—3000	3
3000—3300	2
Понад 3300	0

За допомогою критерію χ^2 перевірити відповідність даних випробування гіпотезі про показниковий закон розподілу в сукупності. Рівень значущості взяти $\alpha = 0{,}05$.

5.68. За допомогою критеріїв χ^2 і Колмогорова перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу у сукупності — розміри деталей після шліфування, на підставі даних, які наводяться в таблиці.

Межі інтервалу	Частота
3,6—3,7	1
3,7—3,8	22
3,8—3,9	40
3,9—4,0	79
4,0—4,1	27
4,1—4,2	26
4,2—4,3	4
4,3—4,4	1

Рівень значущості $\alpha = 0{,}02$. Оцінки для параметрів узяти на підставі вибіркових даних.

5.69. Через однакові проміжки часу у тонкому шарі розчину золота реєструвалась кількість частинок золота, які попадали у поле зору мікроскопа. Результати спостережень наведено у таблиці.

N	0	1	2	3	4	5	6	7
Частота	62	140	131	98	53	10	3	3

За допомогою критеріїв χ^2 і Колмогорова перевірити узгодження результатів спостереження із з законом розподілу Пуассона. Параметр розподілу знайти за вибірковими даними. Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$.

5.70. Використавши дані задачі 5.1, перевірити з допомогою критерію Колмогорова гіпотезу про те, що кількість деталей, які витрачаються, розподілена за законом Пуассона з $a = 1$, якщо $\alpha = 0{,}05$.

5.4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ

Якщо розглядаються дві випадкові величини, то між ними можуть бути такі форми залежності:

а) функціональна залежність, $Y = \varphi(X)$;

б) стохастична залежність, коли зі зміною значення однієї величини змінюється розподіл другої величини;

в) кореляційна залежність, коли умовне середнє значення однієї величини функціонально залежить від другої величини.

Нехай результати вибірки із двовимірної сукупності подано в табличній формі:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	…	y_k	n_{x_i}	$\bar{y}_{x_i}$
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1k}	n_{x_1}	$\bar{y}_{x_1}$
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2k}	n_{x_2}	$\bar{y}_{x_2}$
…	…	…	…	…	…	…
x_m	n_{m1}	n_{m2}	…	n_{mk}	n_{x_m}	$\bar{y}_{x_m}$
n_{y_j}	n_{y_1}	n_{y_2}	…	n_{y_k}	n	—
$\bar{x}_{y_j}$	$\bar{x}_{y_1}$	$\bar{x}_{y_2}$	…	$\bar{x}_{y_k}$	—	—

Якщо розглядати таблицю за рядками, то кожному значенню x_i відповідає деякий розподіл випадкової величини Y. Обчислимо для цих розподілів умовні середні значення $\bar{y}_{x_i} = \frac{\sum_{j=1}^{k} y_j n_{ij}}{n_{x_i}}$, $i = 1,2,...,m$. Отже, $\bar{y}_x = f(x)$. Аналогічно, розглядаючи таблицю за стовпцями, також визначаємо умовні середні величини $\bar{x}_{y_j} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_{ij}}{n_{y_j}}$, $j = 1,2,...,k$. Знову маємо залежність виду $\bar{x}_y = \varphi(x)$.

Рівняння, які виражають умовні середні, називаються кореляційними рівняннями або рівняннями регресії другого роду. У кореляційному аналізі розглядаються такі задачі:

1) визначити за кореляційною таблицею форму залежності між випадковими величинами, тобто вид функціональної залежності $\bar{y}_x = f(x)$ і $\bar{x}_y = \varphi(y)$;

2) оцінити тісноту залежності, тобто визначити ступінь розсіяності можливих значень однієї випадкової величини відносно лінії регресії, якщо одна із величин набуває певних значень.

А. Лінійна кореляційна залежність

Для визначення форми залежності між X і Y за результатами розрахунків у кореляційній таблиці в системі координат XOY відкладаємо точки $(x_i, \bar{y}_{x_i})$. Якщо ці точки розміщені на лінії, яка близька до прямої, то можна вважати, що залежність має лінійний характер, тобто рівняння регресії подається у вигляді $\bar{y}_x = ax + b$, або аналогічно $\bar{x}_y = cy + d$. За допомогою методу найменших квадратів можна визначити коефіцієнти рівнянь регресії: $b = \bar{y} - a\bar{x}$, $a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{DX}$; $d = \bar{y} - c\bar{y}$; $c = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{DY}$. Коефіцієнти $a = \rho_{y/x}$ і $c = \rho_{x/y}$ — коефіцієнти регресії. Отже, лінійні рівняння регресії мають вигляд: $\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{y/x}(x - \bar{x})$; $\bar{x}_y - \bar{x} = \rho_{x/y}(y - \bar{y})$.

Лінії регресії перетинаються в точці $(\bar{x}, \bar{y})$, яка називається ***центром кореляції***. Тіснота зв'язку в разі лінійної залежності оцінюється коефіцієнтом кореляції. ***Коефіцієнтом кореляції*** випадкових величин X і Y називається середнє геометричне значення коефіцієнтів регресії, яке має знак останніх: $r = = \pm\sqrt{\rho_{y/x}\rho_{x/y}} = \pm\dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{s_x s_y}$.

Коефіцієнти регресії виражаються через коефіцієнт кореляції за такими формулами:

$\rho_{y/x} = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{s_x^2}\dfrac{s_y}{s_y} = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{s_x s_y}\dfrac{s_y}{s_x} = r\dfrac{s_y}{s_x}$; аналогічно $\rho_{x/y} = r\dfrac{s_x}{s_y}$. Тоді рівняння регресії мають вигляд: $\overline{y}_x - \overline{y} = r\dfrac{s_y}{s_x}(x - \overline{x})$; $\overline{x}_y - \overline{x} = = r\dfrac{s_x}{s_y}(y - \overline{y})$.

Абсолютна величина коефіцієнта кореляції не перевищує одиницю. Якщо $r = 0$, то величини не пов'язані лінійною залежністю, але при цьому між ними можливий нелінійний кореляційний зв'язок. Якщо r зростає за абсолютною величиною від нуля до одиниці, то тіснота зв'язку зростає, і, якщо $r = \pm 1$, то кореляційна залежність перетворюється на функціональну і прямі регресії зливаються в одну пряму.

Обчислення параметрів, які входять у рівняння регресії, спрощується, якщо перейти до умовних змінних і умовних моментів розподілу.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. У результаті обстеження одержано статистичний розподіл 100 підприємств за виробничими фондами *X*, млн грн, і добовим виробітком *Y*, т.:

$X \backslash Y$	10	15	20	25	30	35	n_{x_i}
50	2	2					4
60	2	4	5	6	4		21
70		2	7	12	10	4	35
80				10	10	6	26
90				8		6	14
n_{y_j}	4	8	12	36	24	16	100

Визначити форму залежності між *X* і *Y*, знайти рівняння ліній регресії і тісноту зв'язку.

Розв'язання. Знаходимо умовні середні $\overline{y}_x$ і $\overline{x}_y$.

$$\overline{y}_{x=50}=\frac{20+30}{4}=12{,}5;\quad \overline{y}_{x=60}=\frac{20+60+100+150+120}{21}\approx 21{,}4;$$

$$\overline{y}_{x=70}=\frac{30+140+300+300+140}{35}=26;\quad \overline{y}_{x=80}=\frac{250+300+210}{26}\approx 29{,}2;$$

$$\overline{y}_{x=90}=\frac{200+210}{14}\approx 29{,}3;\quad \overline{x}_{y=10}=\frac{100+120}{4}=55;$$

$$\overline{x}_{y=15}=\frac{100+240+140}{8}=60;\quad \overline{x}_{y=20}=\frac{300+490}{12}\approx 65{,}8;$$

$$\overline{x}_{y=25}=\frac{360+840+800+720}{36}\approx 75{,}6;\quad \overline{x}_{y=30}=\frac{240+700+800}{24}=72{,}5;$$

$$\overline{x}_{y=35}=\frac{280+480+540}{16}\approx 81{,}3.$$

Результати обчислень перенесемо в таблицю. У ній перейдемо до умовних змінних, узявши $C_1=70,\ h_1=10,\ \mathrm{C}_2=25,\ h_2=5.$

u \ v	–3	–2	–1	0	1	2	n_{x_i}	$\overline{y}_{x_i}$
–2	2	2					4	12,5
–1	2	4	5	6	4		21	21,4
0		2	7	12	10	4	35	26
1				10	10	6	26	29,2
2				8		6	14	29,3
n_{y_j}	4	8	12	36	24	16	100	
$\overline{x}_{y_j}$	55	60	65,8	75,6	72,5	81,3		

Для визначення форм залежності $\overline{y}_x=f(x)$ і $\overline{x}_y=\varphi(y)$ проаналізуємо, як змінюються умовні середні зі зміною випадкових величин. Зі зростанням x умовна середня $\overline{y}_x$ також зростає, а при зростанні y умовна середня $\overline{x}_y$ в основному зростає. У системі координат XOY відкладемо множину точок $\left(x_i,\overline{y}_{x_i}\right)$ значком «$\times$» а множину точок $\left(\overline{x}_{y_j},y_j\right)$ — значком «$\circ$» (рис. 5.4).

Графіки рівнянь регресії зображено на рис. 5.4.

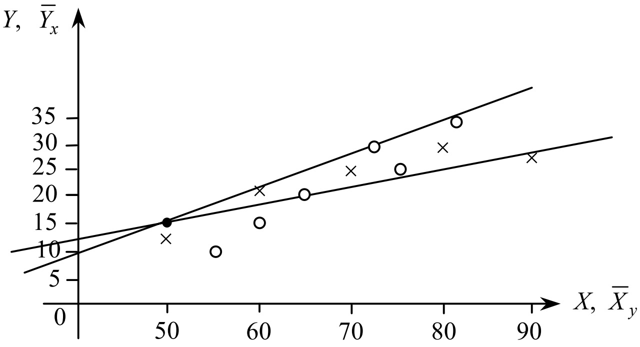

Рис. 5.4

Із рис. 5.4 бачимо, що кожна із груп побудованих точок розміщена приблизно на деякій прямій, дещо відхиляючись від неї. Рівняння прямих шукаємо у вигляді:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r\frac{s_y}{s_x}(x - \overline{x}); \quad \overline{x}_y - \overline{x} = r\frac{s_x}{s_y}(y - \overline{y}).$$

За даними останньої таблиці знаходимо умовні моменти розподілу:

$$\overline{u} = \frac{-8 - 21 + 26 + 28}{100} = 0{,}25; \quad \overline{u}^2 = \frac{16 + 21 + 26 + 56}{100} = 1{,}19;$$

$$\overline{v} = \frac{-12 - 16 - 12 + 24 + 32}{100} = 0{,}16; \quad \overline{v}^2 = \frac{36 + 32 + 12 + 24 + 64}{100} = 1{,}68.$$

$$s_u = \sqrt{1{,}19 - \left(0{,}25^2\right)} \approx 1{,}06; \quad s_v = \sqrt{1{,}68 - (0{,}16)^2} \approx 1{,}29.$$

Щоб знайти коефіцієнт кореляції, обчислимо середнє значення добутку умовних змінних:

$$\overline{uv} = \frac{1}{100}(12 + 8 + 6 + 8 + 5 - 4 + 10 + 12 + 24) = 0{,}81.$$

$$r = \frac{0{,}81 - 0{,}25 \cdot 0{,}16}{1{,}06 \cdot 1{,}09} \approx 0{,}568.$$

Знайдемо значення решти параметрів, які входять до рівняння регресії: $\overline{x} = 70 + 0{,}25 \cdot 10 = 72{,}5$; $\overline{y} = 25 + 0{,}16 \cdot 5 = 25{,}8$; $s_x = 1{,}06 \cdot 10 = 10{,}6$; $s_y = 1{,}29 \cdot 5 = 6{,}45$.

Запишемо рівняння ліній регресії:

$$\bar{y}_x - 25{,}8 = \frac{6{,}45}{10{,}6} 0{,}563(x - 72{,}5); \quad \bar{y}_x = 0{,}343x - 0{,}933;$$

$$\bar{x}_y - 72{,}5 = \frac{10{,}6}{6{,}45} 0{,}563(y - 25{,}8); \quad \bar{x}_y = 0{,}925y + 48{,}635.$$

Б. Нелінійна кореляційна залежність

Якщо відображені на площині XOY групи точок $\left(x_i, \bar{y}_{x_i}\right)$ і $\left(\bar{x}_{y_j}, y_j\right)$ розміщуються, нагадуючи деякі криві, то доцільно вважати, що між досліджуваними величинами існує нелінійна залежність. Тепер знову виникло завдання підібрати таку криву, яка б на основі методу найменших квадратів мала найменші відхилення від точок, здобутих при спостереженні, знайти її рівняння і визначити тісноту зв'язку.

Розглянемо деякі найпростіші види нелінійної кореляційної залежності. Нехай зі зростанням однієї випадкової величини умовні середні другої спадають, але не на ту саму величину, як це буває в разі лінійної залежності, а розмір зміни ніби згасає. У такому разі можна вважати, що залежність гіперболічна:

$$\bar{y}_x = \frac{a}{x} + b, \text{ або } \bar{x}_y = \frac{c}{y} + d.$$

Параметри a і b за методом найменших квадратів визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{x_i} n_{x_i} + b\sum\limits_{i=1}^{m} n_{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{m} \bar{y}_{x_i} n_{x_i}, \\ a\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{x_i^2} n_{x_i} + b\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{x_i} n_{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{x_i} \bar{y}_{x_i} n_{x_i}. \end{cases}$$

Аналогічно складається система рівнянь у разі, коли $\bar{x}_y$ гіперболічно залежить від y.

Нехай зі зростанням однієї випадкової величини умовні середні другої зростають (спадають), досягають максимуму (мінімуму), а потім спадають (зростають). Тоді можна вважати, що між ними існує параболічна залежність виду:

$$\overline{y}_x = a_2x^2 + a_1x + a_0, \text{ або } \overline{x}_y = b_2y^2 + b_1y + b_0.$$

За методом найменших квадратів для визначення значень параметрів a_2, a_1, a_0 потрібно скласти і розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_2\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 n_{x_i} + a_1\sum\limits_{i=1}^{m} x_i n_{x_i} + a_0\sum\limits_{i=1}^{m} n_{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{y}_{x_i} n_{x_i}, \\ a_2\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^3 n_{x_i} + a_1\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 n_{x_i} + a_0\sum\limits_{i=1}^{m} x_i n_{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \overline{y}_{x_i} n_{x_i}, \\ a_2\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^4 n_{x_i} + a_1\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^3 n_{x_i} + a_0\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 n_{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 \overline{y}_{x_i} n_{x_i}. \end{cases}$$

У разі нелінійної кореляційної залежності тіснота зв'язку між величинами характеризується кореляційним відношенням. ***Кореляційним відношенням*** називається відношення середніх квадратичних відношень умовних середніх до загального середнього квадратичного відхилення: $\eta_{y/x} = \dfrac{\delta_y}{s_y}$; $\eta_{x/y} = \dfrac{\delta_x}{s_x}$, де $\delta_y = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\overline{y}_{x_i} - \overline{y}\right)^2 n_{x_i}}{n}}$;

$$\delta_x = \sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\overline{x}_{y_j} - \overline{x}\right)^2 n_{y_j}}{n}}.$$

Кореляційне відношення набуває значення на відрізку $[0;1]$. Якщо кореляційне відношення дорівнює нулю, то кореляційний зв'язок відсутній, якщо $\eta = 1$, то випадкові величини зв'язані функціональною залежністю. Зі зростанням значення η тіснота кореляційного зв'язку збільшується.

Приклад 2. У результаті обстеження одержано статистичний розподіл 30 однотипних підприємств по добовому виробленню продукції X і собівартості одиниці цієї продукції Y. Установити форму залежності між X і Y, знайти рівняння ліній регресії і оцінити тісноту зв'язку.

Розв'язання. Знаходимо умовні середні значення $\overline{y}_{x_i}$ і $\overline{x}_{y_j}$. Результати обчислень заносимо в таблицю. У цій самій таблиці зроблено перехід до умовних змінних.

Y \ x	100	110	120	130	n_{x_i}
50			1	3	4
100		3	3		6
150		6	2	1	9
200	1	4		1	6
250	4	1			5
n_{y_j}	5	14	6	5	30

Переходячи до умовних змінних, ураховуємо, що $C_1 = 150$, $\Delta x = 50$, $C_2 = 110$, $\Delta y = 10$.

V \ u	–1	0	1	2	n_{x_i}	$\overline{y}_{x_i}$
–2			1	3	4	127,5
–1		3	3		6	155
0		6	2	1	9	114,4
1	1	4		1	6	111,7
2	4	1			5	102
n_{y_j}	5	14	6	5	30	
$\overline{x}_{y_j}$	240	160,7	108,3	100		

На рис. 5.5 зобразимо на координатній площині множини точок $\left(x_i, \overline{y}_{x_i}\right)$ і $\left(\overline{x}_{y_j}, y_j\right)$ відповідно значками «$\times$» і «$\circ$». Згідно з рис. 5.5 кожна із груп точок розміщена приблизно на деякій гіперболі, дещо відхиляючись від неї.

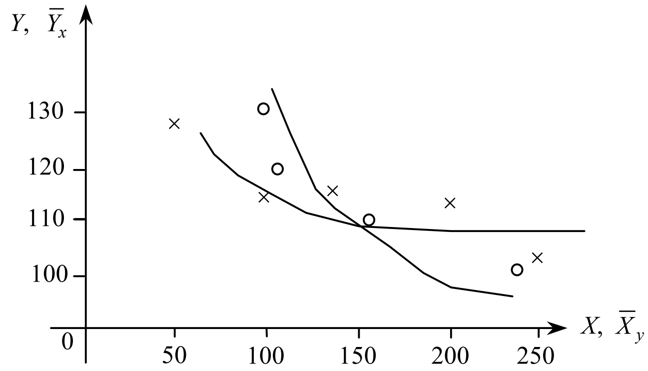

Рис. 5.5

Рівняння гіперболи $\overline{y}_x = f(x)$ шукаємо у вигляді $\overline{y}_x = \frac{a}{x} + b$. Для визначення коефіцієнтів відповідної системи рівнянь складаємо таблицю:

x_i	n_{x_i}	$\frac{n_{x_i}}{x_i}$	$\frac{n_{x_i}}{x_i^2}$	$\overline{y}_{x_i}$	$\overline{y}_{x_i} n_{x_i}$	$\frac{\overline{y}_{x_i} n_{x_i}}{x_i}$
50	4	0,08	0,0016	127,5	510	10,2
100	6	0,06	0,0006	115	690	6,9
150	9	0,06	0,0004	114,4	1030	6,86
200	6	0,03	0,00015	111,7	670	3,35
250	5	0,02	0,00008	102	510	2,04
Сума	30	0,25	0,00283	—	3410	29,35

Невідомі параметри a і b знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}25a + 30b = 3410, \\ 0{,}00283a + 0{,}25b = 29{,}35. \end{cases}$$

Розв'язок системи $a \approx 1250,\ b \approx 103{,}3$. Рівняння регресії має вигляд: $\overline{y}_x = \frac{1250}{x} + 103{,}3.$

Аналогічно можна скласти систему рівнянь і знайти рівняння регресії $\bar{x}_y = \frac{c}{y} + d.$

Складаючи відповідну систему рівнянь і розв'язуючи її, дістаємо $\bar{x}_y = \frac{36998}{y} - 175.$

Тісноту зв'язку між випадковими величинами оцінимо з допомогою кореляційних відношень.

Необхідні для розрахунків параметри знайдемо з допомогою умовних моментів розподілу:

$$\bar{u} = \frac{1}{15}; \quad \overline{u^2} = \frac{8}{5}; \quad \bar{v} = \frac{11}{30}; \quad \overline{v^2} = \frac{31}{30};$$

$$\bar{x} = \frac{1}{15} \cdot 50 + 150 \approx 153; \quad \bar{y} = 10 \cdot \frac{11}{30} + 110 \approx 114;$$

$$s_x = 50\sqrt{\frac{8}{5} - \left(\frac{1}{15}\right)^2} \approx 63; \quad s_y = 10\sqrt{\frac{31}{30} - \left(\frac{11}{30}\right)^2} \approx 9{,}5;$$

$$\delta_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} (\bar{y}_i - 114)^2 n_{x_i}}{30}} \approx 7{,}2; \quad \delta_x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{4} \left(\bar{x}_{y_j} - 153\right)^2 n_{y_j}}{30}} \approx 47.$$

Отже, $\eta_{y/x} = \frac{7{,}2}{9{,}5} \approx 0{,}76; \quad \eta_{x/y} = \frac{47}{63} \approx 0{,}75.$

З огляду на значення кореляційних відношень можна стверджувати, що між добовим виробітком продукції і собівартістю одиниці продукції існує досить істотна кореляційна залежність.

