Т. СААТИ

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Метод анализа иерархий

Перевод с английского
Р. Г. Вачнадзе

Москва «Радио и связь»
1993

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Советскому читателю предлагается перевод книги известного американского ученого Томаса Саати, вышедшей в 1980 г. и переизданной в США в 1988 г. К сожалению, до последнего времени метод анализа иерархий не был в достаточной степени известен у нас в стране. Помимо рассмотренных в дополнении к настоящему изданию работ, отметим здесь публикацию статьи Т. Саати, посвященной методу, в журнале «Техническая кибернетика», № 1, 1979 г., а также фрагментарное изложение метода в книге В. Е. Жуковина – «Многокритериальные модели принятия решений с неопределенностью» (Тбилиси, 1983 г.), в статьях Н. И. Маркозашвили «О применении методики Саати при решении некоторых народнохозяйственных задач» (Тбилиси, 1983 г.) и А. В. Москаева «Ранжирование ограничений в алгоритмах коррекции несобственных задач линейного программирования методом аналитических иерархий» (Калинин, 1987 г.).

В предлагаемое издание наряду с основным материалом книги вошло упомянутое выше дополнение, позволяющее ознакомиться с развитием идей и приложений метода анализа иерархий.

Хотелось бы остановиться на названии метода. По-английски оно звучит Analytic Hierarchy Process. В отдельных библиографических ссылках на русском языке это название переводилось по-разному: «процесс аналитической иерархии», «аналитический иерархический метод» и т. п. Выбор вынесенного в заглавие книги названия обусловлен тем, что оно наиболее точно отражает суть разработанной Т. Саати методологии. Так же назван метод и в вышедшем недавно под редакцией И. А. Ушакова переводе книги Т. Саати и К. Кернса «Аналитическое планирование» (Москва, Радио и связь, 1991).

Следует отметить энтузиазм и большую действенную помощь профессора Саати в процессе перевода книги и отборе материалов к дополнению.

Р. Вачнадзе

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Я был очень обрадован, узнав, что к моей теории по принятию решений – методу анализа иерархий, – проявляют интерес многие советские коллеги ввиду возможности ее широкого применения и привлекательности выдвинутых в ней теоретических идей. Я был счастлив узнать, что мой уважаемый друг Реваз Вачнадзе из Академии наук Грузии переводит мою книгу на русский язык для советского читателя. Это первая из пяти книг, которые я написал на эту тему. Вторая книга в этой серии – популярная, под названием «Принятие решений для руководителей».

Метод анализа иерархий представляется более обоснованным путем решения многокритериальных задач в сложной обстановке с иерархическими структурами, включающими как осязаемые, так и неосязаемые факторы, чем подход, основанный на линейной логике. Применяя дедуктивную логику, исследователи проходят трудный путь построения тщательно осмысленных логических цепей только для того, чтобы в итоге, полагаясь на одну лишь интуицию, объединить различные умозаключения, полученные из этих дедуктивных посылок. Кроме того, подход, основанный на логических цепях, может не привести к наилучшему решению, так как в данном случае может быть потеряна возможность принятия компромиссов между факторами, лежащими в разных цепях логического мышления.

Метод анализа иерархий является замкнутой логической конструкцией, обеспечивающей с помощью простых правил анализ сложных проблем во всем их разнообразии и приводящей к наилучшему ответу. К тому же, применение метода позволяет включить в иерархию все имеющееся у исследователя по рассматриваемой проблеме знание и воображение. Это, с моей точки зрения, является балансированным путем решения трудной проблемы: оставить математику простой и позволить богатству структуры нести бремя сложности. Никакая математика не может заменить человеческий ум и опыт интерпретации реального мира. Независимо от того, насколько сложной может быть математика, она всё же не будет отражать все те элементы в проблеме, которые явно существенны для нас.

