

**Міністерство освіти і науки України
Запорізька державна інженерна академія**



О.О. Кісарін

**МОДЕЛЮВАННЯ МЕДИКО-
БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ**

**Методичні вказівки
по виконанню контрольних робіт**

*для студентів ЗДІА
спеціальності 09.0804 «Фізична і біомедична електроніка»*

**Запоріжжя
2006**

Міністерство освіти і науки України
Запорізька державна інженерна академія

Кісарін О.О.

МОДЕЛЮВАННЯ МЕДИКО- БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ

**Методичні вказівки
по виконанню контрольних робіт**

для студентів спеціальності 09.0804
«Фізична і біомедична електроніка»

*Рекомендовано до видання
на засіданні кафедри ФБМЕ
протокол №1 від 30.08.2006р.*

**Запоріжжя
2006**

Моделювання медико-біологічних систем. Методичні вказівки по виконанню контрольних робіт для студентів спеціальності 09.0804 «Фізична і біомедична електроніка» / Сост.: Кісарін О.О. - Запоріжжя: Вид-во ЗДІА, 2006. - 25с.

Укладач: *Кісарін О.А., канд. техн. наук, доцент.*

Відповідальний за випуск – *зав. каф. ФБМЕ, професор Швець Є.Я.*

ЗМІСТ

ВВЕДЕННЯ.....	4
1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	4
1.1. Метод ізоклин	8
1.2. Метод якісної теорії диференціальних рівнянь А.М.Ляпунова.....	11
2. ПРИКЛАД ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ СИСТЕМИ.....	20
3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ.....	23
ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	25

ВВЕДЕННЯ

Моделювання є методом дослідження найрізноманітніших процесів і систем шляхом їх спрощеного уявлення у вигляді макету, копії, графічної або логічної схеми, системи або диференціальної рівнянь, алгебри. Будь-яка модель завжди є наближеною і не повною мірою відповідає реальному об'єкту. Не дивлячись на це, модель дозволяє досліджувати багато процесів, у тому числі і не доступні для експериментального відтворення.

Математичне моделювання в біології і медицині розвивається вельми бурхливо. Перші розробки математичних моделей медико-біологічних процесів і систем належать Лотку (1910-1920 рр.), Вольтерра (1928 р.), Ван-дер-Полю, Т'юрингу (1952 р.), Рашевському. Зараз цьому напрямку досліджень присвячені щорічно десятки наукових публікацій як зарубежом, так і в нашій країні.

Практичним додатком цих досліджень є використання одержаних рекомендацій в інженерній мікробіології при створенні нових лікарських препаратів, в медицині при діагностуванні і прогнозуванні протікання різних захворювань і т.д. Отримані результати знаходять застосування при дослідженні динаміки процесів в інших, далеких від медицини і біології, областях знання, наприклад, в економіці, соціології, екології і ін.

У справжній роботі викладені методичні вказівки по виконанню контрольних робіт по курсу "Моделювання медико-біологічних систем". Контрольні роботи присвячені завданню дослідження динаміки поведінки системи, що описується рівнянням диференціальними лінійними другого порядку з використанням методів ізоклин і якісної теорії А.М.Ляпунова.

Автор виражає подяку старшому лаборанту кафедри фізичної і біомедичної електроніки О. В. Стадніченко за надану допомогу при підготовці рукопису.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Математичне дослідження детермінованої моделі медико-біологічної системи часто зводиться до дослідження системи звичайних диференціальних рівнянь. Найцікавіші результати по моделюванню біологічних систем були отримані на моделях з двох диференціальних рівнянь, які допускають якісне дослідження за допомогою методу фазової площини. Розглянемо систему двох автономних звичайних диференціальних рівнянь загального вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, y)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

де $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – безперервні функції, що визначені в деякій області G евклідової площини (x, y – декартові координати) і мають в цій області безперервні похідні порядку не нижче за перше.

Область G може бути як необмеженою, так і обмеженою. Якщо змінні x, y мають конкретний біологічний сенс (концентрації речовин, чисельності видів) найчастіше область G є позитивним квадрантом правої напівплощини: $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y < \infty$.

Концентрації речовин або чисельності видів також можуть бути обмежені зверху об'ємом судини або площею ареалу незаселеного. Тоді область значень змінних має вигляд: $0 \leq x < x_0$, $0 \leq y < y_0$.

Змінні x, y у часі змінюються відповідно до системи рівнянь (1.1), так що кожному стану системи відповідає пара значень змінних (x, y) .