Вправи для самостійного розв'язування

5.71. У результаті спостережень одержано статистичний розподіл 100 га ріллі за кількістю внесених добрив *X* і урожайністю *Y*.

Вибрати форму залежності між випадковими величинами *X* і *Y*, знайти рівняння ліній регресії й оцінити тісноту зв'язку.

$X \backslash Y$	10	12	14	16	18	20	n_{x_i}
10	9	4	1				14
30	1	10	9	3			23
50		2	6	14	6		28
70			1	10	18	6	35
n_{y_j}	10	16	17	27	24	6	10

5.72. У результаті обстеження дістали статистичний розподіл 141 цукрового заводу за основними виробничими фондами, млн грн, X і за середньодобовою переробкою цукрових буряків, Y, тис. ц:

$X \backslash Y$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	n_{x_i}
1,25	1									1
1,75	4	6	9	2						21
2,25	5	9	15	10	2	1				42
2,75		4	6	7	7		1			25
3,25	3	3	2	7	8	1				24
3,75			3	2	3	3	2			13
4,25				2	2	1	2	2	1	10
4,75						2			1	3
5,25				1					1	2
n_{y_j}	13	22	35	31	22	8	5	2	3	141

Вибрати форму залежності між X та Y, знайти рівняння ліній регресії й оцінити тісноту зв’язку.

5.73. У результаті спостереження одержано статистичний розподіл 40 га зрошуваних земель за глибиною зрошення (*X*) та урожайністю (*Y*).

X \ Y	10	12	14	16	n_{x_i}
0	4	1			5
10		2	3	2	7
20		1	4	4	9
30		2	2	3	7
40		2	3	1	6
50	2	2	2		6
n_{y_j}	6	10	14	10	40

Вибрати форму залежності між *X* та *Y*, знайти рівняння ліній регресії та оцінити тісноту зв’язку.

БЛОЧНО-МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ

ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА № 1

Задача 1. Із 20 банків 10 розташовані за межами міста. Для дослідження випадково обрано 5 банків. Яка ймовірність того, що серед обраних у межах міста виявляться:

А. 3 банки;

В. Хоча б один банк?

Задача 2. Яка ймовірність того, що навмання кинута в круг точка виявиться в квадраті, вписаному в цей круг?

Задача 3. Експедиція видавництва відправила газети в три поштових відділення. Імовірність своєчасної доставки до 1-го відділення дорівнює 0,95, до 2-го відділення — 0,9, до 3-го відділення — 0,8. Знайти ймовірність таких подій:

А. Тільки одне відділення отримає газети своєчасно;

В. Хоча б одне відділення отримає газети із запізненням.

Задача 4. Контролер ВТК, перевіривши якість пошиття 16+А пальт, встановив, що 16 з них 1-го сорту, а решта — 2-го сорту. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання з цієї партії трьох пальт одне буде 2-го сорту?

Задача 5. У коробці перемішано електролампи однакового розміру і форми: потужністю 100 Вт — 7 шт., потужністю 75 Вт. — 13 шт. Вилучено навмання 3 лампи. Яка ймовірність того, що:

А. Вони однакової потужності;

В. Хоча б дві з них потужністю 100 Вт.

Задача 6. У робітника-складальника є 3 деталі 1-го сорту і 7 деталей 2-го сорту. Він бере спочатку одну деталь, а потім другу. Знайти ймовірність того, що перша із взятих деталей 1-го сорту, а друга — 2-го сорту.

Задача 7. Мисливець, який має 4 патрони, стріляє по дичині до першого влучення або до витрати всіх патронів. Імовірність влучення за першого пострілу дорівнює 0,6, а в разі кожного наступного зменшується на 0,1:

Необхідно:

А. Скласти закон розподілу кількості патронів, витрачених мисливцем;

В. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини.

Задача 8. Нехай X — виручка фірми, у. о. Знайти розподіл виручки $Z = XY$ у гривнях у перерахунку за курсом у. о., якщо виручка X не залежить від Y, а закони розподілів випадкових величин X і Y мають вигляд:

X:

X	$1000A$	$2000A$
P	0,7	0,3

Y:

Y	$25+A$	$27+A$
P	0,4	0,6

Задача 9. Розподіл дискретної випадкової величини задано формулою: $P(X = k) = Ck^2,\ k = 1,2,3,4,...,N$

А. Знайти константу C.

В. Знайти ймовірність події $|X - N| \leq 1$.

Задача 10. Випадкова величина X, розподілена на інтервалі (1; 4), задана квадратичною функцією $F(x) = ax^2 + bx + c$, що має максимум при $x = 4$. Знайти параметри a, b, c і обчислити ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал [2; 3]. Знайти моду, медіану, квантиль $x_{0,4}$, 20-процентну точку розподілу, коефіцієнт асиметрії і ексцес.

ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА № 2

Задача 1. Дано ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	N	$N+4$	$N+5$	$N+7$	$N+9$
p_i	$0{,}001N$	$0{,}001(N+5)$	$0{,}001(N+10)$	$0{,}001(N+20)$	$0{,}001$ $(N+?)$

Знайти та зобразити графічно її функцію розподілу.

Обчислити ймовірності подій: $P(2+N<x<6+N)$, $P(x>6+n)$.

Побудувати полігон розподілу. Знайти $M(x)$, $\sigma(x)$.

Задача 2. Нехай X, Y, Z — випадкові величини: X — дохід фірми, Y — її витрати, $Z = X - Y$ — прибуток. Знайти розподіл доходу, якщо витрати і дохід незалежні і задані розподілами X:

x_i	$3+N$	$4+N$	$5+N$
p_i	$0{,}001N$	$0{,}002N$	?

Y:

x_j	$N+1$	$N+2$
p_j	$0{,}002N$	?

Знайти $M(Z)$, $\sigma(Z)$.

Задача 3. Дано функцію розподілу випадкової величини X:

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ x^2/N^2, 0<x\le N\\ 1, x>N\end{cases}$$

1. Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$.
2. Побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$.
3. Упевнитися в тому, що X — неперервна випадкова величина.
4. Знайти ймовірності: $P(X=N)$, $P(X<N)$, $P(N<X<N+1)$ (показати дві останні ймовірності на графіках функцій).
5. Обчислити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, моду M_oX, медіану MeX, коефіцієнт асиметрії As, ексцес E_k.

Задача 4. Закон неперервної випадкової величини X задано щільністю ймовірностей $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ a(N-x), 0<x\le N\\ 0, x>N\end{cases}$. Знайти a. Побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$.

ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА № 3

1. Закон розподілу випадкової дискретної величини (X,Y) задано таблицею:

$x_i \backslash y_i$	0	$N+1$	$N+2$	$N+3$
$-N$	$0{,}001\cdot N$	$0{,}001(N+2)$	$0{,}001(N+3)$	$0{,}001(N+5)$
0	$0{,}001(N+1)$	$0{,}001(N+4)$	$0{,}001(N+5)$	$0{,}001(N+6)$
N	$0{,}001(N+7)$	$0{,}001(N+6)$	$0{,}001(N+4)$	?

Знайти:

а) закони розподілу одновимірних випадкових величин X і Y;

б) умовні закони розподілу випадкової величини X за умови, що $Y=N+2$ і випадкової величини Y за умови, що $X=N$;

в) імовірність $P(Y>X)$;

г) знайти коваріацію і коефіцієнти кореляції випадкових величин X і Y;

д) визначити, корельованими чи некорельованими є ці випадкові величини.

2. Двовимірну випадкову величину (X,Y) розподілено рівномірно всередині квадрата з центром у початку координат. Сторони квадрата дорівнюють $\sqrt{N}$ і утворюють кути 45° з осями координат. Визначити:

а) вираз спільної щільності розподілу двовимірної випадкової величини $(X;Y)$;

б) щільності розподілу ймовірностей одновимірних складних випадкових величин X і Y;

в) їхні умовні щільності;

г) залежність X та Y;

д) коваріацію та коефіцієнти кореляції;

е) корельованість випадкових величин X та Y.

3. Дано щільності ймовірностей незалежних складних двовимірних випадкових величин $(X;Y)$:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x<0\\ Ne^{-Nx}, \text{ якщо } x>0\end{cases}$$

$$\varphi_2(y)=\begin{cases}0, \text{ якщо } y<0\\ (N+k)e^{-(N+k)y}, \text{ якщо } y>0\end{cases}$$

Знайти вираз спільної щільності і функції розподілу двовимірної випадкової величини.

4. Відділення банку у середньому обслуговує $100\cdot N$ клієнтів за день. Оцінити ймовірність того, що сьогодні у відділенні банку буде обслужено: а) не більше $100\cdot(N+1)$ клієнтів; б) більш ніж $100\cdot(N+0{,}5)$ клієнтів.

5. У середньому $0{,}1N\%$ $(N\le 100)$ населення деякого регіону потребують працевлаштування. Оцінити за допомогою нерівності Чебишова ймовірність того, що рівень непрацевлаштованості серед 10 000 досліджених буде в межах від $0{,}1(N+1)$ до $0{,}01(N+k)$.

6. Дано $F_{\xi\eta}(x,y)=\dfrac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg} x+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg} y+\dfrac{\pi}{2}\right)$.
$F_{\eta}(y)=\dfrac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} y+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

1) Знайти умовну функцію розподілу $F_{\xi}\left(x/y\right)$.

2) З'ясувати, чи є залежними величини ξ та η.

7. Задано двовимірну щільність імовірностей $f_{\xi\eta}=$ $=\dfrac{1}{\pi^2\left(1+x^2+y^2+x^2y^2\right)}$, та одновимірну щільність імовірностей $f_{\eta}(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}$. Знайти умовну щільність імовірностей $f_{\xi}\left(x/y\right)$.

8. Задана двовимірна функція розподілу

$$F_{\xi\eta}(x,y)=1-e^{-kx}-e^{-ny}+e^{-(kx+ny)}.$$

Знайти $F_{\xi n}(x)$ та $F_{\eta}(x)$.

9. Систему двох випадкових величин задано двовимірною щільністю розподілу

$$\mathrm{f}_{\xi\eta}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\begin{cases}1/\mathrm{N}, \text{ якщо } 1<\mathrm{x}<\mathrm{N}+5,\ 1<\mathrm{y}<\mathrm{k}+4\\ \text{у противному разі.}\end{cases}$$

Обчислити кореляційний момент $K_{\xi\eta}(x,y)$.

10. Задано таблицю розподілу системи двох випадкових величин $\xi\eta$:

$\eta \backslash \xi$	$0+N$	$3+N$
$2+k$	$0{,}01N$	$0.001(N+2)$
$4+k$	$0{,}001(N+k)$	?

Обчислити $m_\eta(\xi = 3+N)$.

11. Дискретні випадкові величини X і Y задано розподілами:

	–2	5	–3		0	–3	1
X:	0,3	0,2	0,5	Y:	0,1	0,3	0,6

Знайти розподіл випадкових величин $Z_1 = XY$; $Z_2 = X - Y$; $Z_3 = 2XY$.

12. Знайти щільність розподілу випадкової величини

$$Y = \max(x_1, x_2, ..., x_n),$$

де x_i — незалежні випадкові величини з відомими законами розподілу.

13. Навмання взято два додатні числа x і y, кожне з яких не перевищує 2. Знайти ймовірність того, що добуток xy буде не більш ніж 1, а частка y/x — не більш ніж 2.

14. Закон розподілу двовимірного випадкового вектора описується щільністю розподілу

$$\delta(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{\frac{-\left(x^2 + kxy + ny^2\right)}{2}}.$$

Записати вираз для безумовної щільності $f_x(x)$ і вказати значення основних параметрів спільного розподілу.

15. Випадкові величини ξ і η незалежні і розподілені за законом Пуассона:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}, \quad P(\eta = l) = \frac{\lambda_2^l}{l!} e^{-\lambda_2}.$$

Знайти закон розподілу їх суми.

16. Випадкові величини ξ і η незалежні і мають той самий показниковий розподіл на відрізку $[0;1]$: $f_\xi(x) = 1$ при $0 \le x \le 1$, $f_\xi(y) = 1$ при $0 \le y \le 1$. Знайти функцію розподілу і щільність ймовірностей випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$. Побудувати графік функції $f_\xi(z)$.

Примітка.
В індивідуальних роботах 1, 2, 3:
k — номер студента за списком;
N — номер групи, в якій навчається студент.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З РОЗДІЛУ «МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

Завдання 1

На підставі наведених вибіркових даних:

1) побудувати інтервальний ряд. При цьому область реалізацій розбити на дев'ять однакових інтервалів;

2) згідно з інтервальним рядом побудувати гістограму розподілу відносних частот;

3) знайти числові характеристики вибіркової сукупності: Mo, Me, $\bar{x}$, s^2, A_s^*, E_k^*.

Варіанти завдань визначаються так:

а) номер варіанта збігається з останньою цифрою номера залікової книжки студента;

б) значення реалізацій випадкових величин, які наведено у відповідному варіанті, перераховуються за формулою:

$$x_i' = \frac{x_i + a}{b},$$

де a — номер студента за списком у журналі групи;

b — номер групи з відповідної спеціальності. Перетворюючи числа, у дробовій частині зберегти стільки ж знаків, скільки є у початкових даних.

Варіант 0

Із партії відібрано 100 деталей. При цьому здобуто такі значення розміру, який контролюється:

45,4	23,0	40,6	49,5	27,6	34,7	37,8	53,1	41,5	40,3	40,8	37,9	47,2	49,3
72,4	37,0	37,8	33,7	45,0	39,0	42,0	51,0	23,9	42,2	44,5	34,8	45,6	47,8
53,6	36,3	34,5	48,0	42,3	62,0	18,5	56,3	35,5	37,0	49,7	37,6	34,9	36,8
39,3	53,4	41,8	60,5	43,4	34,5	20,0	33,9	47,5	57,7	34,8	32,6	27,2	37,6
31,9	54,0	41,0	24,0	18,0	51,3	43,1	45,1	27,4	34,2	31,0	43,3	53,7	33,0
47,0	24,2	43,7	60,5	48,3	30,0	42,1	43,2	38,3	60,3	49,0	56,4	33,7	33,0
34,4	30,2	26,0	38,2	44,6	24,6	45,5	36,6	34,2	40,8	23,2	43,7	39,0	27,0
40,0	37,3												

Варіант 1

Виріб складається із двох деталей, маса яких має бути приблизно однаковою. Модулі різниці мас 100 пар деталей, які будуть з'єднуватися, мають такі значення:

8,8	1,0	12,1	4,9	1,4	4,3	23,0	17,0	6,4	1,5	17,1	0,6	23,4
0,2	2,2	10,9	8,9	25,4	37,2	4,6	15,0	19,7	11,8	13,6	34,3	6,2
0,9	2,6	15,7	8,2	18,2	4,7	3,3	25,6	23,7	12,7	9,5	19,8	6,4
6,2	10,0	33,4	4,6	13,4	6,2	0,2	14,8	17,8	20,1	3,8	3,9	3,0
16,5	9,6	26,5	6,9	0,7	3,4	8,8	8,3	10,2	3,1	12,8	4,1	10,0
4,0	8,0	2,5	5,8	12,0	10,9	13,3	6,8	1,3	6,5	28,0	0,1	5,4
19,3	1,0	12,7	2,0	17,6	20,0	19,5	8,7	11,3	9,5	23,6	4,0	0,8
15,2	4,7	0,1	16,3	25,3	11,4	14,5	42,6	1,4				

Варіант 2

Далі наведено дані про час від моменту подачі заявок на виконання замовлення до моменту його одержання:

42,4	32,4	40,3	44,2	34,5	37,6	39,0	45,9	40,7	40,1	40,4	39,1	43,2
44,2	54,5	38,7	39,0	37,2	42,2	39,6	40,9	44,9	32,8	41,0	42,0	37,7
42,5	43,5	46,1	38,3	37,5	43,6	41,0	49,8	30,4	47,3	38,0	38,7	44,3
38,9	37,7	38,6	39,7	46,0	40,8	49,2	41,5	37,5	31,1	37,3	43,4	47,9
37,7	36,7	34,3	38,9	36,4	46,3	40,4	32,8	30,2	45,1	41,4	42,3	34,4
37,4	36,0	41,5	46,1	36,9	43,1	32,9	41,7	49,2	43,7	35,5	40,9	41,4
39,2	49,1	44,0	47,3	37,2	36,9	37,5	35,6	33,7	39,2	42,1	33,1	42,5
38,5	37,4	40,4	32,5	41,7	39,6	34,2	40,0	38,8				

Варіант 3

Маємо дані про тривалість безвідмовної роботи 100 приладів:

244,53	152,47	173,27	68,37	71,89	298,10	286,03	336,93	246,91
2,82	9,28	106,90	397,00	312,59	93,53	653,79	410,28	11,58
597,38	90,52	148,83	291,44	11,00	179,52	126,49	70,81	194,94
208,72	61,25	65,52	354,16	348,14	177,91	855,07	483,74	51,46
782,44	55,92	152,66	237,56	22,49	999,63	225,51	3,17	171,22
21,08	21,74	320,78	66,95	9,34	70,13	96,26	71,61	593,51
780,71	102,62	65,22	34,98	35,54	208,02	105,55	106,47	249,47
78,97	200,58	46,53	41,16	175,11	16,83	122,49	472,32	60,59
307,62	95,25	68,40	503,59	199,79	197,58	111,88	20,62	164,67
237,15	490,03	360,14	4,58	156,77	495,78	112,52	226,61	139,61
144,20	124,34	87,23	103,78	62,87	11,44	55,90	773,39	12,57
98,95								

Варіант 4

Далі наведено дані про величину 100 банківських вкладів:

45,2	1,6	22,0	83,5	3,1	9,1	13,4	14,4	143,3	25,2
21,0	22,6	14,7	59,1	81,0	2591,5	12,8	14,4	7,8	42,5
17,3	27,1	104,6	1,8	27,9	39,4	9,2	46,5	64,7	154,5
11,5	8,8	66,7	28,4	544,6	0,8	231,6	10,2	12,8	86,1
14,0	9,3	12,4	18,1	149,9	26,3	434,8	33,4	8,8	1,0
8,0	61,9	285,7	9,2	6,6	2,9	14,0	6,0	164,0	23,3
1,8	0,7	109,4	32,0	43,2	3,0	8,4	5,2	33,0	156,8
7,0	57,4	1,9	35,0	434,8	69,8	4,5	27,5	32,5	15,6
422,0	77,5	235,1	7,8	7,0	8,7	4,6	2,5	15,3	40,0
2,0	20,1	45,8	12,1	8,4	22,6	1,6	35,0	17,3	2,9

Варіант 5

Радіальні помилки при скиданні з допомогою парашутів 100 одиниць вантажів набували таких значень:

63,8	8,2	103,0	55,3	82,6	81,5	220,2	122,1	178,4	68,0
170,0	34,2	165,8	111,7	33,5	189,6	115,5	184,9	264,9	86,9
144,1	144,3	166,6	115,3	350,1	53,0	50,6	38,6	113,2	151,5
128,8	103,8	24,6	222,9	169,0	91,0	154,7	205,1	151,2	70,5
126,3	324,2	45,0	229,8	47,5	182,4	127,9	126,2	155,4	212,4
54,8	67,1	124,4	176,2	213,6	51,0	87,1	167,2	210,2	59,0
83,0	57,4	91,2	45,2	74,2	90,8	192,4	21,4	162,2	110,5
132,8	94,2	165,5	52,4	55,9	198,0	47,4	38,8	175,9	176,9
142,8	58,3	141,8	141,5	200,1	77,6	285,1	113,3	195,5	40,0
11,4	142,4	38,3	33,2	118,8	185,1	82,7	211,1	312,6	49,1

Варіант 6

Із сукупності зроблено вибірку обсягом n = 100. Здобуто такі реалізації випадкової величини:

74,8	44,4	59,5	49,5	51,0	52,8	58,4	60,6	50,9	58,8	44,6	35,7
54,2	58,2	49,9	68,4	56,2	58,3	70,5	55,3	69,6	56,3	56,3	53,0
64,4	73,5	52,6	56,0	49,3	60,9	48,6	35,1	55,4	60,7	52,4	59,2
51,6	50,0	82,9	55,4	46,4	59,3	50,7	56,4	66,0	62,2	70,7	60,3
56,1	59,5	57,7	62,1	66,7	71,6	82,3	55,6	38,6	53,6	80,1	53,6
42,9	65,6	60,4	69,9	62,3	64,5	59,4	44,7	56,4	69,6	50,3	68,8
58,1	68,5	64,5	49,4	57,9	57,0	60,5	45,9	44,4	75,2	52,1	66,9
63,6	56,6	46,4	62,0	69,5	66,0	61,3	68,7	55,5	63,8	51,6	68,8
65,1	42,8	46,1	60,8								

Варіант 7

Із сукупності зроблено вибірку обсягом n = 100. Здобуто такі реалізації випадкової величини:

–1,59	–4,00	–0,20	9,17	0,78	2,34	–22,00	–0,70	0,58
1,38	–99,00	0,78	–0,89	1,03	3,20	2,60	4,71	–1,65
–0,79	0,43	–0,04	–0,58	3,74	–0,20	0,02	–5,20	0,77
3,36	–0,67	0,41	–1,09	2,02	–2,00	–6,11	–1,30	–1,40
0,35	29,29	0,52	0,11	5,17	–32,40	–45,00	2,65	–0,41
0,98	–5,73	–0,87	–0,39	1,29	3,79	0,50	–0,46	2,43
–3,42	–0,53	0,89	0,75	0,53	–0,80	–0,28	0,42	–0,78
11,25	–0,52	1,98	0,53	–5,25	1,71	–0,09	5,95	–0,90
0,53	0,70	–5,50	–1,00	0,97	–1,45	–0,10	1,08	0,11
1,67	–3,40	–0,94	40,00	–0,13	0,55	0,15	–0,24	0,00
0,27	–0,07	–3,70	1,04	–0,60	–1,72	–1,59	3,50	–0,57
0,66								

Варіант 8

Відхилення від номінального розміру деталей — випадкова величина. Здобуто 100 реалізацій цієї величини:

8,22	1,34	3,18	–8,42	–7,92	10,99	–19,44	10,43	12,58
8,36	–18,19	–3,44	14,50	11,62	–5,06	18,48	14,86	–17,75
17,98	–5,44	0,99	10,68	–17,86	3,70	–1,25	–8,07	4,91
5,91	–9,45	–8,83	13,19	12,98	3,57	19,44	16,44	–10,93
7,80	19,20	–10,24	1,35	–15,75	19,98	7,05	–19,37	3,01
–16,00	–15,88	11,96	–8,62	–18,17	–8,17	–4,72	–7,96	17,94
19,19	–3,95	–8,87	–13,58	–13,49	5,86	–3,60	–3,49	8,51
–6,95	5,33	–11,70	–12,56	3,33	–16,77	–1,68	16,23	–9,55
11,41	–4,84	–8,41	16,78	5,27	5,11	–2,86	–16,08	2,44
7,78	16,55	13,39	–19,09	1,73	16,65	–2,79	7,12	0,10
0,55	–1,48	–5,86	–3,81	–9,21	–17,78	–10,25	19,16	–17,56
–4,39								

Варіант 9

Тривалість безперервної роботи електронного приладу — неперервна випадкова величина. Маємо такі її реалізації:

162,83	105,29	118,29	52,73	54,93	196,31	11,76	188,77	220,58
164,32	15,80	76,81	258,12	205,37	68,46	418,62	266,43	17,24
383,36	66,57	103,02	192,15	16,87	122,20	89,05	54,26	131,84
140,45	48,28	50,95	231,35	227,59	121,19	544,42	312,34	42,16
158,48	499,02	44,95	105,41	24,06	940,39	150,94	11,98	117,01
23,18	23,59	210,48	51,84	15,84	53,83	70,16	54,76	380,94
497,94	74,14	50,76	31,86	32,21	140,01	75,97	76,54	165,92
59,35	135,36	39,08	35,73	119,44	20,52	86,55	305,20	47,87
202,26	69,53	52,75	324,75	134,87	133,49	79,93	22,89	112,92
158,22	316,27	235,09	12,86	107,98	319,86	80,32	151,63	97,26
100,13	87,71	64,52	74,86	49,29	17,15	44,94	493,37	17,86
71,85								

Лабораторна робота № 1

На підставі даних завдання № 1 перевірити з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ гіпотезу про закон розподілу в сукупності. Використати критерій узгодженості Пірсона.

Варіант 0

Нормальний закон розподілу, $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Оцінки параметрів $\hat{a}$ і $\hat{\sigma}^2$ знайти методом моментів або максимальної правдоподібності.

Варіант 1

Напівнормальний закон розподілу, $f(x) = \dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0$. Оцінку параметра $\hat{\sigma}^2$ знайти методом максимальної правдоподібності.

Варіант 2

Гамма-розподіл, $f(x) = \dfrac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0, \quad p > 0.$ Оцінки параметрів знаходяться за формулами: $\hat{\alpha} = \dfrac{\overline{x}}{s^2}, \quad \hat{p} = \hat{\alpha}\overline{x}.$ У вираз щільності розподілу входить гамма-функція $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx.$ Для обчислення ймовірностей скористатися тим, що величина $Y = \dfrac{X - \frac{p}{\alpha}}{\frac{\sqrt{p}}{\alpha}}$ має закон розподілу, близький до нормального закону з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Варіант 3

Показниковий закон розподілу, $f(x)=ae^{-ax}$, $x>0$, $a>0$. Оцінку параметра $\widehat{a}$ знайти методом моментів або максимальної правдоподібності.

Варіант 4

Логарифмічно нормальний закон розподілу, $f(x)=$ $=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x-a)^2}$, $x>0$. Оцінки параметрів $\widehat{a}$ і $\widehat{\sigma}^2$ знайти методом моментів або максимальної правдоподібності. Обчислюючи ймовірності, урахувати, що випадкова величина $Y=\ln x$ розподілена за нормальним законом з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Варіант 5

Закон розподілу Релея, $f(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$, $x>0$. Оцінку параметра $\widehat{\sigma}^2$ знайти методом максимальної правдоподібності.

Варіант 6

Розподіл χ^2 з n ступенями волі, $f_n(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$, $x>0$, $n\in N$. Оцінка $\widehat{n}=\overline{x}$. У вираз щільності розподілу входить гамма-функція $\Gamma(p)=\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$. Для обчислення ймовірностей скористатися тим, що величина $Y=\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$ має закон розподілу, близький до нормального закону з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Варіант 7

Закон розподілу Коші, $f(x)=\frac{1}{\sigma\pi}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$. Оцінки параметрів: $\hat{a}=Me^*$, яка знаходиться за незгрупованими даними; $\hat{\sigma}=\frac{1}{b}$.

Варіант 8

Рівномірний закон розподілу, $f(x)=\frac{1}{b-a}$, $x\in(a,b]$. Оцінки параметрів: $\hat{a}=\min\{x_i\}$, $\hat{b}=\max\{x_i\}$.

Варіант 9

Зсунутий показниковий закон розподілу, $f(x)=ae^{-a(x-\mu)}$, $x>0$. Оцінки параметрів: $\hat{\mu}=\min\{x_i\}$, $\hat{a}=\frac{1}{\bar{x}-\hat{\mu}}$.

Лабораторна робота № 2

На підставі даних, одержаних під час вибірки із двовимірної сукупності:

1) скласти кореляційну таблицю. При цьому розбити області реалізацій випадкових величин на дев'ять однакових інтервалів;

2) знайти середини інтервалів і подальші розрахунки виконувати з ними;

3) знайти умовні середні значення $\overline{Y}_x$;

4) вибрати форму залежності між $\overline{Y}_x$ і x;

5) скласти рівняння регресії, що відображає цю залежність;

6) вважаючи, що випадкові величини розподілені нормально, з надійністю $\gamma=0{,}98$ знайти довірчий інтервал для математичного сподівання X і дисперсії Y.

Варіанти завдань визначаються так:

а) номер варіанта збігається з останньою цифрою номера залікової книжки студента;

б) значення реалізацій випадкових величин, які наведено у відповідному варіанті, перераховуються за формулами:

$$x_i' = x_i + a,\ y_i' = y_i + b,$$

де

a — номер студента за списком у журналі групи;

b — номер групи з відповідної спеціальності.

Варіант 0

X	22,16	20,32	20,80	17,80	17,96	23,00	11,20	22,80
Y	14,57	16,42	16,06	9,50	18,71	19,05	7,34	16,49
X	23,60	22,20	13,20	19,16	24,40	23,20	18,72	27,08
Y	13,72	19,71	8,69	16,69	19,71	21,23	6,45	18,34
X	24,52	13,68	26,56	18,64	20,24	22,88	13,56	20,92
Y	13,81	5,01	19,20	9,78	2,71	17,88	10,79	16,20
X	19,72	17,92	21,24	21,48	17,48	17,68	23,80	23,72
Y	18,11	8,18	12,98	17,94	12,40	11,68	14,65	20,15
X	20,88	28,80	25,36	17,04	22,04	28,20	17,20	20,32
Y	20,98	22,95	14,91	14,91	15,93	21,82	12,51	12,39
X	15,04	32,96	21,80	11,40	20,72	14,88	14,96	23,32
Y	9,09	21,70	17,36	4,08	20,81	5,88	10,09	15,76
X	17,76	13,28	17,88	18,80	17,92	26,52	28,20	19,04
Y	17,07	11,51	11,00	15,56	10,86	15,92	15,53	12,52
X	17,68	16,00	16,08	21,48	19,12	19,12	22,24	18,20
Y	15,83	9,61	9,00	16,15	11,87	12,77	10,89	13,28
X	21,36	16,76	16,40	20,84	14,40	19,60	25,24	17,48
Y	13,26	16,09	12,64	18,23	15,31	13,11	19,94	7,80
X	23,12	18,80	17,80	25,60	21,32	21,28	19,28	14,80
Y	18,94	13,16	19,32	15,62	21,23	17,19	12,94	6,77
X	20,60	22,00	25,44	23,88	12,00	20,40	25,48	19,32
Y	15,35	14,00	28,69	14,40	1,22	13,92	20,19	19,48
X	21,84	20,00	20,12	19,60	18,52	19,04	17,56	13,60
Y	16,97	14,18	18,75	17,97	15,28	16,23	22,58	7,94
X	17,20	28,12	13,84	18,92				
Y	12,51	21,36	11,43	10,81				

Варіант 1

X	33,24	30,48	31,20	26,70	26,94	34,50	16,80	34,20
Y	19,22	21,22	20,80	15,48	23,70	23,08	14,75	20,82
X	35,40	33,30	19,80	28,74	36,60	34,80	28,08	40,62
Y	18,19	23,82	15,60	21,67	23,41	24,99	12,58	21,69
X	36,78	20,52	39,84	27,96	30,36	34,32	20,34	31,38
Y	18,10	12,21	22,56	15,57	8,94	22,05	17,42	20,90
X	29,58	26,88	31,86	32,22	26,22	26,52	35,70	35,58
Y	22,84	14,27	17,96	22,36	18,14	17,46	18,98	23,93
X	31,32	43,20	38,04	25,56	33,06	42,30	25,80	30,48
Y	25,20	25,50	18,93	20,46	20,46	24,60	18,29	17,60
X	22,56	49,44	32,70	17,10	31,08	22,32	22,44	34,98
Y	15,62	23,62	21,78	11,80	25,07	12,77	16,53	20,07
X	26,64	19,92	26,82	28,20	26,88	39,78	42,30	28,56
Y	22,27	18,11	16,81	20,72	16,67	19,62	18,97	17,95
X	26,52	24,00	24,12	32,22	28,68	28,68	33,36	27,30
Y	21,17	15,90	15,34	20,76	17,36	18,16	15,90	18,79
X	32,04	25,14	24,60	31,26	21,60	29,40	37,86	26,22
Y	18,19	21,58	18,54	22,74	21,31	18,38	23,46	14,01
X	34,68	28,20	26,70	38,40	31,98	31,92	28,92	22,20
Y	22,96	18,58	24,28	19,52	25,34	21,73	18,29	13,58
X	30,90	33,00	38,16	35,82	18,00	30,60	38,22	28,98
Y	20,20	18,74	31,26	18,74	9,12	18,96	23,64	24,14
X	32,76	30,00	30,18	29,40	27,78	28,56	26,34	20,40
Y	21,42	19,26	23,34	22,74	20,52	21,28	27,24	14,85
X	25,80	42,18	20,76	28,38				
Y	18,29	24,20	17,94	16,44				

Варіант 2

X	11,08	10,16	10,40	8,90	8,98	11,50	5,60	11,40
Y	25,13	25,77	25,66	21,88	26,55	27,52	19,74	26,19
X	11,80	11,10	6,60	9,58	12,20	11,60	9,36	13,54
Y	24,93	27,72	20,74	25,72	28,07	28,65	20,49	27,81
X	12,26	6,84	13,28	9,32	10,12	11,44	6,78	10,46
Y	25,12	18,96	28,16	22,15	18,84	26,91	21,86	25,75

X	9,86	8,96	10,62	10,74	8,74	8,84	11,90	11,86
Y	26,52	21,23	24,18	26,72	23,29	22,96	25,43	28,19
X	10,44	14,40	12,68	8,52	11,02	14,10	8,60	10,16
Y	28,16	30,41	25,80	24,48	25,79	29,74	23,30	23,73
X	7,52	16,48	10,90	5,70	10,36	7,44	7,48	11,66
Y	21,23	30,44	26,48	18,13	28,04	19,59	21,72	25,91
X	8,88	6,64	8,94	9,40	8,96	13,26	14,10	9,52
Y	25,69	22,17	22,65	25,09	22,58	26,50	26,57	23,60
X	8,84	8,00	8,04	10,74	9,56	9,56	11,12	9,10
Y	25,05	21,65	21,35	25,82	23,28	23,73	23,28	23,85
X	10,68	8,38	8,20	10,42	7,20	9,80	12,62	8,74
Y	24,34	25,04	23,24	26,76	24,27	23,99	28,32	20,97
X	11,56	9,40	8,90	12,80	10,66	10,64	9,64	7,40
Y	27,48	23,88	26,83	26,20	28,35	26,31	23,85	20,03
X	10,30	11,00	12,72	11,94	6,00	10,20	12,74	9,66
Y	25,27	24,81	32,76	25,31	16,78	24,52	28,49	27,15
X	10,92	10,00	10,06	9,80	9,26	9,52	8,78	6,80
Y	26,28	24,59	26,91	26,43	24,90	25,47	28,43	20,42
X	8,60	14,06	6,92	9,46				
Y	23,30	29,49	22,22	22,71				

Варіант 3

X	16,62	15,24	15,60	13,35	13,47	17,25	8,40	17,10
Y	9,41	10,63	10,37	7,72	12,16	11,44	7,82	10,23
X	17,70	16,65	9,90	14,37	18,30	17,40	14,04	20,31
Y	8,75	11,90	8,13	10,97	11,52	12,46	6,08	10,38
X	18,39	10,26	19,92	13,98	15,18	17,16	10,17	15,69
Y	8,64	6,25	10,90	7,70	4,00	10,89	9,08	10,42
X	14,79	13,44	15,93	16,11	13,11	13,26	17,85	17,79
Y	11,56	7,06	8,80	11,17	9,18	8,80	9,17	11,85
X	15,66	21,60	19,02	12,78	16,53	21,15	12,90	15,24
Y	12,75	12,32	9,02	10,47	10,09	11,88	9,28	8,68
X	11,28	24,72	16,35	8,55	15,54	11,16	11,22	17,49
Y	8,00	10,99	10,83	6,20	12,69	6,47	8,50	9,79
X	13,32	9,96	13,41	14,10	13,44	19,89	21,15	14,28
Y	11,40	9,48	8,43	10,48	8,35	9,31	8,83	8,96

X	13,26	12,00	12,06	16,11	14,34	14,34	16,68	13,65
Y	10,81	8,08	7,77	10,30	8,64	9,07	7,62	9,48
X	16,02	12,57	12,30	15,63	10,80	14,70	18,93	3,11
Y	8,92	11,10	9,48	11,42	11,13	9,16	11,48	6,95
X	17,34	14,10	13,35	19,20	15,99	15,96	14,46	11,10
Y	11,37	9,32	12,48	9,32	12,79	10,84	9,13	6,92
X	15,45	16,50	19,08	17,91	9,00	15,30	19,11	14,49
Y	10,06	9,17	15,69	9,03	4,71	9,41	11,56	12,29
X	16,38	15,00	15,09	14,70	13,89	14,28	13,17	10,20
Y	10,63	9,60	11,80	11,51	10,39	10,76	14,10	7,69
X	12,90	21,09	10,38	14,19				
Y	9,28	11,67	9,34	8,15				

Варіант 4

X	22,16	20,32	20,80	17,80	17,96	23,00	11,20	22,80
Y	18,86	20,98	20,51	16,59	23,62	22,00	17,39	20,10
X	23,60	22,20	13,20	19,16	24,40	23,20	18,72	27,08
Y	17,67	22,80	17,69	21,62	21,98	23,60	13,90	19,92
X	24,52	13,68	26,56	18,64	20,24	22,88	13,56	20,92
Y	17,40	14,67	20,79	16,49	10,45	21,14	19,17	20,58
X	19,72	17,92	21,24	21,48	17,48	7,68	23,80	23,72
Y	22,50	15,53	17,98	21,71	18,94	18,31	18,31	22,57
X	20,88	28,80	25,36	17,04	22,04	28,20	17,20	20,32
Y	24,28	22,83	17,92	21,04	19,95	22,19	19,13	17,87
X	15,04	32,96	21,80	11,40	20,72	14,88	14,96	23,32
Y	17,30	20,31	21,14	14,81	24,20	14,89	18,10	19,35
X	17,76	13,28	17,88	18,80	17,92	26,52	28,20	19,04
Y	22,43	19,83	17,71	20,88	17,59	18,27	17,35	18,45
X	17,68	16,00	16,08	21,48	19,12	19,12	22,24	18,20
Y	21,50	17,34	16,84	20,33	17,92	18,61	16,00	19,35
X	21,36	16,76	16,40	20,84	14,40	19,60	25,24	17,48
Y	18,15	22,05	19,52	22,18	22,33	18,70	21,85	15,39
X	23,12	18,80	17,80	25,60	21,32	21,28	19,28	14,80
Y	21,87	19,04	24,15	18,38	24,30	21,21	18,68	15,61
X	20,60	22,00	25,44	23,88	12,00	20,40	25,48	19,32
Y	20,04	18,48	28,51	18,08	12,38	19,02	21,95	23,70
X	21,84	20,00	20,12	19,60	18,52	19,04	17,56	13,60
Y	20,83	19,37	22,84	22,44	20,77	21,31	26,75	16,95
X	17,20	28,12	13,84	18,92				
Y	19,13	21,86	19,55	17,17				

Варіант 5

X	9,08	8,16	8,40	6,90	6,98	9,50	3,60	9,40
Y	9,93	10,81	10,65	6,78	11,91	12,48	5,07	11,04
X	9,80	9,10	4,60	7,58	10,20	9,60	7,36	11,54
Y	9,56	12,79	5,98	10,88	12,95	13,70	5,15	12,40
X	10,26	4,84	11,28	7,32	8,12	9,44	4,78	8,46
Y	9,69	3,96	12,84	6,99	3,19	11,82	7,17	10,74
X	7,86	6,96	8,62	8,74	6,74	6,84	9,90	9,86
Y	11,71	6,05	8,97	11,75	8,36	7,98	10,09	13,14
X	8,44	12,40	10,68	6,52	9,02	12,10	6,60	8,16
Y	13,39	15,09	10,36	9,72	10,67	14,41	8,41	8,57
X	5,52	14,48	8,90	3,70	8,36	5,44	5,48	9,66
Y	6,34	14,71	11,45	3,28	13,28	4,54	6,89	10,68
X	6,88	4,64	6,94	7,40	6,96	11,26	12,10	7,52
Y	10,98	7,55	7,62	10,22	7,54	11,01	10,92	8,55
X	6,84	6,00	6,04	8,74	7,56	7,56	9,12	7,10
Y	10,28	6,70	6,37	10,75	8,20	8,69	7,89	8,91
X	8,68	6,38	6,20	8,42	5,20	7,80	10,62	6,74
Y	9,14	10,36	8,41	11,86	9,75	8,92	13,15	5,80
X	9,56	7,40	6,90	10,80	8,66	8,64	7,64	5,40
Y	12,43	8,89	12,24	10,77	13,56	11,32	8,80	5,03
X	8,30	9,00	10,72	9,94	4,00	8,20	10,74	7,66
Y	10,24	9,60	18,02	9,96	1,73	9,43	13,30	12,44
X	8,92	8,00	8,06	7,80	7,26	7,52	6,78	4,80
Y	11,23	9,54	12,09	11,62	10,04	10,61	14,02	5,59
X	6,60	12,06	4,92	7,46				
Y	8,41	14,15	7,55	7,59				