Наш метод также позволяет группе людей, взаимодействовать по интересующей их проблеме, модифицировать свои суждения и в результате объединить групповые суждения в соответствии с основным критерием: при проведении попарных сравнений объектов по отношению к некоторой характеристике, или характеристик по отношению к высшей цели, обратные отношения обеспечивают ключ к объединению групповых суждений рациональным образом. Например, если группа должна согласиться с мнением, во сколько раз один камень представляется тяжелее, чем второй, и если решено, что один камень в 5 раз тяжелее, чем второй, то тогда второй должен быть в 1/5 раз тяжелее, чем первый камень. Так как группа состоит из нескольких лиц, каждое из которых может иметь отличающееся от других мнение, выходит, что имеется только один путь объединить эти мнения. Какое-либо суждение применяется только в том случае, если вся группа после детального обсуждения приходит к одному мнению. Часто оказывалось, что по истечении некоторого времени члены группы соглашались иметь общее суждение относительно сравниваемых объектов.

Метод также позволяет рассматривать проблемы конфликтов в группе людей, имеющих общие цели; между конкурирующими организациями и даже между разными странами (с привлечением посредника).

В конфликте между двумя группами каждой группе следует использовать четыре иерархии для оценки как действительной, так и воспринимаемой эффективности и стоимости для обеих сторон. Посреднику следует использовать эти восемь иерархий плюс построить четыре собственных, для того чтобы найти компромисс, сближающий группы. В каждом случае эффективность и стоимость рассматриваются совместно и отношение доходов и издержек берется для оценки относительных преимуществ каждой группы.

Метод недавно применялся при переговорах о свободной торговле между Канадой и Соединенными Штатами, а также для разрешения конфликтов на юге Африки и в Пенджабе.

Надеюсь, что предлагаемая методология оперирования со сложными проблемами даст возможность изыскать пути решения наших проблем и пути понимания перспектив других в нашем густонаселённом мире. С течением времени метод позволит получать более обоснованные решения и привнести большую гармонию и сотрудничество при применении этих решений. Это и было одной из главных моих целей при создании данной теории.

Т. Саати
Питтсбургский университет

ПРЕДИСЛОВИЕ

При принятии управленческих решений и прогнозировании возможных результатов лицо, принимающее решение, обычно сталкивается со сложной системой взаимозависимых компонент (ресурсы, желаемые исходы или цели, лица или группа лиц и т.д.), которую нужно проанализировать. По-видимому, чем глубже человек вникает в эту сложность, тем лучше будут его прогнозы или принимаемые решения. В этой книге излагается теория, применение которой сводит исследование даже очень сложных систем к последовательности попарных сравнений соответствующим образом определенных компонент.

Эта теория начала зарождаться осенью 1971 г., когда я работал над проблемами планирования в непредвиденных обстоятельствах для Министерства обороны США. Становление теории происходило в 1972 г. во время исследований по нормированию электроэнергии для отдельных видов промышленности в соответствии с их вкладом в благосостояние страны, проводимых для Национального научного фонда. Появление шкалы для численной оценки суждений относится к событиям лета 1972 г. в Каире, где я проводил анализ влияния состояния «ни мир, ни война» на экономический, политический и военный статус Египта.

Зрелость для практического приложения теория стала приобретать с исследования под моим руководством транспортной системы Судана в 1973 г. Особенно интенсивно теория развивалась в 1974-1978 гг., когда было много самых разнообразных приложений. В частности, проводились анализ терроризма для Агентства по контролю над вооружениями и разоружением в Вашингтоне, в котором я проработал семь лет (опубликовано в книге, изданной под редакцией доктора Р. Купермана), исследование других конфликтов (например, конфликт в Северной Ирландии), а также решался вопрос размещения ресурсов в соответствии с приоритетами для крупных частных, правительственных и международных концернов.

Теория отражает то, что представляется естественным ходом человеческого мышления. Сталкиваясь с множеством контролируемых или неконтролируемых элементов, отражающих сложную ситуацию, разум объединяет их в группы в соответствии с распределением некоторых свойств между элементами. Наша модель позволяет повторять данный процесс таким образом, что группы, или скорее определяющие их общие свойства, рассматриваются в качестве элементов следующего уровня системы. Эти элементы, в свою очередь, могут быть сгруппированы в соответствии с другим набором свойств, создавая элементы еще одного, более высокого уровня, и так до тех пор, пока не будет достигнут единственный элемент – вершина, которую зачастую можно отождествить с целью процесса принятия решений.