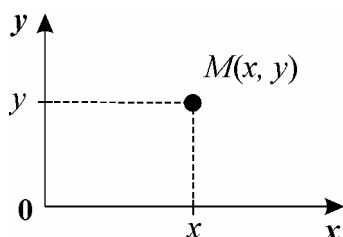


Рисунок 1.1 – Точка, що зображає, на фазовій площині. Назад, кожній парі змінних (x, y) відповідає певний стан системи.

Розглянемо площину з осями координат, на яких відкладені значення змінних x, y . Кожна точка M цієї площини відповідає певному стану системи. Така площина носить назву фазової площини і зображає сукупність всіх станів системи. Точка $M(x, y)$ називається крапкою, що зображає або представляючою.

Хай в початковий момент часу $t=t_0$ координати точки $M_0(x(t_0), y(t_0))$, що зображає. У кожен наступний момент часу t крапка, що зображає, зміщуватиметься відповідно до змін значень змінних $x(t), y(t)$. Сукупність точок $M(x(t), y(t))$ на фазовій площині, положення яких відповідає станам системи в процесі зміни в часі змінних $x(t), y(t)$ згідно рівнянням (1.1), називається фазовою траєкторією.

Сукупність фазових траєкторій при різних початкових значеннях змінних дає легко осяжний "портрет" системи. Побудова фазового портрета дозволяє зробити висновки про характер змін змінних x, y без знання аналітичних рішень початкової системи рівнянь (1.1).

Для зображення фазового портрета необхідно побудувати векторне поле напрямів траєкторій системи в кожній точці фазової площини. Задаючи приріст $\Delta t > 0$, одержимо відповідні прирости Δx і Δy з виразів:

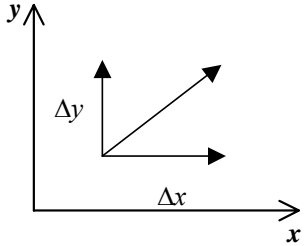
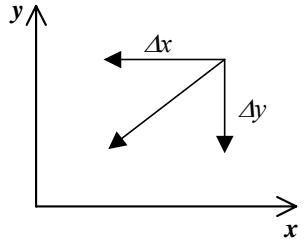
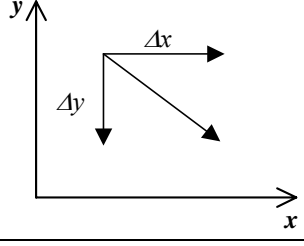
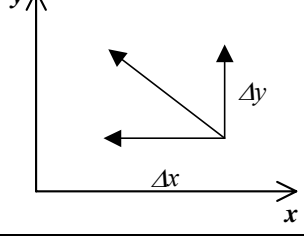
$$\Delta x = P(x, y) \Delta t,$$

$$\Delta y = Q(x, y) \Delta t.$$

Напрямок вектора dy/dx в точці (x, y) залежить від знаку функцій $P(x, y)$, $Q(x, y)$ і може бути задано таблицею (див. табл. 1.1):

Направление вектора dy/dx в точке (x, y)

Таблиця 1.1

$P(x,y)>0, Q(x,y)>0$	
$P(x,y)<0, Q(x,y)<0$	
$P(x,y)>0, Q(x,y)<0$	
$P(x,y)<0, Q(x,y)>0$	

Завдання побудови векторного поля спрощується, якщо одержати вираз для фазових траєкторій в аналітичному вигляді. Для цього розділимо друге з рівнянь системи (1.1) на перше:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \quad (1.2)$$

Рішення цього рівняння $y = y(x, c)$, або в неявному вигляді $F(x,y)=c$, де c – постійна інтеграції, дає сімейство інтегральних кривих рівняння (1.2) – фазових траєкторій системи (1.1) на площині x, y .

1.1. Метод ізоклин

Для побудови фазового портрета користуються методом ізоклин – на фазовій площині наносять лінії, які перетинають інтегральні криві під одним певним кутом. Рівняння ізоклин легко одержати з (1.2). Покладемо

$$\frac{dx}{dy} = A,$$

де A – певна постійна величина. Значення A є тангенсом кута нахилу дотичної до фазової траєкторії і може приймати значення $-\infty$ до $+\infty$. Підставляючи замість dy/dx в (1.2) величину A одержимо рівняння ізоклин:

$$A = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (1.3)$$

Рівняння (1.3) визначає в кожній точці площини єдину дотичну до відповідної інтегральної кривої за винятком крапки, де $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$, у якій напрям дотичній стає невизначеним, оскільки при цьому стає невизначеним значення похідної:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} = \frac{Q(\bar{x}, \bar{y})}{P(\bar{x}, \bar{y})} = \frac{0}{0}.$$

Ця крапка є точкою перетину всіх ізоклин – **особливою крапкою**. У ній одночасно звертаються в нуль похідні за часом змінних x і y .