Варіант 6

X	18,16	16,32	16,80	13,80	13,96	19,00	7,20	18,80
Y	15,43	17,18	16,82	11,53	19,36	19,17	10,31	17,00
X	19,60	18,20	9,20	15,16	20,40	19,20	14,72	23,08
Y	14,57	19,80	11,28	17,52	19,59	21,00	8,85	18,17
X	20,52	9,68	22,56	14,64	16,24	18,88	9,56	16,92
Y	14,56	8,09	18,96	11,68	5,52	18,18	13,03	16,93

X	15,72	13,92	17,24	17,48	13,48	13,68	19,80	19,72
Y	18,68	10,39	14,16	18,36	14,03	13,40	15,34	20,03
X	16,88	24,80	21,36	13,04	18,04	24,20	13,20	16,32
Y	21,01	21,93	15,41	16,20	16,60	21,03	14,15	13,75
X	11,04	28,96	17,80	7,40	16,72	10,88	10,96	19,32
Y	11,44	20,47	17,84	7,52	20,88	8,72	12,30	16,33
X	13,76	9,28	13,88	14,80	13,92	22,52	24,20	15,04
Y	17,98	13,67	12,80	16,59	12,67	16,16	15,68	13,98
X	13,68	12,00	12,08	17,48	15,12	15,12	18,24	14,20
Y	16,92	11,79	11,26	16,84	13,42	14,18	12,29	14,71
X	17,36	12,76	12,40	16,84	10,40	15,60	21,24	13,48
Y	14,39	17,24	14,33	18,67	16,80	14,43	19,71	10,11
X	19,12	14,80	13,80	21,60	17,32	17,28	15,28	10,80
Y	19,06	14,55	19,89	15,99	21,17	17,74	14,32	9,49
X	16,60	18,00	21,44	19,88	8,00	16,40	21,48	15,32
Y	16,24	14,96	27,14	15,12	5,02	15,04	19,90	19,87
X	17,84	16,00	16,12	15,60	14,52	15,04	13,56	9,60
Y	17,50	15,30	19,18	18,57	16,38	17,14	22,68	10,59
X	13,20	24,12	9,84	14,92				
Y	14,15	20,64	13,55	12,53				

Варіант 7

X	25,62	24,24	24,60	22,35	22,47	26,25	17,40	26,10
Y	31,70	32,42	32,34	25,03	33,27	36,09	19,81	33,72
X	26,70	25,65	18,90	23,37	27,30	26,40	23,04	29,31
Y	31,67	36,27	22,01	32,08	37,37	38,11	22,79	37,50
X	27,39	19,26	28,92	22,98	24,18	26,16	19,17	24,69
Y	32,21	18,99	38,00	25,69	20,24	34,99	24,05	32,52
X	23,79	22,44	24,93	25,11	22,11	22,26	26,85	26,79
Y	33,61	23,92	29,83	34,34	27,44	26,90	32,59	37,42
X	24,66	30,60	28,02	21,78	25,53	30,15	21,90	24,24
Y	36,74	42,44	33,60	29,44	32,84	41,14	27,40	28,85
X	20,28	33,72	25,35	17,55	24,54	20,16	20,22	26,49
Y	23,29	43,42	33,99	17,03	36,50	20,36	24,13	33,34
X	22,32	18,96	22,41	23,10	22,44	28,89	30,15	23,28
Y	31,72	24,55	26,40	30,89	26,29	35,08	35,58	28,32

X	22,26	21,00	21,06	25,11	23,34	23,34	25,68	22,65
Y	30,57	24,22	23,73	32,76	27,79	28,58	28,48	28,58
X	25,02	21,57	21,30	24,63	19,80	23,70	27,93	22,11
Y	30,14	30,35	27,11	34,28	28,47	29,13	38,00	23,36
X	26,34	23,10	22,35	28,20	24,99	24,96	23,46	20,10
Y	36,05	28,77	33,73	34,35	37,17	33,58	28,82	21,11
X	24,45	25,50	28,08	26,91	18,00	24,30	28,11	23,49
Y	31,61	31,12	45,84	32,41	14,79	30,25	38,33	34,62
X	25,38	24,00	24,09	23,70	22,89	23,28	22,17	19,20
Y	33,66	30,27	34,38	33,43	30,50	31,61	36,49	21,54
X	21,90	30,09	19,38	23,19				
Y	27,40	40,69	24,76	26,75				

Варіант 8

X	34,16	32,32	32,80	29,80	29,96	35,00	23,20	34,80
Y	33,03	37,49	36,55	25,90	43,05	40,97	25,39	36,28
X	35,60	34,20	25,20	31,16	36,40	35,20	30,72	39,08
Y	30,68	42,63	26,85	38,62	41,44	44,93	19,69	37,44
X	36,52	25,68	38,56	30,64	32,24	34,88	25,56	32,92
Y	30,35	19,70	39,34	25,95	11,88	38,84	30,59	36,75
X	31,72	29,92	33,24	33,48	29,48	29,68	35,80	35,72
Y	40,97	23,36	30,55	39,70	31,49	30,04	32,30	42,63
X	32,88	40,80	37,36	29,04	34,04	40,20	29,20	32,32
Y	45,72	45,15	31,94	36,42	35,64	43,35	31,85	29,94
X	27,04	44,96	33,80	23,40	32,72	26,88	26,96	35,32
Y	26,60	40,57	38,45	19,19	45,48	20,68	28,52	34,64
X	29,76	25,28	29,88	30,80	29,92	38,52	40,20	31,04
Y	40,09	32,08	28,66	36,69	28,37	33,22	31,59	30,87
X	29,68	28,00	28,08	33,48	31,12	31,12	34,24	30,20
Y	37,79	27,06	25,88	36,36	29,62	31,29	26,11	32,75
X	33,36	28,76	28,40	32,84	26,40	31,60	37,24	29,48
Y	31,02	38,79	32,51	40,60	38,59	31,69	41,43	22,87
X	35,12	30,80	29,80	37,60	33,32	33,28	31,28	26,80
Y	40,70	32,21	44,27	33,14	45,94	38,41	31,54	22,40
X	32,60	34,00	37,44	35,88	24,00	32,40	37,48	31,32
Y	35,33	32,06	57,69	31,78	13,51	32,77	41,76	43,74
X	33,84	32,00	32,12	31,60	30,52	31,04	29,56	25,60
Y	37,69	33,46	41,95	40,77	36,31	37,82	50,49	25,22
X	29,20	40,12	25,84	30,92				
Y	31,85	42,53	31,63	27,73				

Варіант 9

X	44,32	40,64	41,60	35,60	35,92	46,00	22,40	45,60
Y	39,24	46,75	45,00	40,48	56,23	45,14	51,99	41,11
X	47,20	44,40	26,40	38,32	48,80	46,40	37,44	54,16
Y	34,41	48,14	49,73	49,91	43,04	48,48	33,01	34,42
X	49,04	27,36	53,12	37,28	40,48	45,76	27,12	41,84
Y	32,44	42,16	37,15	39,01	22,93	43,36	52,57	44,96
X	39,44	35,84	42,48	42,96	34,96	35,36	47,60	47,44
Y	51,10	37,89	38,58	46,71	46,30	44,58	35,57	45,38
X	41,76	57,60	50,72	34,08	44,08	56,40	34,40	40,64
Y	53,43	38,51	32,40	51,71	41,89	37,92	47,14	39,68
X	30,08	65,92	43,60	22,80	41,44	29,76	29,92	46,64
Y	46,16	26,67	44,96	45,83	53,50	40,91	48,09	38,63
X	35,52	26,56	35,76	37,60	35,84	53,04	56,40	38,08
Y	53,83	54,48	42,92	48,76	42,57	31,49	26,92	42,88
X	35,36	32,00	32,16	42,96	38,24	38,24	44,48	36,40
Y	51,83	44,84	43,59	43,58	41,57	43,13	32,61	46,17
X	42,72	33,52	32,80	41,68	28,80	39,20	50,48	34,96
Y	38,80	54,43	49,21	48,71	58,54	42,63	41,50	38,23
X	46,24	37,60	35,60	51,20	42,64	42,56	38,56	29,60
Y	44,67	44,57	57,67	33,09	52,84	45,87	43,07	42,66
X	41,20	44,00	50,88	47,76	24,00	40,80	50,96	38,64
Y	44,21	38,61	56,34	34,94	39,42	42,18	41,37	54,41
X	43,68	40,00	40,24	39,20	37,04	38,08	35,12	27,20
Y	44,18	43,56	51,28	51,13	48,92	49,38	63,92	47,48
X	34,40	56,24	27,68	37,84				
Y	47,14	37,29	53,04	40,16				

ВІДПОВІДІ

1.1. 1) $\Omega = \{CH; CC; HC; HH\}$; 2) $A_1 = \{CH; HC\}$; $A_2 = \{CH; CC; HC\}$; $A_3 = \{HH; HC; CH\}$. **1.2.** Деталь бронзова або латунна. **1.3.** 1) $\Omega = \{CC; БД; БС; ЛЛ; ЛС\}$; 2) $A_3 = \{БС; ЛЛ\}$. **1.4.** $C = (A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cap B_2 \cap \overline{B}_3 \cup B_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3 \cup B_1 \cap B_2 \cap B_3)$. **1.5.** 1) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i$; 2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$; 3) $(A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \ldots \overline{A}_n) \cup (\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \ldots \overline{A}_n) \cup \ldots \cup (\overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n)$. **1.6.** Так. **1.7.** 1) $A_{11}A_{14}A_{21}A_{24}A_{31}A_{32}A_{33}A_{34}A_{41}A_{44}A_{51}A_{54}$; 2) $\bigcap\limits_{i=1}^{3}\bigcap\limits_{j=1}^{4} A_{ij}$. **1.8.** 247. **1.9.** 60. **1.10.** 0,333; 0,133; 0,533. **1.11.** 0,139. **1.12.** 0,1512. **1.13.** 0,107. **1.14.** 0,011. **1.15.** 0,3. **1.16.** 0,412. **1.17.** 0,667. **1.18.** 0,422. **1.19.** 0,089. **1.20.** 0,002; 0,016; 0,656. **1.21.** 0,017. **1.22.** 0,6. **1.23.** 0,6. **1.24.** 0,637; 0,413. **1.25.** 0,556. **1.26.** 0,06; 0,94. **1.28.** 57. **1.29.** 0,968; 0,282; 0,718. **1.30.** 0,25. **1.31.** 0,84. **1.33.** 0,4. **1.34.** 0,216; 0,857. **1.35.** 0,441. **1.36.** 0,846; 0,006; 0,147. **1.37.** 0,5; 0,086; 0,414. **1.38.** 0,857. **1.39.** 0,8; 0,933. **1.40.** 0,44;0,08. **1.41.** 0,094. **1.42.** 0,095. **1.43.** $\sum\limits_{i=0}^{m-1} \frac{C_{N-M}^{n-i} C_m^i}{C_N^n}$. **1.44.** $1 - \prod\limits_{i=1}^{k}(1-p_i)$. **1.45.** $1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_m^k}$. **1.46.** $p\left(1 - \prod\limits_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)$; $(1-p_1)p_2$; $p\prod\limits_{i=1}^{k} p_i$. **1.47.** $pp_1 + (1-p)\alpha$; $(1-p)\alpha$; $p(1-p_1)$. **1.48.** 0,938; 0,062. **1.49.** 0,077; 0,923. **1.50.** 0,17; 0,83. **1.51**. 0,771; 0,229. **1.52.** 0,751; 0,249. **1.53.** 0,961; 0,039. **1.54.** 0,76; 0,24. **1.55.** 0,483. **1.56.** 0,941. **1.57.** $P_1 = \frac{p(p_1 + p_2 + p_3)}{3}$; $P_2 = p\left(1 - \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}\right)p_0$; $P_3 = P_1 + P_2$. **1.58.** 0,667. **1.59.** $\frac{knM + lmN}{NM(k+l)}$. **1.60.** 0,598; 0,402. **1.61.** 0,692; 0,308. **1.62.** 0,319; 0,332; 0,349. **1.63.** 0,466. **1.64.** 0,205. **1.65.** 0,395. **1.66.** 0,058. **1.67.** 0,936. **1.68.** 0,2304; 0,99; 0,3072. **1.69.** $n \geq 16$. **1.70.** 0,901. **1.71.** 91; 92. **1.72.** 5; 0,279. **1.73.** 20. **1.74.** $[79{,}21; 80{,}2]$. **1.75.** 20; 0,0997. **1.76.** 0,151. **1.77.** 0,062. **1.78.** 0,082. **1.79.** 0,1004. **1.80.** 0,0842. **1.81.** 0,406. **1.82.** 0,982. **1.83.** 0,168. **1.84.** 0,778. **1.85.** 0,872. **1.86.** 0,754. **1.87.** 100. **1.88.** 0,975. **1.89**. 0,869. **1.90.** $[0{,}637; 0{,}697]$; $[573; 627]$. **1.91.** 0,9398; 4356; $[0{,}787; 0{,}813]$. **1.92.** 0,0003; 0,0134; 0,1823; 0,804; 0,9997; 0,196. **1.93.** 0,3024; 0,440; 0,2144; 0,0404; 0,0024. **2.1.** 10,5; 2,75; 21; 5,5. **2.2.** 2,952; 1,469696. **2.3.** $p < 0{,}75$. **2.4.** 2,7. **2.5.** $X = 0,2,3,4$;

$p(i) = 0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}3.$ **2.6.** $0{,}5;\ -0{,}5;\ f(x) = 0{,}5\cos x + 0{,}5\sin x,\ \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$

2.7. Так. **2.8.** $-1;\ \frac{4}{\pi};\ \frac{4}{\pi} arctg\frac{2}{9};\ \ f(x) = \frac{4}{\pi\left(1+x^2\right)}, x > 1;\ 1+\sqrt{2}.$ **2.9.** $1;\ \frac{1}{3};\ 0{,}27;$ $f(x) = \frac{2}{3}x,\ \ x \in (1;2];\ \ \sqrt{2{,}5}.$

$$\textbf{2.10.}\ \ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -\sqrt{\frac{2}{\pi}}; \\ \sqrt{\frac{2}{\pi} - x^2}, & \text{якщо} -\sqrt{\frac{2}{\pi}} < x \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \\ 0, & \text{якщо } x > \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -\sqrt{\frac{2}{\pi}}; \\ \frac{1}{\pi}x\sqrt{\frac{2}{\pi} - x^2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{\pi}{2}}x + \frac{1}{2}, & \text{якщо} -\sqrt{\frac{2}{\pi}} < x \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \\ 1, & \text{якщо } x > \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{cases}$$

0; 0.

$$\textbf{2.11.}\ \ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -\frac{4}{\sqrt{2\pi}}; \\ 4\sqrt{\frac{8}{\pi} - x^2}, & \text{якщо} -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} < x \le \frac{4}{\sqrt{2\pi}}; \\ 0, & \text{якщо } x > \frac{4}{\sqrt{2\pi}}. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -\frac{4}{\sqrt{2\pi}}; \\ \frac{4}{\pi}x\sqrt{\frac{8}{\pi} - x^2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{\pi}{8}}x + \frac{1}{2}, & \text{якщо} -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} < x \le \frac{4}{\sqrt{2\pi}}; \\ 1, & \text{якщо } x > \frac{4}{\sqrt{2\pi}}. \end{cases}$$

$MX = 0.$

2.12. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le -1;\\ x+1, & \text{якщо } -1<x\le 0;\\ 1-x, & \text{якщо } 0<x\le 1;\\ 0, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le -1;\\ 0{,}5x^2+x+0{,}5, & \text{якщо } -1<x\le 0;\\ x-0{,}5x^2+0{,}5, & \text{якщо } 0<x\le 1;\\ 1, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$$

2.13. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le -2;\\ 0{,}125(2+x), & \text{якщо } -2<x\le \frac{2}{3};\\ 0{,}1(4-x), & \text{якщо } \frac{2}{3}<x\le 4;\\ 0, & \text{якщо } x>4.\end{cases}$

2.14. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le -2;\\ \frac{1}{16}\left(x^3+8\right), & \text{якщо } -2<x\le 2;\\ 1, & \text{якщо } x>2.\end{cases}$

$a=-2$; $A=\dfrac{3}{16}$. $DX=2{,}4$. **2.15.** –2; 1. **2.16.** 0; 4. **2.17.** 1; *e*. **2.18.** $\dfrac{\ln 2}{30}$; 2. **2.19.** 0,2. **2.20.** 0,77378; 0,02143. **2.21.** 0,3125. **2.22.** 0,21948; 0,63923. **2.23.** 0,0625. **2.24.** $n\ge 25$. **2.25.** $n\ge 17$. **2.26.** 0,004788; 0,99979. **2.27.** 0,13534; 0,85712. **2.28.** 0,19537; 0,90842. **2.29.** 0,67688. **2.30.** $n=600$; $m\ge 11$. **2.31.** 51. **2.32.** 0,16667; 0,6698. **2.33.** 0,8145. **2.34.** 0,7365. **2.35.** 0,8336. **2.36.** 0,2. **2.37.** 0,6.

2.38. $P\left(X\le \dfrac{1}{a}\right)\approx 0{,}63212$. **2.39.** $a\le 0{,}005051$. **2.40.** $\tau e^{a\tau}$. **2.41.** 4; 0,63212; 0,86466. **2.42.** 22,55 %.

2.43. $P(\alpha\le X<\beta)=\dfrac{1}{2}\left(\Phi^*\left(\dfrac{\beta-a}{\sqrt{2}\sigma}\right)-\Phi^*\left(\dfrac{\alpha-a}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$. **2.44.** $n\ge 7$.

2.45. $DX\le\left(\dfrac{d_2-d_1}{3{,}29}\right)^2$. **2.46.** $M|X-a|=\sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$. **2.47.** $\sqrt{\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2(\ln|\beta|-\ln|\alpha|)}}$.

2.50. $1{,}25(a+b)$. **2.52.** $1{,}75c;\, 8{,}5c^2$. **2.53.** $\dfrac{A\left(e^{-ct}-e^{-dt}\right)}{t(d-c)}$; $\dfrac{A^2}{2t^2(d-c)}\times$
$\times\left((t-2)e^{-2dt}-(t+2)e^{-2dt}+4e^{-(c+d)t}\right)$. **2.54.** $200\pi;\ \pi^2$; $100{,}25\,\pi$; $3000{,}125\,\pi^2$.
2.55. 60ln1,5; 50. **2.56.** $\dfrac{b\ln 3}{30}$.

2.57. $f(y)=\dfrac{440}{\sigma\sqrt{2\pi}y^2}e^{-\frac{1}{2y^2}\cdot\left(\frac{220}{\sigma}\right)^2}$. **2.58.** $\dfrac{4a}{\pi}$.

2.59. $Y=\Phi^{-1}(X-0{,}5)$, де $\Phi(x)$ — функція Лапласа.

2.60. $Y=tg\dfrac{\pi}{2}\left(1-2e^{-aX}\right)$. **2.61.** $0{,}1e^{-2it}+0{,}35e^{-it}+0{,}2+0{,}15e^{it}+0{,}2e^{2it}$. **2.62.** $\dfrac{e^{18it}-e^{-6it}}{24it}$. **2.63.** $e^{38it-290t^2}$. **2.64.** $\left(\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2it}\right)^n$.

2.65. $\dfrac{2-\left(e^{-2it}+e^{2it}\right)}{4t^2}$. **2.68.** $\dfrac{t+ie^{\frac{\pi it}{2}}}{i\left(1-t^2\right)}$. **2.69.** $P\ge\dfrac{2}{3}$. **2.70.** $P\ge 0{,}963$.
2.71. $n > 222223$; $n > 14279$. **2.72.** Так. **2.73.** Так. **2.74.** 2.
2.75. (942, 979). **2.76.** 70. **2.77.** $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}10^{-m};\dfrac{\sqrt{3}}{3}10^{-m}\right)$. **2.78.** Близький до нормального з $a=400$ і $\sigma^2=80$.