То, что мы только что описали, обычно называют иерархией, т. е. системой наслаиваемых уровней, каждый из которых состоит из многих элементов, или факторов. Центральным вопросом на языке иерархии является следующий: насколько сильно влияют отдельные факторы самого низкого уровня иерархии на вершину – общую цель? Неравномерность влияния по всем факторам приводит к необходимости определения интенсивности влияния, или, как мы предпочитаем говорить, приоритетов факторов.

Определение приоритетов факторов низшего уровня относительно цели может быть сведено к последовательности задач определения приоритетов для каждого уровня, а каждая такая задача - к последовательности попарных сравнений. Сравнения остаются основными составляющими нашей теории, даже если исходная задача осложнена условиями обратной связи между различными уровнями или факторами.

Вернемся к положению о том, что наша теория является моделью естественного хода человеческого мышления, создающего концепцию и структуру сложной проблемы. На создание теории повлияло следующее:

1. При наблюдении за людьми, участвовавшими в процессе построения и установления приоритетов иерархии, обнаружено, что они естественно занимаются последовательным группированием отдельных предметов в пределах уровней и разделением уровней по сложности.

2. Лица, знакомые с определенной проблемой, могут построить ее иерархию разными способами, однако если суждения людей схожи, то их результаты будут близки. Кроме того, этот процесс малочувствителен, т. е. различия при детализации в пределах иерархии на практике не приводят к существенным изменениям в результатах.

3. В процессе разработки теории найден математически обоснованный способ оперирования суждениями.

По мнению участников, предлагаемый процесс отражает их интуитивное понимание проблемы. Более того, психологические ограничения оказались совместимыми с условиями математической устойчивости результатов.

В своей прекрасной книге «Число – язык науки»[*] Данциг отмечает, что человеческий мозг обладает свойством восприятия чисел, которое является первичным и предваряет фактический подсчет; а именно, свойством осознавать, что малый набор предметов увеличился или уменьшился при добавлении или удалении некоторых предметов. Это - интуитивная способность, которая не является умением считать. Он отмечает, что даже некоторые животные обладают такой способностью. Наконец, Данциг размышляет о том, порождает ли эту концепцию опыт, либо опыт просто служит выявлению того, что уже заложено в мозгу природой. По зрелом размышлении оказывается, что верно последнее; осознание есть процесс идентификации событий, выявления различий в интенсивности или степени различий между ними в любых общих для них свойствах. Таким образом, то, что нам известно как «качественное», является нечетким способом осознания различий. Так как выживание человеческого рода требовало боль шей определённости, люди развили способность осознавать числа. Когда индивидуальный опыт включает разнообразие ощущений или видов деятельности и требуется некоторая обобщенная интерпретация или действие, то эти ощущения или виды деятельности должны быть каким-то образом объединены. Способ их объединения зависит от цели, которой они предположительно будут служить; наши цели диктуют, на чем следует заострить внимание. Поэтому нам будут нужны понятия приоритета и его измерения.

Разрабатываемая методология должна быть полезной для моделирования проблем, включающих знании и суждения таким образом, чтобы в итоге обсуждаемые сложные предметы были ясно выражены, оценены и установлены их приоритеты. Суждения могут уточняться с помощью обратной связи, что будет в свою очередь вести к дальнейшему уточнению суждений. Мы использовали метод анализа иерархий и для получения групповых суждений посредством достижения консенсуса. В результате любое полученное нами решение превращается для лица, принимающего решения, в совершенно определенный ответ. В какую бы форму не вылилось окончательное суждение, всегда найдутся люди, чьи суждения отличаются от любого полученного исхода, однако при формировании суждений группой следует синтезировать интересы каждого члена группы.

Мы покажем, что старинное изречение о том, что нельзя сравнивать яблоки и апельсины – неверно. Яблоко и апельсин имеют много общих характеристик: размер, форму, вкус, аромат, количество семян, сочность и т. д. Можно предпочитать апельсин по одним характеристикам и яблоко – по другим. К тому же степень нашего предпочтения по этим характеристикам может меняться. Мы можем быть безразличны к размеру и цвету, однако и степень нашего предпочтения по вкусу может меняться в зависимости от времени дня. Выдвигаемый нами тезис о том, что сложные сравнения подобного рода часто встречаются в действительности, требует вы-

[*] G. Dantzig. Number the Language of Science. The Macmillan Company, New York, 3rd ed., 1939.