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} = P(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} = Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Таким чином, в особливій точці швидкості зміни змінних рівні нулю. Отже, особлива точка диференціальних рівнянь фазових траєкторій (1.2) відповідає стаціонарному стану системи (1.1), а її координати – суть стаціонарні значення змінних x , y .

Особливий інтерес представляють головні ізоклини:

$dy/dx=0, P(x,y)=0$ – ізоклина вертикальних дотичних і

$dy/dx=\infty, Q(x,y)=0$ – ізоклина горизонтальних дотичних.

Побудувавши головні ізоклини і знайшовши точку їх перетину (x,y) , координати якої задовольняють умовам:

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

ми знайдемо тим самим точку перетину всіх ізоклин фазової площини, в якій напрям дотичних до фазових траєкторій невизначено. Це – особлива крапка, яка відповідає стаціонарному стану системи (див. рис. 1.2).

Система (1.1) володіє стількома стаціонарними станами, скільки точок перетину головних ізоклин є на фазовій площині.

Кожна фазова траєкторія відповідає сукупності рухів динамічної системи, що проходять через одні і ті ж стани і відрізняються один від одного тільки початком відліку часу.

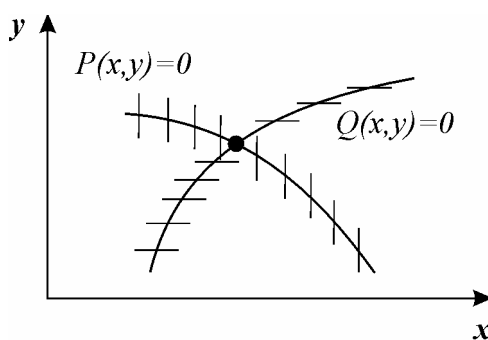


Рисунок 1.2 – Перетин головних ізоклин на фазовій площині

Таким чином, фазові траєкторії системи – це проекції інтегральних кривих в просторі всіх трьох вимірювань x, y, t на площину x, y (рис. 1.3).

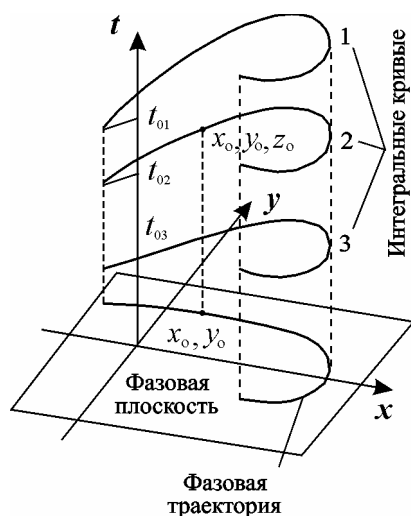


Рисунок.1.3 – Траєкторія системи в просторі (x, y, t)

Якщо умови теореми Коші виконані, то через кожну точку простору x, y, t проходить єдина інтегральна крива. Те ж справедливо, завдяки автономності, для фазових траєкторій: через кожну точку фазової площини проходить єдина фазова траєкторія.

Стійкість стаціонарного стану

Хай система знаходиться в стані рівноваги.

Тоді крапка, що зображає, знаходиться в одній з особливих крапок системи, в яких за визначенням:

$$\frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

Стійка чи ні особлива крапка, визначається тим, піде чи ні крапка, що зображає, при малому відхиленні від стаціонарного стану. Стосовно системи з двох рівнянь визначення стійкості на мові ϵ, δ виглядає таким чином.

Стан рівноваги стійко, якщо для будь-якої заданої області відхилень від стану рівноваги (ϵ) можна вказати область $\delta(\epsilon)$, що оточує стан рівноваги і що володіє тією властивістю, що жодна траєкторія, яка починається усередині області δ , ніколи не досягне межі ϵ (див. рис. 1.4). Інакше стан рівноваги є нестійким.

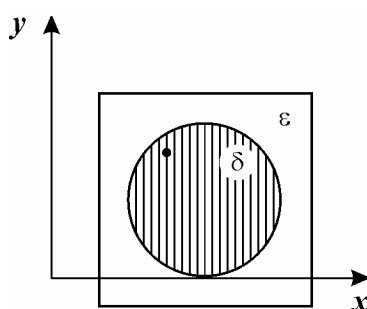


Рисунок 1.4 – Ілюстрація до визначення стійкості області ϵ і δ на площині (x, y)

Для великого класу систем – грубих систем – характер поведінки яких не міняється при малій зміні виду рівнянь, інформацію про тип поведінки в

околиці стаціонарного стану можна одержати, досліджуючи не початкову, а спрощену лінеаризовану систему.