3.1. $f_1(\mathrm{x})=\begin{cases}0, \text{ якщо } \mathrm{x}\le 0;\\ \dfrac{6\mathrm{x}}{19}, \text{ якщо } 0<\mathrm{x}\le 1;\\ \dfrac{2(\mathrm{x}+2)}{19}, \text{ якщо } 1<\mathrm{x}\le 2;\\ \dfrac{-3\mathrm{x}+14}{19}, \text{ якщо } 2<\mathrm{x}\le 3;\\ \dfrac{20-5\mathrm{x}}{19}, \text{ якщо } 3<\mathrm{x}\le 4;\\ 0, \text{ якщо } \mathrm{x}>4.\end{cases}$ $f(x,y)=\dfrac{6}{19}$; $P=0{,}96$.

3.2. $\mathrm{f}_2(\mathrm{y})=\begin{cases}0, \text{ якщо } \mathrm{y}\le 0;\\ 0{,}3\mathrm{y}^2-1{,}2\mathrm{y}+1{,}5, \text{ якщо } 0<\mathrm{y}\le 1;\\ 0, \text{ якщо } \mathrm{y}>1.\end{cases}$ $|c|=0{,}6$; $P=\dfrac{91}{148}$.

3.3. $A=3$; $F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}+\frac{1}{2}\right)$.

3.4. $$P=\begin{cases}\dfrac{\pi R^2}{ab}, \text{ якщо } 0<R\le b;\\ \dfrac{R^2}{4ab}(\pi-2\beta+\sin 2\beta), \text{ якщо } b<R\le a;\\ \dfrac{R^2}{4ab}(\pi-2\alpha-2\beta+\sin 2\alpha+\sin 2\beta), \text{ якщо } a<R\le\sqrt{a^2+b^2};\\ 1, \text{ якщо } R>\sqrt{a^2+b^2};\end{cases}$$

$\alpha=\arccos\frac{a}{R.}$; $\beta=\arccos\frac{b}{R}$. **3.5.** $k=4$; $f_1(x)=2xe^{-x^2}$, $x>0$; $f_2(y)=2ye^{-y^2}$, $y>0$. **3.6.** $f_1(x)=A\sqrt{\frac{\pi}{c}}e^{-\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)x^2}$; $f_2(y)=A\sqrt{\frac{\pi}{c}}e^{-\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)y^2}$.

3.7. $f(x,y)=\frac{1}{19}$; $M(X/Y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(3y+20), \text{ яякщ } 0<\mathrm{y}\le 2;\\ \frac{1}{8}(32\text{ - }3\mathrm{y}), \text{ яякщ } 2<\mathrm{y}\le 4.\end{cases}$

3.8. $f(x,y)=\frac{2}{31}$; $M(Y/X)=\begin{cases}\frac{5}{4}(x-1), \text{ якщо } 1<x\le 3;\\ \frac{1}{6}(21-2x), \text{ якщо } 3<x\le 5;.\\ \frac{1}{6}(7x-24), \text{ якщо } 5<x\le 6.\end{cases}$

3.9. $x_i=2{,}3{,}4$; $p_i=\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{5}{9}$; $M(X/Y=3)=\frac{10}{3}$;

$$F(x/Y=3)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0;\\ \frac{2}{9}, \text{ якщо } 2<x\le 3;\\ \frac{4}{9}, \text{ якщо } 3<x\le 4;\\ 1, \text{ якщо } x>4.\end{cases}$$

3.10. $MX=-0{,}45$; $DX=0{,}5475$; $MY=0{,}06$; $DY=0{,}5564$; $K_{XY}=-0{,}063$; $\rho_{XY}\approx-0{,}1141$. **3.11.** $MX=-0{,}4$; $DX=0{,}44$; $MY=0{,}45$; $DY=0{,}2475$; $K_{XY}=0{,}03$; $\rho_{XY}\approx 0{,}091$.

3.12. $K=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$. **3.13.** 332. **3.14.** $K=\begin{pmatrix}12 & 2 & 1{,}6\\ 2 & 1{,}5625 & 0\\ -1{,}6 & 0 & 0{,}64\end{pmatrix}$.

3.15. $\rho_{XY}=\dfrac{2\alpha^2-0{,}6\alpha\beta-3\beta^2}{\sqrt{\left(\alpha^2-1{,}2\alpha\beta+\beta^2\right)\left(4\alpha^2-7{,}2\alpha\beta+9\beta^2\right)}}$. **3.16.** $(-2a;\,2a;\,0)$;

$K=\begin{pmatrix}2\sigma^2 & -\sigma^2 & \sigma^2\\ -\sigma^2 & 2\sigma^2 & -\sigma^2\\ \sigma^2 & -\sigma^2 & 2\sigma^2\end{pmatrix}$. **3.17.** $\alpha\beta>0$ і $\rho_{XY}<0$ або $\alpha\beta<0$ і $\rho_{XY}>0$.

3.18. $DXY=DX\cdot DY+(MX)^2\,DY+(MY)^2\,DX$. **3.19.** $\sigma_x=1{,}7263$.

3.20. $\rho_{XY}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3(2m+1)}}{m+2}, & \text{якщо } m \text{ непарне};\\ 0, & \text{якщо } m \text{ парне}.\end{cases}$

3.21. $K=\begin{pmatrix}m\sigma & mrp_0\sigma^2 & m(n-m)p_0\sigma^2\\ mrp_0 & r\sigma^2 & r(n-m)p_0\sigma^2\\ m(n-m)p_0\sigma^2 & r(n-m)p_0\sigma^2 & (n-m)\sigma^2\end{pmatrix}$. **3.22.** –0,32; 0; 145,97.

3.23. $Z=X-Y$; квадрат, обмежений прямими: $y=0$; $y=2$; $x=0$; $x=2$.
3.24. $Z=X+Y$; смуга, яка обмежена прямими: $x+y-1=0$; $x-y+1=0$; $x-y-1=0$. **3.25.** $Z=\dfrac{Y}{X}$; трапеція, яка утворена прямими: $y-x=0$; $y-1=0$; $y=0$; $x-4=0$.

3.26. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2}$, $z>0$; $P=\dfrac{1}{6}$.

3.27. $f(z)=\begin{cases}0, & \text{якщо } z\le 0;\\ \dfrac{\sqrt{z}}{9}, & \text{якщо } 0<z\le 3;\\ \dfrac{1}{9}\left(\sqrt{z}-\sqrt{z-3}\right), & \text{якщо } 3<z\le 9;\\ \dfrac{1}{9}\left(3-\sqrt{z-3}\right), & \text{якщо } 9<z\le 12;\\ 0, & \text{якщо } z>12.\end{cases}$

3.28. $f(z)=\begin{cases}0,\ z\le\dfrac{1}{4};\\ \dfrac{8z^2+2z-1}{8z^2(1-z)^2},\ z\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right];\\ \dfrac{8z^2-18z+9}{8z^2(1-z)^2},\ z\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right];\\ 0,\ z>\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

3.29. $f(z)=\begin{cases}0,\ z\le -4;\\ \dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{\sqrt{z+4}+2}{\sqrt{-z}}\right|,\ z\in(-4;0];\\ \dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{2+\sqrt{4-z}}{\sqrt{z}}\right|,\ z\in(0;4];\\ 0,\ z>4.\end{cases}$

3.30. $f(z)=\begin{cases}0,\ z\le\dfrac{1}{2};\\ \dfrac{2z\sqrt{2z}-1}{3z^2},\ z\in\left(\dfrac{1}{2},1\right];\\ \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3\sqrt{z}},\ z\in(1,2];\\ \dfrac{8-z\sqrt{z}}{3z^2},\ z\in(2,4];\\ 0,\ z>4.\end{cases}$

3.31. $f(z)=\begin{cases}0,\ z\le\ln 2;\\ e^z\left(e^z-2\right),\ z\in(\ln 2,\ln 3];\\ e^z\left(4-e^z\right),\ z\in(\ln 3,\ln 4];\\ 0,\ z>\ln 4.\end{cases}$

3.32. $f(z)=\begin{cases} 0, z \le 0; \\ \dfrac{2}{\pi l}\ln\left|\dfrac{l+\sqrt{l^2-z^2}}{z}\right|, z\in(0,l]; \\ 0, z>l. \end{cases}$

3.33. $f(z)=0{,}01ne^{-0{,}01z}\left(1-e^{-0{,}01z}\right)^{n-1}, z>0; n\ge 10.$

3.34. $f(z)=\begin{cases} 0, z \le 0; \\ \dfrac{2z}{5}\left(1-\dfrac{z^2}{25}\right)^4, z\in(0{,}5]; \\ 0, z>5. \end{cases}$; . $f(z)=\dfrac{a^k}{G(k)}z^{k-1}e^{-az},\ \ z>0.$

3.36. 1,11. **3.37.** $\dfrac{28}{9}$. **3.38.** 500.

4.1. 0,1339; 0,1513; 0,8487; 0,0024. **4.2.** 0,0286; 0,0137; 0,9863. **4.3.** 0,0605; 0,0548; 0,9452. **4.5.** $a_x=ae^{-t}$; $D_x(t)=\sigma^{2-2t}$; $K_x(t_1,t_2)=\sigma^2e^{-(t_1+t_2)}$; $r_x(t_1,t_2)=1$.
4.8. $p_0=\dfrac{8}{87}$, $p_1=\dfrac{46}{87}$, $p_2=\dfrac{10}{87}$, $p_3=\dfrac{23}{87}$ (для графа 4.3) $p_0=\dfrac{4}{17}$, $p_1=\dfrac{10}{17}$, $p_2=\dfrac{3}{17}$, $p_3=\dfrac{23}{87}$ (для графа 4.4). **4.9.** а) $P_4(2)=0{,}134$; б) $P(x\ge 1)=$ $=1-P_0(2)=0{,}9975$; в) $P_0(2)=0{,}0025$. **4.10.** а) 0,61; б) 0,547. **4.11.** а) 4 столів; б) граф на рис. 6.1

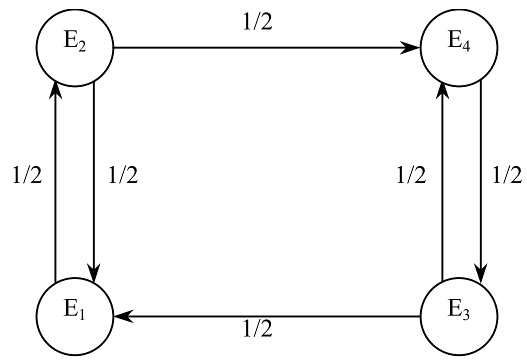

Рис. 6.1

5.1. $F_n^*(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0;\\ 0{,}35,\ x\in(0{,}1];\\ 0{,}7,\ x\in(1{,}2];\\ 0{,}8,\ x\in(2{,}3];\\ 0{,}9,\ x\in(3{,}4];\\ 0{,}95,\ x\in(4{,}5];\\ 1,\ x>5.\end{cases}$ $\max\limits_x\left|F(x)-F_n^*(x)\right|=0{,}1197;$ $\bar{x}=1{,}3;$ $s^2=2{,}01;$

$MX=DX=1$.

5.2. $F_n^*(x)=\begin{cases}0,\ x\le 3;\\ 0{,}4,\ x\in(3{,}4];\\ 0{,}8,\ x\in(4{,}5];\\ 1,\ x>5.\end{cases}$ $\max\limits_x\left|F(x)-F_n^*(x)\right|=0{,}4375;$ $\bar{x}=3{,}8;$

$s^2=0{,}56;$ $MX=4;$ $DX=12.$

5.3. $F_n^*(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0;\\ \dfrac{1}{15},\ x\in(0{,}1];\\ \dfrac{4}{15},\ x\in(1{,}2];\\ \dfrac{7}{15},\ x\in(2{,}3];\\ \dfrac{3}{5},\ x\in(3{,}4];\\ \dfrac{4}{5},\ x\in(4{,}5];\\ 1,\ x>5.\end{cases}$ $\max\limits_x\left|F(x)-F_n^*(x)\right|=0{,}0675;$ $\bar{x}=2{,}8;$ $s^2=2{,}56;$

$MX=DX=3$.

5.4. $F_n^*(x) = \begin{cases} 0, x \le 1; \\ 0{,}5, x \in (1{,}2]; \\ 0{,}7, x \in (2{,}3]; \\ 0{,}9, x \in (3{,}4]; \\ 1, x > 4. \end{cases}$ $\max\limits_x |F(x) - F_n^*(x)| = 0{,}1353$; $\bar{x} = 1{,}9$; $s^2 = 1{,}09$;

$MX = DX = 2$

5.5. $k = 8$; $\bar{x} = 1{,}9375$; $s^2 = 1{,}916$. **5.6.** $k = 7$; $\bar{x} = 5{,}433$; $s^2 = 0{,}691$. **5.7.** $k = 7$; $\bar{x} = 40{,}353$; $s^2 = 0{,}00326$. **5.8.** $\bar{x} = 2{,}4825$; $s^2 = 0{,}02694$; $A_s^* = -0{,}1193$; $E_k^* = -0{,}375$.

5.9. $k_1 = k_2 = 8$; $\bar{x} = 1402{,}7$; $\bar{y} = 0{,}588$; $s_x^2 = 2061{,}88$; $s_y^2 = 0{,}058$; $K_{xy}^* = 7{,}584$; $r = 0{,}693$.

5.10. $k_1 = k_2 = 8$; $\bar{x} = 12{,}025$; $\bar{y} = 10{,}71$; $s_x^2 = 91{,}536$; $s_y^2 = 51{,}216$; $K_{xy}^* = 56{,}926$; $r = 0{,}831$.

5.11. $k_1 = k_2 = 7$; $\bar{x} = 4{,}95$; $\bar{y} = 77{,}47$; $s_x^2 = 8{,}648$; $s_y^2 = 322{,}654$; $K_{xy}^* = -25{,}177$; $r = -0{,}477$.

5.12. $k_1 = k_2 = 7$; $\bar{x} = 98{,}6$; $\bar{y} = 118{,}967$; $s_x^2 = 807{,}77$; $s_y^2 = 740{,}258$; $K_{xy}^* = 647{,}513$; $r = 0{,}837$.

5.13. $k_1 = k_2 = 8$; $\bar{x} = 15{,}424$; $\bar{y} = 13{,}825$; $s_x^2 = 4{,}789$; $s_y^2 = 4{,}82$; $K_{xy}^* = 3{,}389$; $r = 0{,}705$. **5.14.** $\hat{a} = \overline{X}$; оцінка незміщена, обґрунтована й ефективна.

5.15. $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$; оцінка незміщена, обґрунтована й ефективна.

5.16. $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i$; оцінка незміщена, обґрунтована й ефективна.

5.17. $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$; оцінка незміщена, обґрунтована й ефективна.

5.18. $\hat{\mu} = \min\limits_i\{X_i\}$; $\hat{a} = \dfrac{1}{\nu_1^* - \min\limits_i\{X_i\}}$. **5.19.** $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i$; $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln X_i - \hat{\mu})^2$. **5.20.** $\hat{a}_1 = \nu_1^* - \sqrt{\nu_2^* - \nu_1^* - (\nu_1^*)^2}$; $\hat{a}_2 = \nu_1^* + \sqrt{\nu_2^* - \nu_1^* - (\nu_1^*)^2}$. **5.21.** $\hat{p}_i = \frac{1}{nr}\sum\limits_{k=1}^{r}X_k^i$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

5.22. $\widehat{p}=\dfrac{ns}{ns+\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}$. **5.23.** $\widehat{p}=\dfrac{1}{nr}\sum\limits_{i=1}^{r}X_i$. **5.24.** $\widehat{\alpha}=\dfrac{np}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}$; $M\widehat{\alpha}=\dfrac{\alpha np}{np-1}$; незміщена оцінка $\widehat{\alpha}^*=\dfrac{np-1}{np}\widehat{\alpha}=\dfrac{np-1}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}$; $D\widehat{\alpha}=\dfrac{\alpha^2}{np-2}$; нижня межа оцінки дисперсії $\sigma_0^2=\dfrac{\alpha^2}{np}$, оцінка асимптотично ефективна. **5.25.** $\widehat{a}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}$; $M\widehat{a}=\dfrac{n}{n-1}a$; незміщена оцінка $\widehat{a}^*=\dfrac{n-1}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}$; $D\widehat{a}^*=\dfrac{a^2}{n-2}$; нижня границя дисперсії $\hat{\sigma}_0^2=\dfrac{a^2}{n}$, оцінка асимптотично ефективна. **5.26.** $M\widehat{\alpha}=\alpha+\dfrac{1}{n}$ — оцінка зміщена; $\widehat{\alpha}^*=\min\limits_i\{X_i\}-\dfrac{1}{n}$ — незміщена оцінка; $D\widehat{\alpha}^*=\dfrac{1}{n^2}$ — оцінка обґрунтована. **5.27.** $Mh=(b-a)\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)$ — оцінка зміщена. **5.28.** (1216,57; 1223,43). **5.29.** (5,15;5,85); (2,193;4,364). **5.30.** 0,6826; 0,8664; 0,9544; 0,9874. **5.31.** 0,0482; 0,053. **5.32.** (3,27; 8,73). **5.34.** $n\ge 2$. **5.35.** $C\approx 2{,}04$; $s^2\le\dfrac{\left(\ln C+\dfrac{n}{2}\ln\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)2\sigma_0^2\sigma_1^2}{n\left(\sigma_1^2-\sigma_0^2\right)}$; $s^2\le 5{,}2$; H_0 приймається, бо $s^2=9{,}6$.

5.36. $\sigma_1^2s_0^2-\sigma_0^2s_1^2\ge\dfrac{1}{n}\left(\ln C+\dfrac{n}{2}\ln\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)2\sigma_0^2\sigma_1^2=5{,}94$; H_0 приймається, бо $\sigma_1^2s_0^2-\sigma_0^2s_1^2=1{,}064$. **5.37.** $\overline{x}\le\dfrac{\ln C+np\ln\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}}{n(\lambda_0-\lambda_1)}\approx 5{,}972$; H_0 відхиляється, бо $\overline{x}=5{,}05$. **5.38.** $\overline{x}\le\dfrac{\ln C+n\ln\dfrac{a_0}{a_1}}{n(a_0-a_1)}\approx 0{,}0523$; H_0 приймається, бо $\overline{x}=0{,}075$.

5.39. $\overline{x^2}\ge\dfrac{2\sigma_0^2\sigma_1^2\left(\ln C+\dfrac{n}{2}\ln\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)}{n\left(\sigma_1^2-\sigma_0^2\right)}\approx 72{,}35$; H_0 приймається, бо $\overline{x^2}\approx 33{,}24$.

5.40. $\bar{x}^2 \geq \dfrac{2\sigma_0^2\sigma_1^2\left(\ln C+\dfrac{n}{2}\ln\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)}{n\left(\sigma_1^2-\sigma_0^2\right)} \approx 630{,}23$; H_0 приймається, бо $\bar{x}^2 \approx 337{,}73$.

5.41. $\bar{x} \leq \dfrac{\ln C+n\left(\ln\dfrac{a_0}{a_1}+a_0\mu_0-a_1\mu_1\right)}{n\left(a_0-a_1\right)} \approx 18{,}477$; H_0 відхиляється, бо $\bar{x}\approx 15{,}3$.

5.42. $\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i-\mu\right)^2 \geq \dfrac{2\sigma_0^2\sigma_1^2\left(\ln C+\dfrac{n}{2}\ln\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)}{\sigma_1^2-\sigma_0^2}$, якщо $\sigma_1^2>\sigma_0^2$ і

$\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i-\mu\right)^2 \leq \dfrac{2\sigma_0^2\sigma_1^2\left(\ln C+\dfrac{n}{2}\ln\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)}{\sigma_1^2-\sigma_0^2}$, якщо $\sigma_1^2<\sigma_0^2$. **5.43.** $\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \geq$ $\geq \dfrac{2\sigma^2\ln C+n\left(\mu_1^2-\mu_0^2\right)}{2\left(\mu_1-\mu_0\right)}$, якщо $\mu_1>\mu_0$ і $\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \leq \dfrac{2\sigma^2\ln C+n\left(\mu_1^2-\mu_0^2\right)}{2\left(\mu_1-\mu_0\right)}$, якщо $\mu_1<\mu_0$. **5.44.** $\lambda=\left(1+\dfrac{U^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$, $f_n(u)=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi(n-1)}}\left(1+\dfrac{u^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$.