работки определенного математического подхода. Метод будет разбиваться и для подобных сравнений в динамике. Практика принятия решений связана с взвешиванием альтернатив, каждая из которых удовлетворяет некоторому набору желаемых целей. Задача заключается в выборе той альтернативы, которая наиболее полно удовлетворяет весь набор целей. Нас интересует получение числовых весов для альтернатив относительно подцелей и для подцелей относительно целей более высокого порядка. Желательно, чтобы эти веса имели смысл для задачи распределения ресурсов. Например, если веса представляют собой суммы денег, расстояния, или какую бы то ни было исследуемую физическую величину, то они должны получиться теми же, или близкими к тем, что экономист или физик может получить своими методами измерений. Следовательно, в результате нашего процесса взвешивания нужно получить веса или приоритеты, которые являются оценками в основной шкале отношений. В то же время, когда различные виды деятельности физически взаимозависимы и видам деятельности с низким приоритетом, влияющим на виды деятельности с более высоким приоритетом, выделяется малое количество ресурсов, это не должно занизить количество ресурсов для видов деятельности с более высокими приоритетами. Вот почему распределение ресурсов должно быть произведено при условии ограничений взаимозависимости.

Даже при одних и тех же условиях существуют разные стили принятия решений. Один южно-корейский экономист – специалист по планированию, человек, который полагал, что его страна могла бы более преуспевать, чем Япония, сказал:

В Японии процесс принятия решения представляет собой разговоры, разговоры и разговоры, пока вы не достигнете консенсуса. В Корее и Китае – это разговоры, разговоры, однако затем кто-то сверху принимает решение. Вы видите это в доме самого бедного корейского крестьянина, где он является хозяином. Вы видите это и критикуете в нашей политике. Мы видим это в нашем большом бизнесе, где проводятся отличные исследования, однако окончательное решение принадлежит президенту. Это может создать проблемы, когда структура нашей промышленности станет более сложной, хотя это было очень хорошо на ранней стадии промышленного роста.

Это хорошо согласуется с комментариями высокопоставленного японского чиновника о процессе принятия решений в Японии:

Любое решение в Японии принимается посредством консенсуса. В японском правительстве большинство решений первоначально предлагается чиновниками. Затем их предложения проходят через множество обсуждений, из которых только последнее происходит в кабинете министров. Даже в кабинете обсуждение может продолжаться часами, притом никто не высказывает законченного мнения. В конце концов, премьер-министр говорит: это наш консенсус. Он также не очень точен. Однако дальнейшие действия производятся в соответствии с этим неточным консенсусом, но каждый чувствует, что внес определенную лепту в то, что будет сделано. Вследствие этого в Японии каждое решение заурядно, однако его исполнение – отличное. (The Economist, 7 May 1977, p. 46).

Иногда решения, принимаемые в больших организациях или правительством, по-видимому, игнорируют человеческий фактор. Э. Дадарио в одной из статей говорит, что:

Из-за неопределенностей принятия решений в политике общество не движется в соответствии с его техническими возможностями... До тех пор, пока процессы в политике не обеспечат ясного ранжирования приоритетов, вклад науки и техники в разрешение отдельных проблем общественного благосостояния, вероятно, останется случайным и несистематическим... Лица, принимающие решения в политике, при применении научного подхода к ранжированию приоритетов не должны забывать о своей основной функции – защите человеческих ценностей. Используя научный подход для решения больших социальных проблем, лица, принимающие решения, учатся количественному выражению многих решений, ранее принимавшихся на основе интуитивных или нормативных суждений («Ventures», Журнал Иельской Высшей школы, весна 1971 г.).

Возможно, наш количественный подход позволит избежать опасности дегуманизации, о которых говорит Дадарио.

Эта книга предназначена для читателей с разным уровнем подготовки и намеренно включает некоторые повторения идей. Она не нацелена исключительно на ученых исследователей или специалистов в области измерений.