1.2. Метод якісної теорії диференціальних рівнянь А.М.Ляпунова.

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy \quad (1.4)$$

Тут a, b, c, d – константи, x, y - декартові координати на фазовій площині.

Загальне рішення шукатимемо у вигляді:

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t} \quad (1.5)$$

Підставимо ці вирази в (1.4) і скоротимо на $e^{\lambda t}$:

$$\begin{aligned} \lambda A &= aA + bB, \\ \lambda B &= cA + dB. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Система, алгебри рівнянь (1.6), з невідомими A, B має ненульове рішення лише в тому випадку, якщо її визначник, складений з коефіцієнтів при невідомих, рівний нулю:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.6a)$$

Розкриваючи цього визначника, одержимо характеристичне рівняння системи:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (1.7)$$

Рішення цього рівняння дає значення показника $\lambda_{1,2}$, при яких можливі ненульові для A і B вирішення рівняння (1.6). Ці значення рівні:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}{4}} \quad (1.8)$$

Якщо підкорінний вираз негативно, то $\lambda_{1,2}$ комплексно-зв'язані числа. Припустимо, що обидва корені рівняння (1.7) мають відмінні від нуля дійсні частини і що немає кратного коріння. Тоді загальне рішення системи (1.4)

можна представити у вигляді лінійної комбінації експонент з показниками λ_1 , λ_2 :

$$\begin{aligned} x &= c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t}, \\ y &= c_{21}e^{\lambda_1 t} + c_{22}e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для аналізу характеру можливих траєкторій системи на фазовій площині використовуємо лінійне однорідне перетворення координат, яке дозволить привести систему до канонічного вигляду:

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta, \quad (1.10)$$

що допускає зручніше уявлення на фазовій площині в порівнянні з початковою системою (1.4). Введемо нові координати ξ , η по формулах:

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y. \quad (1.11)$$

З курсу лінійної алгебри відомо, що у разі нерівності нулю дійсних частин λ_1 , λ_2 початкову систему (1.4) за допомогою перетворень (1.11) завжди можна перетворити до канонічного вигляду (1.10) і вивчати її поведінку на фазовій площині ξ , η . Розглянемо різні випадки, які можуть тут представитися.

Коріння λ_1 , λ_2 – дійсні і одного знаку

В цьому випадку коефіцієнти перетворення дійсні, ми переходимо від дійсної площини x , y к дійсної площини ξ , η . Розділивши друге з рівнянь (1.10) на перше, одержимо:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_2 \eta}{\lambda_1 \xi}. \quad (1.12)$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо:

$$\eta = c|\xi|^a, \quad (1.13)$$

де

$$a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Умовимося розуміти під λ_2 корінь характеристичного рівняння з великим модулем, що не порушує спільності нашого міркування. Тоді, оскільки в даному випадку коріння λ_1, λ_2 – дійсні і одного знаку, $a > 1$, і ми маємо справу з інтегральними кривими параболічного типу.

Всі інтегральні криві (окрім осі η , якій відповідає $c = \infty$) торкаються на початку координат осі ξ , яка також є інтегральною кривою рівняння (1.11). Початок координат є особливою крапкою.

З'ясуємо тепер напрям рухів крапки, що зображає, уздовж фазових траєкторій. Якщо λ_1, λ_2 – негативні, то, як видно з рівнянь (1.10), $|\xi|, |\eta|$ убувають з часом. Крапка, що зображає, наближається до початку координат, ніколи, проте, не досягаючи його. Інакше це суперечило б теоремі Коші, яка стверджує, що через кожну точку фазової площини проходить лише одна фазова траєкторія.

Така особлива крапка, через яку проходять інтегральні криві, подібно тому, як сімейство парабол $y = cx^a$ ($a > 0$) проходить через початок координат, носить назву вузла (рис. 1.5)

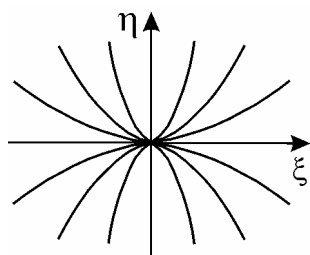


Рисунок 1.5 – Особлива точка типу вузол на площині канонічних координат ξ, η .