5.45. $\lambda=e^{\frac{n}{2}}n^{-\frac{n}{2}}U^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{U}{2}}$, $f_n(u)=\dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}u^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}$, $u>0$.

5.46. $\lambda=\left(\dfrac{\alpha_0}{np}\right)e^{np}U^{np}e^{-\alpha_0 U}$; $f_n(u)=\dfrac{\alpha^{np}}{\Gamma(np)}u^{np-1}e^{-\alpha_0 u}$, $u>0$.

5.47. $\lambda=\left(\dfrac{a_0}{n}\right)^n e^nU^ne^{-a_0U}$; $f_n(u)= =\dfrac{a_0^n}{\Gamma(n)}u^{n-1}e^{-a_0u}$, $u>0$.

5.48. $\lambda=\dfrac{e^nU^ne^{-\frac{u}{2\sigma_0^2}}}{2^n n^n\left(\sigma_0^2\right)^n}$; $u>0$. $f_n(u)= =\dfrac{1}{\left(2\sigma_0^2\right)^n}u^{n-1}e^{-\frac{u}{2\sigma_0^2}}$, **5.49.** Перевищення неістотне: $z_\alpha=2{,}33; z=1{,}039$. **5.50.** Забезпечує: $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96; z=-0{,}645$. **5.51**. Гіпотеза приймається: $z_\alpha=2{,}33; z=1{,}25$. **5.52.** Відхилення істотні: $z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}275;$ $z=-23564$. **5.53.** Вплив істотний: $z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}1$; $z=-3{,}875$. **5.54.** Відхилення недопустимі: $u_\alpha = 33{,}7$; $u = 39{,}2$. **5.55.** Відхилення неістотне: $u_\alpha = 15{,}5$; $u = 12{,}12$. **5.56.** Відмінність неістотна: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$; $z = -1{,}4077$. **5.57.** Гіпотеза відхиляється: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}1$; $z = 4{,}1228$. **5.58.** Гіпотеза відхиляється: $z_{\frac{\alpha}{2}}\, 2{,}33$; $z = 4{,}1967$. **5.59.** Гіпотеза приймається: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}6; z = -1{,}873$. **5.60.** Точність вища: $f_\alpha = 1{,}9$; $f = 1{,}967$. **5.61.** Гіпотеза приймається: $f_\alpha = 2{,}9$; $f = 1{,}046$. **5.62.** Відмінності неістотні: $f_\alpha = 2{,}87$; $f = 2{,}219$. **5.63.** Гіпотеза приймається: $f_\alpha = 3{,}47$; $f = 2{,}223$. **5.64.** Гіпотеза приймається: $f_\alpha = 3{,}03; f = 1{,}786$. **5.65.** Відхилення неістотні: $u_\alpha = 7{,}8$; $u_1 = 2{,}853$; $u_2 = 7{,}184$. **5.66.** Узгоджуються: $u_\alpha = 14{,}1$; $u = 2{,}575$. **5.67.** Відповідають: $u_\alpha = 16{,}9$; $u = 4{,}121$. **5.68.** Гіпотеза відхиляється: $u_\alpha = 9{,}8$; $u = 15{,}93$; $K(\lambda_\alpha) = 1{,}52$; $\sqrt{n}D_n = 4{,}566$. **5.69.** Узгоджується: $u_\alpha = 11{,}1$; $u = 6{,}37$; $K(\lambda_\alpha) = 1{,}36$; $\sqrt{n}D_n = 0{,}4617$. **5.70.** Гіпотеза приймається: $K(\lambda_\alpha) = 1{,}36$; $\sqrt{n}D_n = 0{,}5353$. **5.71.** $\overline{y}_x = 0{,}112x + 9{,}896$; $\overline{x}_y = 6{,}227y - 47{,}478$; $r = 0{,}835$. **5.72.** $\overline{y}_x = 0{,}055x + 6{,}325$;. $\overline{x}_y = 1{,}888y - 7{,}841$; $r = 0{,}321$. **5.73.** $\overline{y}_x = -0{,}00553x^2 + 0{,}2929x + 10{,}9456$; $\eta_{y/x} = 0{,}672$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973.
2. *Волощенко А. Б.* Теория вероятностей и математическая статистика для инженеров-экономистов. — К.: КИНХ, 1973.
3. *Волощенко А. Б., Гетманцев В. Д., Кузубов В. И.* Методические указания к решению задач с экономическим содержанием по разделу «Случайныя события». — К.: КИНХ, 1979.
4. *Волощенко А. Б., Гетманцев В. Д., Кузубов В. И.* Методические указания к решению задач с экономическим содержанием по разделу «Математическая статистика». — К.: КИНХ, 1979.
5. *Волощенко А. Б., Гетманцев В. Д., Кузубов В. И.* Методические указания к решению задач с экономическим содержанием по разделу «Случайные величины и функции». — К.: КИНХ, 1980.
6. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1977.
7. *Гнеденко В. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1965.
8. *Емельянов Г. В., Скитович В. П.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1967.
9. *Карасев А. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Статистика, 1970.
10. *Мешалкин Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Изд-во МГУ, 1963.
11. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А. А. Свешникова. — М.: Наука, 1970.
12. *Турчин В. М.* Математична статистика. — К.: Вид. центр «Академія», 1999.
13. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высш. шк., 1975. — 332 с.
14. Справочник по математике для экономистов / Под ред. В. И. Ермакова. — М.: Высш. шк., 1987. — 306 с.
15. *Мацкевич И. П., Свирид Г. П.* Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. — Минск.: Вышейш. шк., 1993. — 270 с.
16. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1999.
17. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Теорія ймовірностей. — К: КНЕУ, 1999. — Ч. 1.
18. *Крамер М. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2001.

Додатки

Додаток 1

Ймовірності $P_a(X=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}$, $m=0,1,2,\ldots$ розподілу Пуассона.

M \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0	0,09484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834
4		0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123
6					0,00001	0,00004	0,00008	0,00016
7								0,00002

m \ a	0,91	1	2	3	4	5	6
0	0,40657	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248
1	0,36591	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487
2	0,16466	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422	0,04462
3	0,04940	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037	0,08924
4	0,01111	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547	0,13385
5	0,00200	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	0,16062

m \ a	0,91	1	2	3	4	5	6
6	0,00030	0,00051	0,01203	0,05041	0,10420	0,14622	0,16062
7	0,00004	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10444	0,13768
8			0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	0,10326
9			0,00019	0,00270	0,01323	0,03627	0,06884
10			0,00004	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130
11				0,00022	0,00192	0,00824	0,02253
12				0,00006	0,00064	0,00343	0,01126
13				0,00001	0,00020	0,00132	0,00520
14					0,00006	0,00047	0,00223
15					0,00002	0,00016	0,00089
16						0,00005	0,00033
17						0,00001	0,00012
18							0,00004
19							0,00001

m \ a	7	8	9	10	11	12	13
0	0,00091	0,00034	0,00012	0,00005	0,00002		
1	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045	0,00018	0,00007	0,00003
2	0,02234	0,01073	0,00500	0,00227	0,00101	0,00044	0,00019
3	0,05213	0,02863	0,01499	0,00757	0,00370	0,00177	0,00083
4	0,09123	0,05725	0,03374	0,01892	0,01019	0,00531	0,00269
5	0,12772	0,09160	0,06073	0,03783	0,02242	0,01274	0,00699
6	0,14900	0,12214	0,09109	0,06306	0,04109	0,02548	0,01515
7	0,14900	0,13959	0,11712	0,09008	0,06458	0,04368	0,02814
8	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260	0,08879	0,06552	0,04573
9	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511	0,10853	0,08736	0,06605
10	0,07098	0,09926	0,11858	0,12511	0,11938	0,10484	0,08587

m \ a	7	8	9	10	11	12	13
11	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374	0,11938	0,11437	0,10148
12	0,02635	0,04813	0,07277	0,09478	0,10943	0,11437	0,10994
13	0,01419	0,02962	0,05038	0,07291	0,09259	0,10557	0,10994
14	0,00709	0,01692	0,03238	0,05208	0,07275	0,09049	0,10209
15	0,00331	0,00903	0,01943	0,03472	0,05335	0,07239	0,08848
16	0,00145	0,00451	0,01093	0,02170	0,03668	0,05429	0,07189
17	0,00060	0,00212	0,00579	0,01276	0,02373	0,03832	0,05497
18	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709	0,01450	0,02555	0,03970
19	0,00009	0,00040	0,00137	0,00373	0,00840	0,01614	0,02716
20	0,00003	0,00016	0,00062	0,00187	0,00462	0,00968	0,01766
21		0,00006	0,00026	0,00089	0,00242	0,00553	0,01093
22		0,00002	0,00011	0,00040	0,00121	0,00302	0,00646
23			0,00004	0,00018	0,00058	0,00157	0,00365
24			0,00002	0,00007	0,00027	0,00079	0,00198
25				0,00003	0,00012	0,00038	0,00103
26				0,00001	0,00005	0,00017	0,00051
27					0,00002	0,00008	0,00025
28						0,00003	0,00011
29						0,00001	0,00005
30							0,00002

Продовження дод. 1

m \ a	14	15	16	17	18	19	20
0							
1	0,00001						
2	0,00008	0,00003	0,00001				
3	0,00038	0,00017	0,00008	0,00003	0,00001		
4	0,00133	0,00065	0,00031	0,00014	0,00007	0,00003	0,00001
5	0,00373	0,00194	0,00098	0,00049	0,00024	0,00012	0,00005
6	0,00870	0,00484	0,00262	0,00139	0,00072	0,00037	0,00018
7	0,01739	0,01037	0,00599	0,00337	0,00185	0,00099	0,00052
8	0,03044	0,01944	0,01199	0,00716	0,00416	0,00236	0,00131
9	0,04734	0,03241	0,02131	0,01353	0,00833	0,00498	0,00291
10	0,06628	0,04861	0,03410	0,02300	0,01499	0,00947	0,00582
11	0,08436	0,06629	0,04960	0,03554	0,02452	0,01635	0,01058
12	0,09842	0,08286	0,06613	0,05036	0,03678	0,02589	0,01763
13	0,10599	0,09561	0,08139	0,06585	0,05093	0,03784	0,02712
14	0,10599	0,10244	0,09302	0,07996	0,06548	0,05135	0,03874
15	0,09892	0,10244	0,09922	0,09062	0,07858	0,06504	0,05165
16	0,08656	0,09603	0,09922	0,09628	0,08840	0,07724	0,06456
17	0,07128	0,08474	0,09338	0,09628	0,09360	0,08633	0,07595
18	0,05544	0,07061	0,08301	0,09094	0,09360	0,09112	0,08439
19	0,04085	0,05575	0,06990	0,08136	0,08867	0,09112	0,08884
20	0,02860	0,04181	0,05592	0,06916	0,07980	0,08657	0,08884
21	0,01906	0,02986	0,04261	0,05599	0,06840	0,07832	0,08461

Закінчення дод. 1

m \ a	14	15	16	17	18	19	20
22	0,01213	0,02036	0,03099	0,04326	0,05597	0,06764	0,07691
23	0,00738	0,01328	0,02156	0,03198	0,04380	0,05588	0,06688
24	0,00431	0,00830	0,01437	0,02265	0,03285	0,04424	0,05573
25	0,00241	0,00498	0,00920	0,01540	0,02365	0,03362	0,04459
26	0,00130	0,00287	0,00566	0,01007	0,01637	0,02457	0,03430
27	0,00067	0,00160	0,00335	0,00634	0,01092	0,01729	0,02541
28	0,00034	0,00086	0,00192	0,00385	0,00702	0,01173	0,01815
29	0,00016	0,00044	0,00106	0,00226	0,00436	0,00769	0,01252
30	0,00008	0,00022	0,00056	0,00128	0,00261	0,00487	0,00834
31	0,00003	0,00011	0,00029	0,00070	0,00152	0,00298	0,00538
32	0,00001	0,00005	0,00015	0,00037	0,00085	0,00177	0,00336
33		0,00002	0,00007	0,00019	0,00047	0,00102	0,00204
34		0,00001	0,00003	0,00010	0,00025	0,00057	0,00120
35			0,00002	0,00005	0,00013	0,00031	0,00069
36				0,00002	0,00006	0,00016	0,00038
37				0,00001	0,00003	0,00008	0,00021
38					0,00001	0,00004	0,00011
39						0,00002	0,00006
40							0,00003
41							0,00001

Інтегральні ймовірності $P_a(X \geq m) = \sum\limits_{k=m}^{\infty} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ розподілу Пуассона

m \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	0,09516	0,18127	0,25918	0,32968	0,39347	0,45119	0,50341	0,55067
2	0,00468	0,01752	0,03694	0,06155	0,09020	0,12190	0,15580	0,19121
3	0,00015	0,00115	0,00360	0,00793	0,01439	0,02312	0,03414	0,04742
4		0,00006	0,00027	0,00078	0,00175	0,00336	0,00575	0,00908
5			0,00002	0,00006	0,00017	0,00039	0,00079	0,00141
6					0,00001	0,00004	0,00009	0,00018
7								0,00002

m \ a	0,9	1	2	3	4	5	6
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	0,59343	0,63212	0,86466	0,95021	0,98168	0,99326	0,99752
2	0,22752	0,26424	0,59399	0,80085	0,90842	0,95957	0,98265
3	0,06286	0,08030	0,32332	0,57681	0,76190	0,87535	0,93803
4	0,01346	0,01899	0,14288	0,35277	0,56653	0,73497	0,84880
5	0,00234	0,00366	0,05265	0,18474	0,37116	0,55951	0,71494
6	0,00034	0,00059	0,01656	0,08392	0,21487	0,38404	0,55432
7	0,00004	0,00008	0,00453	0,03351	0,11067	0,23782	0,39370
8		0,00001	0,00110	0,01190	0,05113	0,13337	0,25602
9			0,00024	0,00380	0,02136	0,06809	0,15276
10			0,00005	0,00110	0,00813	0,03183	0,08392
11				0,00029	0,00284	0,01370	0,04262
12				0,00007	0,00092	0,00545	0,02009

a / m	0,9	1	2	3	4	5	6
13				0,00002	0,00027	0,00202	0,00883
14					0,00008	0,00070	0,00363
15					0,00002	0,00023	0,00140
16						0,00007	0,00051
17						0,00002	0,00017
18							0,00006
19							0,00002

a / m	7	8	9	10	11	12	13
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	0,99909	0,99966	0,99988	0,99995	0,99998	0,99999	1,00000
2	0,99270	0,99698	0,99877	0,99950	0,99980	0,99992	0,99997
3	0,97036	0,98625	0,99377	0,99723	0,99879	0,99948	0,99978
4	0,91823	0,95762	0,97877	0,98966	0,99508	0,99771	0,99895
5	0,82701	0,90037	0,94504	0,97075	0,98490	0,99240	0,99626
6	0,69929	0,80876	0,88431	0,93291	0,96248	0,97966	0,98927
7	0,55029	0,68663	0,79322	0,86986	0,92139	0,95418	0,97411
8	0,40129	0,54704	0,67610	0,77978	0,85681	0,91050	0,94597
9	0,27091	0,40745	0,54435	0,66718	0,76801	0,84497	0,90024
10	0,16950	0,28338	0,41259	0,54207	0,65949	0,75761	0,83419
11	0,09852	0,18411	0,29401	0,41696	0,54011	0,65277	0,74832
12	0,05335	0,11192	0,19699	0,30322	0,42073	0,53840	0,64684
13	0,02700	0,06380	0,12423	0,20844	0,31130	0,42403	0,53690
14	0,01281	0,03418	0,07385	0,13554	0,21871	0,31846	0,42696
15	0,00572	0,01726	0,04147	0,08346	0,14596	0,22798	0,32487
16	0,00241	0,00823	0,02204	0,04874	0,09260	0,15558	0,23639
17	0,00096	0,00372	0,01111	0,02704	0,05592	0,10129	0,16451

a / m	7	8	9	10	11	12	13
18	0,00036	0,00159	0,00532	0,01428	0,03219	0,06297	0,10953
19	0,00013	0,00065	0,00243	0,00719	0,01769	0,03742	0,06983
20	0,00004	0,00025	0,00106	0,00345	0,00929	0,02128	0,04267
21	0,00001	0,00009	0,00044	0,00159	0,00467	0,01160	0,02501
22		0,00003	0,00018	0,00070	0,00225	0,00607	0,01408
23		0,00001	0,00007	0,00030	0,00104	0,00305	0,00762
24			0,00002	0,00012	0,00046	0,00147	0,00397
25				0,00005	0,00020	0,00069	0,00199
26				0,00002	0,00008	0,00031	0,00097
27					0,00003	0,00013	0,00045
28					0,00001	0,00006	0,00020
29						0,00002	0,00009
30							0,00004
31							0,00002

a / m	14	15	16	17	18	19	20
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	0,99999	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
3	0,99991	0,99996	0,99998	0,99999	1,00000	1,00000	1,00000
4	0,99953	0,99979	0,99991	0,99996	0,99998	0,99999	1,00000
5	0,99819	0,99914	0,99960	0,99982	0,99992	0,99996	0,99998
6	0,99447	0,99721	0,99862	0,99933	0,99968	0,99985	0,99993
7	0,98577	0,99237	0,99599	0,99794	0,99896	0,99948	0,99974
8	0,96838	0,98200	0,99000	0,99457	0,99711	0,99849	0,99922
9	0,93794	0,96255	0,97801	0,98740	0,99294	0,99613	0,99791
10	0,89060	0,93015	0,95670	0,97388	0,98462	0,99114	0,99500
11	0,82432	0,88154	0,92260	0,95088	0,96963	0,98168	0,98919

m \ a	14	15	16	17	18	19	20
12	0,73996	0,81525	0,87301	0,91533	0,94511	0,96533	0,97861
13	0,64154	0,73239	0,80688	0,86498	0,90833	0,93944	0,96099
14	0,53555	0,63678	0,72549	0,79913	0,85740	0,90160	0,93387
15	0,42956	0,53435	0,63247	0,71917	0,79192	0,85025	0,89514
16	0,33064	0,43191	0,53326	0,62855	0,71335	0,78521	0,84349
17	0,24408	0,33588	0,43404	0,53226	0,62495	0,70797	0,77893
18	0,17280	0,25114	0,34066	0,43598	0,53135	0,62164	0,70297
19	0,11736	0,18053	0,25765	0,34504	0,43776	0,53052	0,61858
20	0,07651	0,12478	0,18775	0,26368	0,34908	0,43939	0,52974
21	0,04791	0,08297	0,13183	0,19452	0,26928	0,35283	0,44091
22	0,02884	0,05311	0,08923	0,13853	0,20088	0,27450	0,35630
23	0,01671	0,03274	0,05824	0,09527	0,14491	0,20686	0,27939
24	0,00933	0,01946	0,03669	0,06330	0,10111	0,15098	0,21251
25	0,00502	0,01116	0,02232	0,04065	0,06826	0,10675	0,15677
26	0,00261	0,00618	0,01312	0,02524	0,04461	0,07313	0,11218
27	0,00131	0,00331	0,00746	0,01517	0,02823	0,04856	0,07789
28	0,00064	0,00172	0,00411	0,00883	0,01732	0,03127	0,05248
29	0,00030	0,00086	0,00219	0,00498	0,01030	0,01954	0,03433
30	0,00014	0,00042	0,00113	0,00273	0,00594	0,01185	0,02182
31	0,00006	0,00020	0,00057	0,00145	0,00333	0,00698	0,01347
32	0,00003	0,00009	0,00028	0,00075	0,00181	0,00400	0,00809
33	0,00001	0,00004	0,00013	0,00037	0,00096	0,00223	0,00473
34		0,00002	0,00006	0,00018	0,00049	0,00121	0,00269
35			0,00003	0,00009	0,00025	0,00064	0,00149
36			0,00001	0,00004	0,00012	0,00033	0,00080
37				0,00002	0,00006	0,00016	0,00042
38					0,00003	0,00008	0,00022
39					0,00001	0,00004	0,00011
40						0,00002	0,00005
41							0,00003
42							0,00001

Додаток 3

Таблиця значень функції нормального розподілу Гаусса—Лапласа $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Цілі і десяті частини	Соті частини x									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965

Продовження дод. 3

Цілі і десяті частини	Соті частини *x*									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139

Закінчення дод. 3

Цілі і десяті частини	Соті частини x									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Додаток 4

Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

Цілі і десяті частини x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441

1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Значення χ_α^2 залежно від імовірності α і кількості k ступенів волі

$$P\left(\chi^2 > \chi_\alpha^2\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \cdot 2^{\frac{k}{2}}} \int_{\chi_\alpha^2}^{\infty} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