Стан рівноваги типу вузол при $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ стійко по Ляпунову, оскільки крапка, що зображає, по всіх інтегральних кривих рухається у напрямку до початку координат. **Ця особлива крапка є стійкий вузол.**

Якщо ж $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, то $|\xi|, |\eta|$ зростають з часом і крапка, що зображає, віддаляється від початку координат. **В цьому випадку особлива крапка - нестійкий вузол.**

На фазовій площині x, y загальний якісний характер поведінки інтегральних кривих збережеться, але дотичні до інтегральних кривих не співпадатимуть з осями координат. Кут нахилу цих дотичних визначатиметься співвідношенням коефіцієнтів $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ у рівняннях (1.11).

Коріння λ_1, λ_2 – дійсні і різних знаків

Перетворення від координат x, y до координат ξ, η знову дійсне. Рівняння для канонічних змінних знову мають вигляд (1.10), але тепер знаки λ_1, λ_2 різні. Рівняння фазових траєкторій має вигляд:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -a \frac{\eta}{\xi}, \quad \text{де } a = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|, \quad (1.14)$$

Інтегруючи (1.14), знаходимо

$$\eta = c |\xi|^{-a}. \quad (1.15)$$

Це рівняння визначає сімейство кривих гіперболічного типу, де обидві осі координат – асимптоти (при $a=1$ ми мали б сімейство рівнобочних гіпербол). Осі координат і в цьому випадку є інтегральними кривими – це будуть єдині інтегральні криві, що проходять через початок координат. Кожна з них складається з трьох фазових траєкторій: з двох рухів до стану рівноваги (або від стану рівноваги) і із стану рівноваги. Вся решта інтегральних кривих – є гіперболи, що не проходять через початок координат (рис. 1.6). **Така особлива крапка носить назву «сідло».** Аналогічно з буденного життя лінії рівня поблизу гірської сідловини поведуться подібно до фазових траєкторій в околиці сідла.

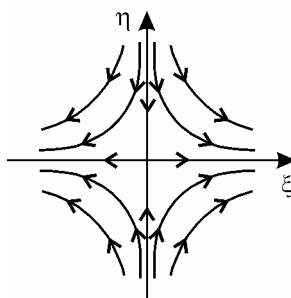


Рисунок 1.6 – Особлива точка типу сідло на площині канонічних координат ξ, η .

Розглянемо характер руху крапки, що зображає, по фазових траєкторіях поблизу стану рівноваги. Хай, наприклад, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Тоді крапка, що зображає, поміщена на осі ξ , віддалятиметься від початку координат, а поміщена на осі η – необмежено наблизатиметься до початку координат, не досягаючи його за кінцевий час. Де б не знаходилася крапка, що зображає, в початковий момент (за винятком особливої крапки і крапок на асимптоті $\eta=0$), вона кінець кінцем віддалятиметься від стану рівноваги, навіть якщо на початку вона рухається по одній з інтегральних кривих у напрямку до особливої крапки.

Очевидно, що особлива крапка типу сідла завжди нестійка. Тільки за спеціально вибраних початкових умов на асимптоті $\eta=0$ система наблизатиметься до стану рівноваги. Проте це не суперечить твердженню про нестійкість системи. Якщо вважати, що всі початкові стани системи на фазовій площині рівноімовірні, то вірогідність такого початкового стану, який відповідає руху у напрямку до особливої крапки, рівна нулю. Тому всякий реальний рух видалятиме систему від стану рівноваги. Переходячи назад до координат x, y , ми одержимо ту ж якісну картину характеру руху траєкторій навколо початку координат.

Прикордонним між розглянутими випадками вузла і сідла є випадок, коли один з характеристичних показників, наприклад λ_1 , звертається в нуль, що має місце, коли визначник системи-вираз $ad - bc = 0$ (1.8). В цьому випадку коефіцієнти правих частин рівнянь (1.4) пропорційні один одному:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

і система має своїми станами рівноваги всі точки прямої:

$$ax + by = 0.$$

Решта інтегральних кривих є сімейством паралельних прямих з кутовим коефіцієнтом $\chi = c/d$, по яких крапки, що зображають, або наближаються до стану рівноваги, або віддаляються від нього залежно від знаку другого кореня характеристичного рівняння $\lambda_2 = a + d$ (див. рис. 1.7). В цьому випадку координати стану рівноваги залежать від початкового значення змінних.

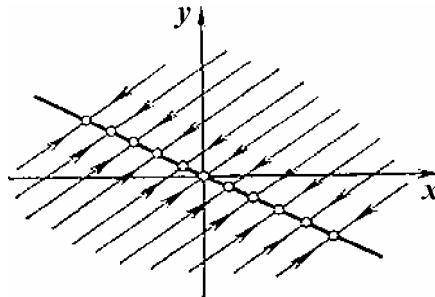


Рисунок 1.7 – Фазовий портрет системи, одне з характеристичного коріння λ_1 якою рівний нулю, а другий λ_2 негативний

Коріння λ_1, λ_2 – комплексні зв'язані

В цьому випадку при дійсних x і y ми матимемо комплексні зв'язані ξ, η (1.10). Проте, вводячи ще одне проміжне перетворення, можна і в цьому випадку звести розгляд до дійсного лінійного однорідного перетворення. Покладемо:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a_1 + ib_1, & \lambda_2 &= a_1 - ib_1, \\ \xi &= u + iv, & \eta &= u - iv, \end{aligned} \quad (1.16)$$

де a, b і u, v – дійсні величини. Можна показати, що перетворення від x, y до u, v є при наших припущеннях дійсним, лінійним, однорідним з детермінантом, відмінним від нуля. Через рівняння (1.10, 1.16) маємо:

$$\frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt} = (a_1 + ib_1)(u + iv),$$

$$\frac{dv}{dt} - i \frac{du}{dt} = (a_1 - ib_1)(u - iv),$$

звідки

$$\frac{du}{dt} = a_1 u - b_1 v,$$

$$\frac{dv}{dt} = a_1 v + b_1 u. \tag{1.17}$$

Розділивши друге з рівнянь на перше, одержимо:

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 v + b_1 u}{a_1 u - b_1 v},$$

яке легше інтегрується, якщо перейти до полярної системи координат (r, φ) . Після підстановки $u = r \cos \varphi, v = r \sin \varphi$ одержимо

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a_1}{b_1 r},$$

звідки:

$$r = C e^{\frac{a}{b} \varphi}. \tag{1.18}$$

Таким чином, на фазовій площині u, v ми маємо справу з сімейством логарифмічних спіралей, кожна з яких має асимптотичну крапку на початку координат. **Особлива крапка, яка є асимптотичною точкою всіх інтегральних кривих, що мають вид спіралей, вкладених один в одного, називається фокусом** (див. рис.1.8).

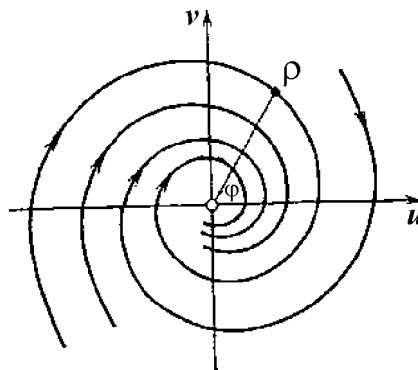


Рисунок 1.8 – Фазовий портрет системи в околиці особливої точки типу фокус на площині координат u, v .

Розглянемо характер руху крапки, що зображає, по фазових траєкторіях. Умножаючи перше з рівнянь (1.17) на u , а друге v і складаючи, одержуємо:

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = a_1 \rho,$$

де $\rho = u^2 + v^2$.

Хай $a_1 < 0$ ($a_1 = \text{Re}\lambda$). Крапка, що зображає, в цьому випадку безперервно наближається до початку координат, не досягаючи його в кінцевий час. Це означає, що фазові траєкторії є спіралями, що скручуються, і відповідають затухаючим коливанням змінних. **Ця особлива крапка – стійкий фокус.**

У разі стійкого фокусу, як і у разі стійкого вузла, виконано не тільки умову Ляпунова, але і жорсткішу вимогу. Саме, при будь-яких початкових відхиленнях система після часу повернеться як завгодно близько до положення рівноваги. **Таку стійкість, при якій початкові відхилення не тільки не наростають, але затухають, прагнучи до нуля, називають абсолютною стійкістю.**

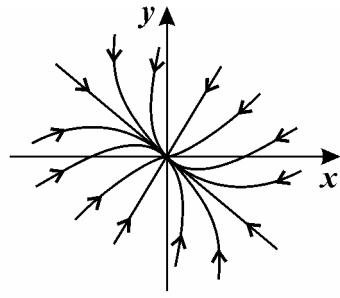
Якщо у формулі (1.18) $a_1 > 0$, то крапка, що зображає, віддаляється від початку координат, і **в цьому випадку** ми маємо справу з нестійким фокусом. При переході від площини u, v до фазової площини x, y у спіралі також залишаться спіралями, проте будуть деформовані.