Число ступенів	Ймовірність α							
k	0,99	0,98	0,95	0,9	0,8	0,7	0,5	0,3
1	0,0002	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,02	0,04	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,124	2,366	3,66
4	0,3	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,2	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9	11,3	14
13	4,1	4,8	5,9	7	8,6	9,9	12,3	15,1
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12	13,5	16,3	19,5
18	7	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8

Число ступенів	Ймовірність α							
k	0,99	0,98	0,95	0,9	0,8	0,7	0,5	0,3
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9
22	9,5	10,6	12,3	14	16,3	18,1	21,3	24,9
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19	22,3	26
24	10,9	12	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5
30	15	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5
31	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
32	3,22	4,6	6	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
33	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
34	6	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
35	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
36	8,6	10,6	12,6	15	16,8	18,6	20,7	22,5
37	9,8	12	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
38	11	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
39	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23	26,1	27,9
40	13,4	16	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
41	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
42	15,8	18,5	21	24,1	26,2	28,3	31	32,9
43	17	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5

Число ступенів	Ймовірність α							
k	0,99	0,98	0,95	0,9	0,8	0,7	0,5	0,3
44	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31	34	36,1
45	19,3	22,3	25	28,5	30,6	32,5	35,5	37,7
46	20,5	23,5	26,3	29,6	32	34	37	39,2
47	21,6	24,8	27,6	31	33,4	35,5	38,5	40,8
48	22,8	26	28,9	32,3	34,8	37	40	42,3
49	23,9	27,2	30,1	33,7	36,22	38,5	41,5	43,8
50	25	28,4	31,4	35	37,6	40	43	45,3
51	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
52	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5	46	48,3
53	28,4	32	35,2	39	41,6	44	47,5	49,7
54	29,6	33,2	36,4	40,3	43	45,5	48,5	51,2
55	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47	50	52,6
56	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48	51,5	54,1
57	32,9	36,7	40,1	44,1	47	49,5	53	55,5
58	34	37,9	41,3	45,4	48,3	51	54,5	56,9
59	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,5	56	58,3
60	36,3	40,3	43,8	48	50,9	54	57,5	59,7

Додаток 6

Таблиця розподілу Стьюдента залежно від значення *t* і кількості *k* ступенів волі:

$$P_t = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \int_{-\infty}^{t} \left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt$$

Ймовірність *t*	Ступені волі									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
0,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
0,1	0,5317	0,5353	0,5367	0,5374	0,5379	0,5382	0,5384	0,5386	0,5387	,5388
0,2	0,5628	0,5700	0,5729	0,5744	0,5753	0,5760	0,5764	0,5768	0,5770	0,5773
0,3	0,5928	0,6038	0,6081	0,6104	0,6119	0,6129	0,6136	0,6141	0,6145	0,6148
0,4	0,6211	0,6361	0,6420	0,6452	0,6472	0,6485	0,6495	0,6502	0,6508	0,6512
0,5	0,6476	0,6667	0,6743	0,6783	0,6809	0,6826	0,6838	0,6847	0,6855	0,6861
0,6	0,6720	0,6953	0,7046	0,7096	0,7127	0,7148	0,7163	0,7174	0,7183	0,7191
0,7	0,6944	0,7218	0,7328	0,7387	0,7424	0,7449	0,7467	0,7481	0,7492	0,7501
0,8	0,7148	0,7462	0,7589	0,7657	0,7700	0,7729	0,7750	0,7766	0,7778	0,7788
0,9	0,7333	0,7684	0,7828	0,7905	0,7953	0,7986	0,8010	0,8028	0,8042	0,8054
1,0	0,7500	0,7887	0,8045	0,8130	0,8184	0,8220	0,8247	0,8267	0,8283	0,8296

Продовження дод. 6

Ймовір-ність *t*	Ступені волі									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1,1	0,7651	0,8070	0,8242	0,8335	0,8393	0,8433	0,8461	0,8483	0,8501	0,8514
1,2	0,7789	0,8235	0,8419	0,8518	0,8581	0,8623	0,8654	0,8678	0,8696	0,8711
1,3	0,7913	0,8384	0,8578	0,8683	0,8748	0,8793	0,8826	0,8851	0,8870	0,8886
1,4	0,8026	0,8518	0,8720	0,8829	0,8898	0,8945	0,8979	0,9005	0,9025	0,9041
1,5	0,8128	0,8638	0,8847	0,8960	0,9030	0,9079	0,9114	0,9140	0,9161	0,9177
1,6	0,8222	0,8746	0,8960	0,9076	0,9148	0,9196	0,9232	0,9259	0,9280	0,9297
1,7	0,8307	0,8844	0,9062	0,9178	0,9251	0,9300	0,9335	0,9362	0,9383	0,9400
1,8	0,8386	0,8932	0,9152	0,9269	0,9341	0,9390	0,9426	0,9452	0,9473	0,9490
1,9	0,8458	0,9011	0,9232	0,9349	0,9421	0,9469	0,9504	0,9530	0,9551	0,9567
2,0	0,8524	0,9082	0,9303	0,9419	0,9490	0,9538	0,9572	0,9597	0,9617	0,9633
2,1	0,8585	0,9147	0,9367	0,9482	0,9551	0,9598	0,9631	0,9655	0,9674	0,9690
2,2	0,8642	0,9206	0,9424	0,9537	0,9605	0,9649	0,9681	0,9705	0,9723	0,9738
2,3	0,8695	0,9259	0,9475	0,9585	0,9651	0,9694	0,9725	0,9748	0,9765	0,9779
2,4	0,8743	0,9308	0,9521	0,9628	0,9692	0,9734	0,9763	0,9784	0,9801	0,9813
2,5	0,8789	0,9352	0,9561	0,9666	0,9728	0,9767	0,9795	0,9815	0,9831	0,9843
2,6	0,8831	0,9392	0,9598	0,9700	0,9759	0,9797	0,9823	0,9842	0,9856	0,9868
2,7	0,8871	0,9429	0,9631	0,9730	0,9786	0,9822	0,9847	0,9865	0,9878	0,9888

Продовження дод. 6

Ймовірність t	Ступені волі									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
2,8	0,8908	0,9463	0,9661	0,9756	0,9810	0,9844	0,9867	0,9884	0,9896	0,9906
2,9	0,8943	0,9494	0,9687	0,9779	0,9831	0,9863	0,9885	0,9901	0,9912	0,9921
3,0	0,8976	0,9523	0,9712	0,9800	0,9850	0,9880	0,9900	0,9915	0,9925	0,9933
3,1	0,9007	0,9549	0,9734	0,9819	0,9866	0,9894	0,9913	0,9927	0,9936	0,9944
3,2	0,9036	0,9573	0,9753	0,9835	0,9880	0,9907	0,9925	0,9937	0,9946	0,9953
3,3	0,9063	0,9596	0,9771	0,9850	0,9893	0,9918	0,9934	0,9946	0,9954	0,9960
3,4	0,9089	0,9617	0,9788	0,9864	0,9904	0,9928	0,9943	0,9953	0,9961	0,9966
3,5	0,9114	0,9636	0,9803	0,9876	0,9914	0,9936	0,9950	0,9960	0,9966	0,9971
3,6	0,9138	0,9654	0,9816	0,9886	0,9922	0,9943	0,9956	0,9965	0,9971	0,9976
3,7	0,9160	0,9670	0,9829	0,9896	0,9930	0,9950	0,9962	0,9970	0,9975	0,9979
3,8	0,9181	0,9686	0,9840	0,9904	0,9937	0,9955	0,9966	0,9974	0,9979	0,9983
3,9	0,9201	0,9701	0,9850	0,9912	0,9943	0,9960	0,9971	0,9977	0,9982	0,9985
4,0	0,9220	0,9714	0,9860	0,9919	0,9948	0,9964	0,9974	0,9980	0,9984	0,9987
4,1	0,9238	0,9727	0,9869	0,9926	0,9953	0,9968	0,9977	0,9983	0,9987	0,9989
4,2	0,9256	0,9739	0,9877	0,9932	0,9958	0,9972	0,9980	0,9985	0,9988	0,9991
4,3	0,9273	0,9750	0,9884	0,9937	0,9961	0,9975	0,9982	0,9987	0,9990	0,9992
4,4	0,9289	0,9760	0,9891	0,9942	0,9965	0,9977	0,9984	0,9989	0,9991	0,9993

Продовження дод. 6

Ймовірність t	Ступені волі									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
4,5	0,9304	0,9770	0,9898	0,9946	0,9968	0,9979	0,9986	0,9990	0,9993	0,9994
4,6	0,9319	0,9779	0,9903	0,9950	0,9971	0,9982	0,9988	0,9991	0,9994	0,9995
4,7	0,9333	0,9788	0,9909	0,9953	0,9973	0,9983	0,9989	0,9992	0,9994	0,9996
4,8	0,9346	0,9796	0,9914	0,9957	0,9976	0,9985	0,9990	0,9993	0,9995	0,9996
4,9	0,9359	0,9804	0,9919	0,9960	0,9978	0,9986	0,9991	0,9994	0,9996	0,9997
5,0	0,9372	0,9811	0,9923	0,9963	0,9979	0,9988	0,9992	0,9995	0,9996	0,9997
5,1	0,9384	0,9818	0,9927	0,9965	0,9981	0,9989	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998
5,2	0,9395	0,9825	0,9931	0,9967	0,9983	0,9990	0,9994	0,9996	0,9997	0,9998
5,3	0,9406	0,9831	0,9934	0,9970	0,9984	0,9991	0,9994	0,9996	0,9998	0,9998
5,4	0,9417	0,9837	0,9938	0,9972	0,9985	0,9992	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998
5,5	0,9427	0,9842	0,9941	0,9973	0,9986	0,9992	0,9995	0,9997	0,9998	0,9999
5,6	0,9437	0,9848	0,9944	0,9975	0,9987	0,9993	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999
5,7	0,9447	0,9853	0,9946	0,9977	0,9988	0,9994	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999
5,8	0,9456	0,9858	0,9949	0,9978	0,9989	0,9994	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999
5,9	0,9465	0,9862	0,9951	0,9979	0,9990	0,9995	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999
6,0	0,9474	0,9867	0,9954	0,9981	0,9991	0,9995	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999

Продовження дод. 6

Ймовір-ність *t*	Ступені волі								
	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
0,1	0,5389	0,5390	0,5391	0,5391	0,5392	0,5392	0,5392	0,5393	0,5393
0,2	0,5774	0,5776	0,5777	0,5778	0,5779	0,5780	0,5781	0,5781	0,5782
0,3	0,6151	0,6153	0,6155	0,6157	0,6159	0,6160	0,6161	0,6162	0,6163
0,4	0,6516	0,6519	0,6522	0,6524	0,6526	0,6528	0,6529	0,6531	0,6532
0,5	0,6865	0,6869	0,6873	0,6876	0,6878	0,6881	0,6883	0,6884	0,6886
0,6	0,7197	0,7202	0,7206	0,7210	0,7213	0,7215	0,7218	0,7220	0,7222
0,7	0,7508	0,7514	0,7519	0,7523	0,7527	0,7530	0,7533	0,7536	0,7538
0,8	0,7797	0,7804	0,7810	0,7815	0,7819	0,7823	0,7826	0,7829	0,7832
0,9	0,8063	0,8071	0,8078	0,8083	0,8088	0,8093	0,8097	0,8100	0,8103
1,0	0,8306	0,8315	0,8322	0,8329	0,8334	0,8339	0,8343	0,8347	0,8351
1,1	0,8526	0,8535	0,8544	0,8551	0,8557	0,8562	0,8567	0,8571	0,8575
1,2	0,8723	0,8734	0,8742	0,8750	0,8756	0,8762	0,8767	0,8772	0,8776
1,3	0,8899	0,8910	0,8919	0,8927	0,8934	0,8940	0,8945	0,8950	0,8954
1,4	0,9055	0,9066	0,9075	0,9084	0,9091	0,9097	0,9103	0,9107	0,9112
1,5	0,9191	0,9203	0,9212	0,9221	0,9228	0,9235	0,9240	0,9245	0,9250

Продовження дод. 6

Ймовір-ність t	Ступені волі								
	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1,6	0,9310	0,9322	0,9332	0,9340	0,9348	0,9354	0,9360	0,9365	0,9370
1,7	0,9414	0,9426	0,9435	0,9444	0,9451	0,9458	0,9463	0,9468	0,9473
1,8	0,9503	0,9515	0,9525	0,9533	0,9540	0,9546	0,9552	0,9557	0,9561
1,9	0,9580	0,9591	0,9601	0,9609	0,9616	0,9622	0,9627	0,9632	0,9636
2,0	0,9646	0,9657	0,9666	0,9674	0,9680	0,9686	0,9691	0,9696	0,9700
2,1	0,9702	0,9712	0,9721	0,9728	0,9735	0,9740	0,9745	0,9750	0,9753
2,2	0,9750	0,9759	0,9768	0,9774	0,9781	0,9786	0,9790	0,9794	0,9798
2,3	0,9790	0,9799	0,9807	0,9813	0,9819	0,9824	0,9828	0,9832	0,9835
2,4	0,9824	0,9832	0,9840	0,9846	0,9851	0,9855	0,9859	0,9863	0,9866
2,5	0,9852	0,9860	0,9867	0,9873	0,9877	0,9882	0,9885	0,9888	0,9891
2,6	0,9877	0,9884	0,9890	0,9895	0,9900	0,9903	0,9907	0,9910	0,9912
2,7	0,9897	0,9903	0,9909	0,9914	0,9918	0,9921	0,9924	0,9927	0,9929
2,8	0,9914	0,9920	0,9925	0,9929	0,9933	0,9936	0,9938	0,9941	0,9943
2,9	0,9928	0,9933	0,9938	0,9942	0,9945	0,9948	0,9950	0,9952	0,9954
3,0	0,9940	0,9945	0,9949	0,9952	0,9955	0,9958	0,9960	0,9962	0,9963

Закінчення дод. 6

Ймовір-ність t	Ступені волі								
	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3,1	0,9949	0,9954	0,9958	0,9961	0,9963	0,9966	0,9967	0,9969	0,9971
3,2	0,9958	0,9962	0,9965	0,9968	0,9970	0,9972	0,9974	0,9975	0,9976
3,3	0,9965	0,9968	0,9971	0,9974	0,9976	0,9977	0,9979	0,9980	0,9981
3,4	0,9970	0,9974	0,9976	0,9978	0,9980	0,9982	0,9983	0,9984	0,9985
3,5	0,9975	0,9978	0,9980	0,9982	0,9984	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988
3,6	0,9979	0,9982	0,9984	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9990
3,7	0,9982	0,9985	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9991	0,9992	0,9992
3,8	0,9985	0,9987	0,9989	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9993	0,9994
3,9	0,9988	0,9989	0,9991	0,9992	0,9993	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995
4,0	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9994	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996
4,1	0,9991	0,9993	0,9994	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
4,2	0,9993	0,9994	0,9995	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
4,3	0,9994	0,9995	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998
4,4	0,9995	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Додаток 7

Значення п’ятивідсоткових (перший рядок) і одновідсоткових меж (другий рядок) відхилення величини F залежно від ступенів волі k_1 і k_2.

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161 4052	200 4999	216 5403	225 5625	230 5764	234 5859	237 5928	239 5981	241 6022	242 6056	243 6082	244 6343
2	18,5 98,5	19 99	19,2 99,2	19,3 99,3	19,3 99,3	19,3 99,3	19,4 99,3	19,4 99,4	19,4 99,4	19,4 99.4	19,4 99,4	19,4 99,4
3	10,1 34,1	9,55 30,8	9,28 29,5	9,12 28,7	9,01 28,2	8,94 27,9	8,88 27,7	8,84 27,5	8,81 27,3	8,78 27,2	8,76 27,1	8.74 27,1
4	7,71 21,2	6,94 18	6,59 16,7	6,39 16	6,26 15,5	6,16 15,2	6,09 15	6,04 14,8	6 14,7	5,96 14,5	5,93 14,5	5.91 14.4
5	6,61 16,3	5,79 13,3	5,41 12,1	5,19 11,4	5,05 11	4,95 10,7	4,88 10,5	4,82 10,3	4,78 10,2	4,74 10,1	4,7 9,96	4,68 9,89
6	5,99 13,7	5,14 10,9	4,76 9,78	4,53 9,15	4,39 8,75	4,28 8,47	4,21 8,26	4,15 8,1	4,1 7,98	4,06 7,87	4,03 7,79	4 7,72
7	5,59 12,3	4,74 9,55	4,35 8,45	4,12 7,85	3,97 7,46	3,87 7,19	3,79 7	3,73 6,84	3,68 6,71	3,63 6,62	3,6 6,54	3,57 6,47

8	5,62 11,3	4,46 8,65	4,07 7,59	3,84 7,01	3,69 6,63	3,58 6,37	3,5 6,19	3,44 6,03	3,39 5,91	3,34 5,82	3,31 5,74	3,28 5,67
9	5,12 10,6	4,26 8,02	3,86 6,99	3,63 6,42	3,48 6,06	3,37 5,8	3,29 5,62	3,23 5,47	3,18 5,35	3,13 5,26	3,1 5,18	3,07 5,11
10	4,96 10	4,1 7,56	3,71 6,55	3,48 5,99	3,33 5,64	3,22 5,39	3,14 5,21	3,07 5,06	3,02 4,95	2,97 4,85	2,94 4,78	2,91 4,71
11	4,84 9,85	3,98 7,2	3,59 6,22	3,36 5,67	3,2 5,32	3,09 5,07	3,01 4,88	2,95 4,74	2,9 4,63	2,86 4,54	2,82 4,46	2,79 4,4
12	4,75 9,33	3,88 6,93	3,49 5,95	3,26 5,41	3,11 5,06	3 4,82	2,92 4,65	2,85 4,5	2,8 4,39	2,76 4,3	2,72 4,22	2,69 4,16
13	4,67 9,07	3,8 6,7	3,41 5,74	3,18 5,2	3,02 4,86	2,92 4,62	2,84 4,44	2,77 4,3	2,72 4,19	2,67 4,1	2,63 4,02	2,6 3,96
14	4,6 8,86	3,74 6,51	3,34 5,56	3,11 5,03	2,96 4,69	2,85 4,46	2,77 4,28	2,7 4,14	2,65 4,03	2,6 3,94	2,56 3,86	2,53 3,8
15	4,54 8,68	3,68 6,36	3,29 5,42	3,06 4,89	2,9 4,56	2,79 4,32	2,7 4,14	2,64 4	2,59 3,89	2,55 3,8	2,51 3,73	2,48 3,67
16	4,49 8,53	3,63 6,23	3,24 5,29	3,01 4,77	2,85 4,44	2,74 4,2	2,66 4,03	2,59 3,89	2,54 3,78	2,49 3,69	2,45 3,61	2,42 3,55
17	4,45 8,4	3,59 6,11	3,2 5,18	2,96 4,67	2,81 4,34	2,7 4,1	2,62 3,93	2,55 3,79	2,5 3,68	2,45 3,59	2,41 3,52	2,38 3,45

Продовження дод. 7

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	4,41 8,28	3,55 6,01	3,16 5,09	2,93 4,58	2,77 4,25	2,66 4,01	2,58 3,85	2,51 3,71	2,46 3,6	2,41 3,51	2,37 3,44	2,34 3,37
19	4,38 8,18	3,52 5,93	3,13 5,01	2,9 4,5	2,74 4,17	2,63 3,94	2,55 3,77	2,48 3,63	2,43 3,52	2,38 3,43	2,34 3,36	2,31 3,3
20	4,35 8,1	3,49 5,85	3,1 4,94	2,87 4,43	2,71 4,1	2,6 3,87	2,52 3,71	2,45 3,56	2,4 3,45	2,35 3,37	2,31 3,3	2,28 3,23
21	4,32 8,02	3,47 5,78	3,07 4,87	2,84 4,37	2,68 4,04	2,57 3,81	2,49 3,65	2,42 3,51	2,37 3,4	2,32 3,31	2,28 3,24	2,25 3,17
22	4,3 7,94	3,44 5,72	3,05 4,82	2,82 4,31	2,66 3,99	2,55 3,76	2,47 3,59	2,4 3,45	2,35 3,35	2,3 3,26	2,26 3,18	2,23 3,12
23	4,28 7,88	3,42 5,66	3,03 4,76	2,8 4,26	2,64 3,94	2,53 3,71	2,45 3,54	2,38 3,41	2,32 3,3	2,28 3,21	2,24 3,14	2,2 3,07
24	4,26 7,82	3,4 5,61	3,01 4,72	2,78 4,22	2,62 3,9	2,51 3,67	2,43 3,5	2,36 3,36	2,3 3,25	2,26 3,17	2,22 3,09	2,18 3,03
25	4,24 7,77	3,38 5,57	2,99 4,68	2,76 4,18	2,6 3,86	2,49 3,63	2,41 3,46	2,34 3,32	2,28 3,21	2,24 3,13	2,2 3,05	2,16 2,99
26	4,22 7,72	3,37 5,53	2,98 4,64	2,74 4,14	2,59 3,82	2,47 3,59	2,39 3,42	2,32 3,29	2,27 3,17	2,22 3,09	2,18 3,02	2,15 2,96