Розглянемо тепер випадок, коли $a_1 = 0$. Фазовими траєкторіями на площині u, v будуть колу $u^2 + v^2 = \text{const}$, яким на площині x, y відповідають еліпси:

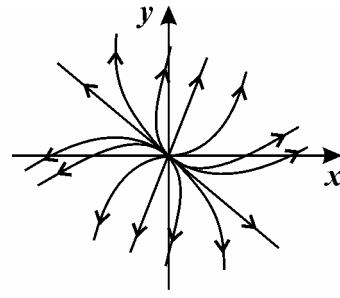
$$bu^2 + (a - d)xy - cx^2 = \text{const}.$$

Таким чином, при $a_1 = 0$ через особливу крапку $x=0, y=0$ не проходить жодна інтегральна крива. Така ізольована особлива крапка, поблизу якої інтегральні криві є замкнутими кривими, зокрема, еліпси, що вкладені один в одного і охоплюють особливу крапку, називається центром.

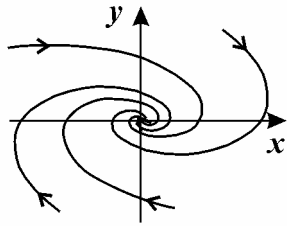
Таким чином, можливі шість типів стану рівноваги залежно від характеру коріння характеристичного рівняння (1.7). Вид фазових траєкторій на площині x, y для цих шести випадків зображений на рис. 1.9.



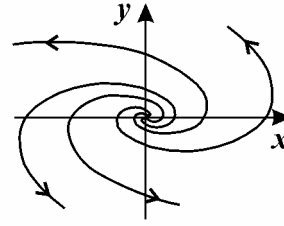
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



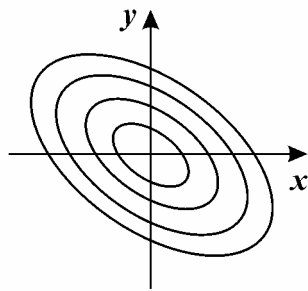
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительны)



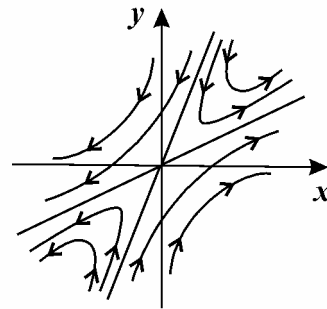
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны,
 $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны,
 $\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)



Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Рисунок 1.9 – Типы фазових портретів в околиці стаціонарного стану для системи лінійних рівнянь (1.4).

Пять типів стану рівноваги **грубі**, їх характер не змінюється при достатньо малих змінах правих частин рівнянь (1.4). При цьому малими повинні бути зміни не тільки правих частин, але і їх похідних першого порядку. Шостий стан рівноваги – центр – **негрубе**. При малих змінах параметрів правої частини рівнянь він переходить в стійкий або нестійкий фокус.

2. ПРИКЛАД ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ СИСТЕМИ.

Припустимо, що модель, що вивчається, описується системою лінійних диференціальних рівнянь другого порядку вигляду (1.4):

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y - 4 \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = 5x + 6y - 37$$

2.1. Знаходимо координати особливих точок на фазовій площині (крапки, в яких днная система знаходиться в рівновазі або спокої). Для цієї мети прирівнюються нулю праві частини системи (2.1), тобто вважається, що рівні нулю похідні від x і y . Виходить система рівнянь, алгебри вигляду:

$$2x - 3y - 4 = 0 \quad (2.2)$$

$$5x + 6y - 37 = 0$$

В результаті рішення цієї системи одержуємо координати однієї особливої точки: $x_0 = 5, y_0 = 2$.

Видно, що особлива крапка розташовується на фазовій площині у першому квадранті ($x > 0, y > 0$).

Всі інтегральні криві перетинаються в цій особливій крапці O .

Система рівнянь (2.2) дозволяє визначити на фазовій площині рівняння вертикальних ізоклин (перше рівняння системи 2.2 – залежність 1) і горизонтальних ізоклин (друге рівняння системи 2.2 – залежність 2) (див. рис. 1.10,а).

Рівняння вертикальних ізоклин має вигляд - $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$,

а горизонтальних - $y = -\frac{5}{6}x + \frac{37}{6}$.

Штрихові відрізки, що перетинають ізоклини, показують напрям, в якому всі інтегральні криві перетинають ізоклини.

2.2. Визначимо стійкість поведінки системи в особливій крапці, застосовуючи метод якісної теорії диференціальних рівнянь А.М.Ляпунова.

Рішення системи диференціальних рівнянь (2.1) знаходитимемо у вигляді:

$$x = Ae^{\lambda_1 t}, \quad y = Be^{\lambda_2 t}$$

де λ_1, λ_2 – коефіцієнти, визначувані рішенням визначника (1.6а), складеного з коефіцієнтів системи рівнянь (2.1);

A і B – коефіцієнти, визначувані з початкових умов: x і y при $t = 0$.

Для цього складається і розв'язується визначник

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Розкриваючи визначника, одержуємо характеристичне рівняння (1.7):

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Його рішення має вигляд (1.8):

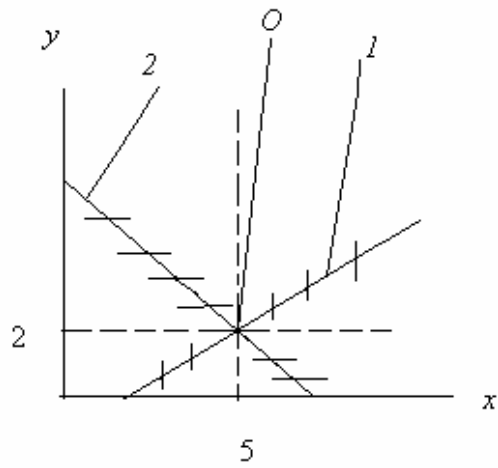
$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}{4}}$$

Підставляючи коефіцієнти початкової системи рівнянь $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$, $d = 6$, одержимо:

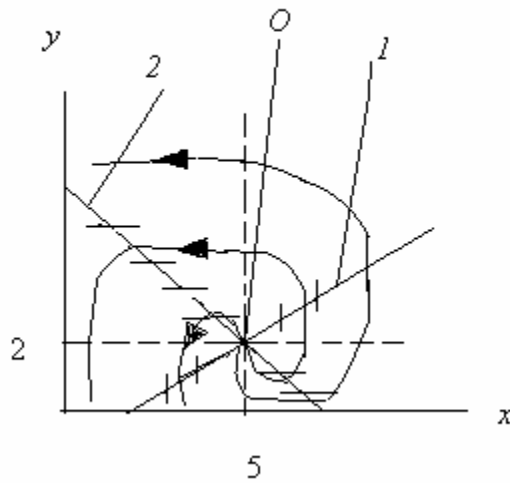
$$\lambda_1 = 4 + 3.3i, \quad \lambda_2 = 4 - 3.3i$$

Аналіз одержаних коефіцієнтів характеристичного рівняння показує, що інтегральні криві або фазові траєкторії, що зображають поведінку в динаміці даної системи на фазовій площині, є нестійким фокусом. Інтегральні криві виходять з особливої крапки O і спрямовуються в нескінченність, тобто дана система є нестійкою.

Фазовий портрет системи представлений на рис. 1.10,б.



а)



б)

Рисунок 1.10 – Побудова фазового портрета системи: а – координати особливої точки і головні ізоклини; б – фазові траєкторії руху системи з особливої крапки.

3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

У завдання контрольної роботи входить дослідження моделі системи, описуваної системою лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. При виконанні контрольної роботи потрібно знайти координати особливої точки системи, визначити головні ізоклини, дослідити систему на стійкість в околиці особливої крапки, визначити тип особливої крапки, зобразити фазовий портрет системи. Варіант контрольної роботи (коефіцієнти рівнянь) пропонується вибрати по номеру Вашого прізвища в списку учбової групи по таблиці 3.1.

Варіанти завдань

Таблиця 3.1

№	a	b	c	d
1	-4	-10	1	-2
2	2	-3	5	6
3	-1	10	1	-2
4	1	-10	2	3
5	1	-3	1	-2
6	-1	1	-10	-1
7	1	1	-1	1
8	5	1	-4	6
9	6	-7	1	-1
10	-1	8	3	-4
11	9	1	7	2
12	-2	1	-1	1
13	-2	1	-2	-1
14	2	-3	5	6
15	-1	3	3	1
16	6	5	1	-1
17	1	1	8	5

продовження таблиці 3.1

18	3	5	9	-3
19	7	3	-5	2
20	2	-5	-1	-1
21	5	0	-4	2
22	7	3	2	-10
23	2	9	-3	2
24	1	2	8	-1
25	7	-5	-3	9
26	-10	9	5	-6
27	9	10	-5	6
28	-9	-10	3	1
29	7	-5	3	-2
30	5	-7	-2	3
31	3	-2	5	-7
32	9	8	7	-6
33	-8	7	-6	5
34	7	-6	4	-3
35	-6	5	-3	4

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика.-М.:Наука,1984.-304с.
2. Моделювання медико-біологічних систем. Конспект лекцій для студентів спеціальності 09.0804 «Фізична та біомедична електроніка» / Сост.: Швець Е.Я., Кисарін О.А., Червоний І.Ф. – Запоріжжя: Вид-во ЗДІА, 2005. - 99с.
3. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления, т.2.- М.: Наука, 1972.-576с.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.Справочник по математике. М.:Наука,1964.-608с.