27	4,21 7,68	3,35 5,49	2,96 4,6	2,73 4,11	2,57 3,79	2,46 3,56	2,37 3,39	2,3 3,26	2,25 3,14	2,2 3,06	2,16 2,98	2,13 2,93
28	4,2 7,84	3,34 5,45	2,95 4,57	2,71 4,07	2,56 3,76	2,44 3,53	2,36 3,36	2,29 3,23	2,24 3,11	2,19 3,03	2,15 2,95	2,12 2,9
29	4,18 7,6	3,33 5,42	2,93 4,54	2,7 4,04	2,54 3,73	2,43 3,5	2,35 3,33	2,28 3,2	2,22 3,08	2,18 3	2,14 2,92	2,1 2,87
30	4,17 7,56	3,32 5,39	2,92 4,51	2,69 4,02	2,53 3,7	2,42 3,47	2,34 3,3	2,27 3,17	2,21 3,06	2,16 2,98	2,12 2,9	2,09 2,84
32	4,15 7,5	3,3 5,34	2,9 4,46	2,67 3,97	2,51 3,66	2,4 3,42	2,32 3,25	2,25 3,12	2,19 3,01	2,14 2,94	2,1 2,86	2,07 2,8
34	4,13 7,44	3,28 5,29	2,88 4,42	2,65 3,93	2,49 3,61	2,38 3,38	2,3 3,21	2,23 3,08	2,17 2,97	2,12 2,89	2,08 2,82	2,05 2,76
36	4,11 7,39	3,26 5,25	2,86 4,38	2,63 3,89	2,48 3,58	2,36 3,35	2,28 3,18	2,21 3,04	2,15 2,94	2,1 2,86	2,06 2,78	2,03 2,72
38	4,1 7,35	3,25 5,21	2,85 4,34	2,62 3,86	2,46 3,54	2,35 3,32	2,26 3,15	2,19 3,02	2,14 2,91	2,09 2,82	2,05 2,75	2,02 2,69
40	4,08 7,31	3,23 3,18	2,84 4,31	2,61 3,83	2,45 3,51	2,34 3,29	2,25 3,12	2,18 2,99	2,12 2,88	2,07 2,8	2,04 2,73	2 2,66
42	4,07 7,27	3,22 5,15	2,83 4,29	2,59 3,8	2,44 3,49	2,32 3,26	2,24 3,1	2,17 2,96	2,11 2,86	2,06 2,77	2,02 2,7	1,99 2,64

Продовження дод. 7

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,1	2,05	2,01	1,98
	7,24	5,12	4,26	3,78	3,46	3,24	3,07	2,94	2,84	2,75	2,68	2,62
46	4,05	3,2	2,81	2,57	2,42	2,3	2,22	2,14	2,09	2,04	2	1,97
	7,21	5,1	4,24	3,76	3,44	3,22	3,05	2,92	2,82	2,73	2,66	2,6
48	4,04	3,19	2,8	2,56	2,41	2,3	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96
	7,19	5,08	4,22	3,74	3,42	3,2	3,04	2,9	2,8	2,71	2,64	2,58
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,4	2,29	2,2	2,13	2,07	2,02	1,98	1,95
	7,17	5,06	4,2	3,72	3,41	3,18	3,02	2,88	2,78	2,7	2,62	2,56
55	4,02	3,17	2,78	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,05	2	1,97	1,93
	7,12	5,01	4,16	3,68	3,37	3,15	2,98	2,85	2,75	2,66	2,59	2,53
60	4	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,1	2,04	1,99	1,95	1,92
	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,5
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,02	1,98	1,94	1,9
	7,04	4,95	4,1	3,62	3,31	3,09	2,93	2,79	2,7	2,61	2,54	2,47

70	3,98	3,13	2,74	2,5	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97	1,93	1,89
	7,01	4,92	4,08	3,6	3,29	3,07	2,91	2,77	2,67	2,59	2,51	2,45
80	3,96	3,11	2,72	2,48	2,33	2,21	2,12	2,05	1,99	1,95	1,91	1,89
	6,96	4,88	4,04	3,56	3,25	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,41
100	3,94	3,09	2,7	2,46	2,3	2,19	2,1	2,03	1,97	1,92	1,88	1,85
	6,9	4,82	3,98	3,51	3,2	2,99	2,82	2,69	2,59	2,51	2,43	2,36
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,2	2,17	2,08	2,01	1,95	1,9	1,86	1,83
	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,79	2,65	2,56	2,47	2,4	2,33
150	3,91	3,06	2,67	2,43	2,27	2,16	2,07	2	1,94	1,89	1,85	1,82
	6,81	4,75	3,91	3,41	3,14	2,92	2,76	2,62	2,53	2,44	2,37	2,3
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,83	1,8
	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,9	2,73	2,6	2,5	2,41	2,34	2,28
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,9	1,85	1,81	1,78
	6,7	4,66	3,83	3,36	3,06	2,85	2,69	2,55	2,46	2,37	2,29	2,23
1000	3,85	3	2,61	2,38	2,22	2,1	2,02	1,95	1,89	1,84	1,8	1,76
	6,66	4,62	3,8	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,26	2,2
∞	3,84	2,99	2,6	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75
	6,64	4,6	3,78	3,32	3,02	2,8	2,64	2,51	2,41	2,32	2,24	2,18

Продовження дод. 7

k_2 \ k_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	245 6142	246 6169	248 6208	249 6234	250 6258	251 6286	252 6302	253 6323	253 6334	254 6352	254 6361	254 6366
2	19,4 99,4	19,4 99,4	19,4 99,5	19,5 99,5	19,5 99,5	19,5 99,5	19,5 99,5	19,5 99,5	19,5 99,5	19,5 99,5	19,5 99,5	19,5 99,5
3	5,87 14,2	8,69 26,8	8,66 26,7	8,64 26,6	8,62 26,5	8,6 26,4	8,58 26,4	8,57 26,3	8,56 26,2	8,54 26,2	8,54 26,1	8,53 26,1
4	4,64 9,77	5,84 14,2	5,8 14	5,77 13,9	5,74 13,8	5,71 13,7	5,7 13,7	5,68 13,6	5,66 13,6	5,65 13,5	5,64 13,5	5,63 13,5
5	3,96 7,6	4,6 9,68	4,56 9,55	4,53 9,47	4,5 9,38	4,46 9,29	4,44 9,24	4,42 9,17	4,4 9,13	4,38 9,07	4,37 9,04	4,36 9,02
6	3,52 6,35	3,92 7,52	3,87 7,39	3,84 7,31	3,81 7,23	3,77 7,14	3,75 7,09	3,72 7,02	3,71 6,99	3,69 6,94	3,68 6,9	3,67 6,88
7	3,23 5,56	3,49 6,27	3,44 6,15	3,41 6,07	3,38 5,98	3,34 5,9	3,32 5,85	3,29 5,78	3,28 5,75	3,25 5,7	3,24 5,67	3,23 5,65
8	3,02 5	3,2 5,48	3,15 5,36	3,12 5,28	3,08 5,2	3,05 5,11	3,03 5,06	3 5	2,98 4,96	2,96 4,91	2,94 4,88	2,93 4,86

9	2,86 4,6	2,98 4,92	2,93 4,8	2,9 4,73	2,86 4,64	2,82 4,56	2,8 4,51	2,77 4,45	2,76 4,41	2,73 4,36	2.72 4,33	2,71 4,31
10	2,74 4,29	2,82 4,52	2,77 4,41	2,74 4,33	2,7 4,25	2,67 4,17	2,64 4,12	2,61 4,05	2,59 4,01	2,56 3,96	2,55 3,93	2,54 3,91
11	2,64 4,05	2,7 4,21	2,65 4,1	2,61 4,02	2,57 3,94	2,53 3,86	2,5 3,8	2,47 3,74	2,45 3,7	2,42 3,66	2,41 3,62	2,4 3,6
12	2,55 3,85	2,6 3,98	2,54 3,86	2,5 3,78	2,46 3,7	2,42 3,61	2,4 3,56	2,36 3,49	2,35 3,46	2,32 5,41	2,31 3,38	2,3 3,36
13	2,48 3,7	2,51 3,78	2,46 3,67	2,42 3,59	2,38 3,51	2,34 3,42	2,32 3,37	2,28 3,3	2,26 3,27	2,24 3,21	2,22 3,18	2,21 3,16
14	2,43 3,56	2,44 3,62	2,39 3,51	2,35 3,43	2,31 3,34	2,27 3,26	2,24 3,21	2,21 3,14	2,19 3,11	2,16 3,06	2,14 3,02	2,13 3
15	2,37 3,45	2,39 3,48	2,33 3,36	2,29 3,29	2,25 3,2	2,21 3,12	2,18 3,07	2,15 3	2,12 2,97	2,1 2,92	2,08 2,89	2,07 2,87
16	2,33 3,35	2,33 3,37	2,28 3,35	2,24 3,18	2,2 3,1	2,16 3,01	2,13 2,96	2,09 2,89	2,07 2,86	2,04 2,8	2,02 2,77	2,01 2,75
17	2,29 3,27	2,29 3,37	2,23 3,16	2,19 3,08	2,15 3	2,11 2,92	2,08 2,86	2,04 2,79	2,02 2,76	1,99 2,7	1,97 2,67	1,96 2,65
18	2,26 3,19	2,25 3,19	2,19 3,07	2,15 3	2,11 2,91	2,07 2,83	2,04 2,78	2 2,71	1,98 2,68	1,95 2,62	1,93 2,59	1,92 2,57

Продовження дод. 7

k_2 \ k_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
19	2,23	2,21	2,15	2,11	2,07	2,02	2	1,96	1,94	1,91	1,9	1,88
	3,13	3,12	3	2,92	2,84	2,76	2,7	2,63	2,6	2,54	2,51	2,49
20	2,2	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,96	1,92	1,9	1,87	1,85	1,84
	3,07	3,05	2,94	2,96	2,77	2,69	2,63	2,56	2,53	2,47	2,44	2,42
21	2,18	2,15	2,09	2,05	2	1,96	1,93	1,89	1,87	1,84	1,82	1,81
	3,02	2,99	2,88	2,8	2,72	2,63	2,58	2,51	2,47	2,42	2,38	2,36
22	2,14	2,13	2,07	2,03	1,98	1,93	1,91	1,87	1,84	1,81	1,8	1,78
	2,97	2,94	2,83	2,75	2,67	2,58	2,53	2,46	2,42	2,37	2,33	2,31
23	2,13	2,1	2,04	2	1,96	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79	1,77	1,76
	2,93	2,89	2,78	2,7	2,62	2,53	2,48	2,41	2,37	2,32	2,28	2,26
24	2,11	2,09	2,02	1,98	1,94	1,89	1,86	1,82	1,8	1,76	1,74	1,73
	2,89	2,85	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,36	2,33	2,27	2,23	2,21
25	2,1	2,06	2	1,96	1,92	1,87	1,84	1,8	1,77	1,74	1,72	1,71
	2,86	2,81	2,7	2,62	2,54	2,45	2,4	2,32	2,29	2,23	2,19	2,17
26	2,08	2,05	1,99	1,95	1,9	1,85	1,82	1,78	1,76	1,72	1,7	1,69
	2,83	2,77	2,66	2,58	2,5	2,41	2,36	2,28	2,25	2,19	2,15	2,13

27	2,06 2,8	2,03 2,74	1,97 2,63	1,93 2,55	1,88 2,47	1,84 2,38	1,8 2,33	1,76 2,25	1,74 2,21	1,71 2,16	1,68 2,12	1,67 2,1
28	2,05 2,77	2,02 2,71	1,96 2,6	1,91 2,52	1,87 2,44	1,81 2,35	1,78 2,3	1,75 2,22	1,72 2,18	1,69 2,13	1,67 2,09	1,65 2,06
29	2,04 2,74	2 2,68	1,94 2,57	1,9 2,49	1,85 2,41	1,8 2,32	1,77 2,27	1,73 2,19	1,71 2,15	1,68 2,1	1,65 2,06	1,64 2,03
30	2,02 2,7	1,99 2,66	1,93 2,55	1,89 2,47	1,84 2,83	1,79 2,29	1,76 2,24	1,72 2,16	1,69 2,13	1,66 2,07	1,64 2,03	1,62 2,01
32	2 2,66	1,97 2,62	1,91 2,51	1,86 2,42	1,82 2,34	1,76 2,25	1,74 2,2	1,69 2,12	1,67 2,08	1,64 2,02	1,61 1,98	1,59 1,96
34	1,98 2,62	1,95 2,58	1,89 2,47	1,84 2,38	1,8 2,3	1,74 2,21	1,71 2,15	1,67 2,08	1,64 2,04	1,61 1,98	1,59 1,94	1,57 1,91
36	1,96 2,59	1,93 2,54	1,87 2,43	1,82 2,35	1,78 2,26	1,72 2,17	1,69 2,12	1,65 2,04	1,62 2	1,59 1,94	1,56 1,9	1,55 1,87
38	1,95 2,56	1,92 2,51	1,85 2,4	1,8 2,32	1,76 2,22	1,71 2,14	1,67 2,08	1,63 2	1,6 1,97	1,57 1,9	1,54 1,86	1,53 1,84
40	1,94 2,54	1,9 2,49	1,84 2,37	1,79 2,29	1,74 2,2	1,69 2,11	1,66 2,05	1,61 1,97	1,59 1,94	1,55 1,88	1,53 1,84	1,51 1,81
42	1,92 2,52	1,89 2,46	1,82 2,35	1,78 2,26	1,73 2,17	1,68 2,08	1,64 2,02	1,6 1,94	1,57 1,91	1,54 1,85	1,51 1,8	1,49 1,78

Закінчення дод. 7

k_2 \ k_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
44	1,91 2,5	1,88 2,44	1,81 2,32	1,76 2,24	1,72 2,15	1,66 2,06	1,63 2	1,58 1,92	1,56 1,88	1,52 1,82	1,5 1,78	1,48 1,75
46	1,9 2,48	1,87 2,42	1,8 2,3	1,75 2,22	1,71 2,13	1,65 2,04	1,62 1,98	1,57 1,9	1,54 1,86	1,51 1,8	1,48 1,76	1,46 1,72
48	1,9 2,46	1,86 2,4	1,79 2,28	1,74 2,2	1,7 2,11	1,64 2,02	1,61 1,96	156 1,88	1,53 1,84	1,5 1,78	1,47 1,73	1,45 1,7
50	1,88 2,43	1,5 2,39	1,78 2,26	1,74 2,18	1,69 2,1	1,63 2	1,6 1,94	1,55 1,86	1,52 1,82	1,48 1,76	1,46 1,71	1,44 1,68
55	1,86 2,4	1,83 2,35	1,76 2,23	1,72 2,15	1,67 2,06	1,61 1,96	1,58 1,89	1,52 1,82	1,5 1,78	1,46 1,71	1,43 1,66	1,41 1,64
60	1,85 2,37	1,81 2,32	1,75 2,2	1,7 2,12	1,65 2,03	1,59 1,93	1,56 1,87	1,5 1,79	1,48 1,74	1,44 1,68	1,41 1,63	1,39 1,6
65	1,84 2,35	1,8 2,3	1,73 2,18	1,68 2,09	1,63 2	1,57 1,9	1,54 1,84	1,49 1,76	1,46 1,71	1,42 1,64	1,39 1,6	1,37 1,56

70	1,82 2,32	1,79 2,28	1,72 2,15	1,67 2,07	1,62 1,98	1,56 1,88	1,53 1,82	1,47 1,74	1,45 1,69	1,4 1,62	1,37 1,56	1,35 1,53
80	1,79 2,26	1,77 2,24	1,7 2,11	1,65 2,03	1,6 1,94	1,54 1,84	1,51 1,78	1,45 1,7	1,42 1,65	1,38 1,57	1,35 1,52	1,32 1,49
100	1,77 2,23	1,75 2,19	1,68 2,06	1,63 1,98	1,57 1,89	1,51 1,79	1,48 1,73	1,42 1,64	1,39 1,59	1,34 1,51	1,3 1,46	1,28 1,43
125	1,76 2,2	1,72 2,15	1,65 2,03	1,6 1,94	1,55 1,85	1,49 1,75	1,45 1,68	1,39 1,59	1,36 1,54	1,31 1,46	1,27 1,4	1,25 1,37
150	1,74 2,17	1,71 2,12	1,64 2	1,59 1,91	1,54 1,83	1,47 1,72	1,44 1,66	1,37 1,56	1,34 1,51	1,29 1,43	1,25 1,37	1,22 1,33
200	1,74 2,17	1,69 2,09	1,62 1,97	1,57 1,88	1,52 1,79	1,45 1,69	1,42 1,62	1,35 1,53	1,32 1,48	1,26 1,39	1,22 1,33	1,19 1,28
400	1,72 2,12	1,67 2,04	1,6 1,92	1,54 1,84	1,49 1,74	1,42 1,64	1,38 1,57	1,32 1,47	1,28 1,42	1,22 1,32	1,16 1,24	1,13 1,19
1000	1,7 2,09	1,65 2,01	1,58 1,89	1,53 1,81	1,47 1,71	1,41 1,61	1,36 1,54	1,3 1,44	1,26 1,38	1,19 1,28	1,13 1,19	1,08 1,11
∞	1,69 2,07	1,64 1,99	1,57 1,87	1,52 1,79	1,46 1,69	1,4 1,59	1,35 1,52	1,28 1,41	1,24 1,36	1,17 1,25	1,11 1,15	1 1,09

Додаток 8

Ймовірності $P(\lambda) = K(\lambda)$ розподілу Колмогорова

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0013	0,0019
0,4	0,0028	0,0040	0,0055	0,0074	0,0097	0,0126	0,0160	0,0200	0,0247	0,0300
0,5	0,0361	0,0428	0,0503	0,0585	0,0675	0,0772	0,0876	0,0987	0,1104	0,1228
0,6	0,1357	0,1492	0,1633	0,1778	0,1927	0,2080	0,2236	0,2396	0,2558	0,2722
0,7	0,2888	0,3055	0,3223	0,3391	0,3560	0,3728	0,3896	0,4064	0,4230	0,4395
0,8	0,4559	0,4720	0,4880	0,5038	0,5194	0,5347	0,5497	0,5645	0,5791	0,5933
0,9	0,6073	0,6209	0,6343	0,6473	0,6601	0,6725	0,6846	0,6964	0,7079	0,7191
1,0	0,7300	0,7406	0,7508	0,7608	0,7704	0,7798	0,7889	0,7976	0,8061	0,8143
1,1	0,8223	0,8300	0,8374	0,8445	0,8514	0,8580	0,8644	0,8706	0,8765	0,8823
1,2	0,8878	0,8930	0,8981	0,9030	0,9076	0,9121	0,9164	0,9206	0,9245	0,9283
1,3	0,9319	0,9354	0,9387	0,9418	0,9449	0,9478	0,9505	0,9531	0,9557	0,9580
1,4	0,9603	0,9625	0,9646	0,9665	0,9684	0,9702	0,9718	0,9734	0,9750	0,9764
1,5	0,9778	0,9791	0,9803	0,9815	0,9826	0,9836	0,9846	0,9855	0,9864	0,9873
1,6	0,9880	0,9888	0,9895	0,9902	0,9908	0,9914	0,9919	0,9924	0,9929	0,9934
1,7	0,9938	0,9942	0,9946	0,9950	0,9953	0,9956	0,9959	0,9962	0,9965	0,9967
1,8	0,9969	0,9971	0,9973	0,9975	0,9977	0,9979	0,9980	0,9982	0,9983	0,9984
1,9	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9991	0,9991	0,9992	0,9993
2,0	0,9993	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
2,1	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
2,2	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
2,3	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

ЗМІСТ