Я благодарен моим коллегам, доктору Дж. Беннету и доктору К. Уейду, стимулировавшим обсуждение и возникновение некоторых идей, и моему другу доктору Дж. Майеру за прочтение рукописи, приведение ее в порядок и переработку некоторых разделов с целью сжатия изложения. Я также признателен за приведение в порядок и редактирование первоначального варианта книги моей бывшей студентке и сотруднице, занимающейся приложениями, связанными с разрешением конфликтов, доктору Дж. Александер. Я благодарен также за общение и помощь в работе с компьютером семи юным умам, моим бывшим и нынешним студентам: П. Блеру, Г.-Ю. Чженю, А. Десаи, Э. Эрденер, Ф. Ма, Р. Мариано и Л. Варгасу. Наконец, я глубоко признателен моей секретарше и помощнице миссис М. Браун за высококачественную обработку рукописи.

Т. Саати
Пенсильванский университет

ЧАСТЬ I
МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Тема. Декомпозиция с использованием иерархий и синтез путем нахождения отношений через суждения.

Когда экономические факторы сводятся к числам в денежном измерении, количество объектов, их вес в тоннах и время, необходимое для их производства, вычислены и произведены оценки вероятностей, зачастую оказывается, что эффективность процесса моделирования сложных человеческих проблем достигла своего предела. Человеческие возможности в этом процессе сильно зависят от тех факторов, которые мы можем измерять.

Если затем модели плохо работают, то это происходит из-за того, что мы опустили некоторые существенные факторы, принимая облегчающие допущения. По крайней мере в социальных науках вину за полученный результат возлагают, как правило, на политиков, на человеческие капризы и другие факторы, рассматриваемые как досадные заблуждения, которые со временем исчезнут. Но именно они являются теми контролирующими факторами, с которыми мы должны иметь дело и которые должны уметь измерять, чтобы получить реалистичные результаты. Необходимо по возможности отказываться от принятия облегчающих допущений в наших моделях и принимать сложные ситуации такими, какими они являются. Чтобы быть реалистичными, наши модели должны включать в себя и позволять измерять все важные осязаемые и неосязаемые, количественные и качественные факторы. Это как раз то, что делается в методе анализа иерархий (МАИ), при котором также допускаются различия во мнениях и конфликты, как это бывает в реальном мире. Мы собираемся развить этот подход и показать читателю, каким эффективным средством он является.

Глава 1 является общим введением в предмет, за которым следуют примеры гл. 2. В гл. 3 даны объяснения шкал и понятия согласованности, а гл. 4 касается иерархических структур и их согласованности.

ГЛАВА 1

ИЕРАРХИИ И ПРИОРИТЕТЫ: ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОБСУЖДЕНИЕ

1.1. ВВЕДЕНИЕ

В процессе мышления мы определяем объекты или идеи и отношения между ними. При определении чего-либо человек производит декомпозицию сложного события, с которым сталкивается, а выявив отношения, тем самым осуществляет синтез. Фундаментальный процесс, лежащий в основе познания, включает в себя декомпозицию и синтез. Для нас интерес представляют разработка этой концепции и ее практические применения.

Хотя проводимые разными людьми декомпозиции могут отличаться одна от другой, непосредственный опыт общения с реальностью позволяет получить достаточно близкие оценки на операционном уровне, особенно, когда эти оценки подтверждаются успешным опытом достижения общих целей. Поэтому можно моделировать действительность различным образом, и вместе с тем придавать суждениям смысл, который включает общее понимание. Необходимо использовать это проявление суждений и знаний.

Наша цель – разработка теории и методологии для моделирования неструктурированных задач в экономике, науке управления и социальных науках.

Иногда мы забываем, как много времени потребовалось человечеству для развития измерительных шкал, которыми пользуются в повседневной жизни. Эволюция монетарных единиц потребовала тысячи лет меновой торговли и законодательной деятельности в процессе последовательного приближения к созданию средства для обмена, которое мы называем деньгами. Деньги также служат в качестве основы измерения всех видов товаров и услуг. Эта эволюция шкалы измерения, т. е. денег, помогла построить экономические теории, поддающиеся эмпирическим проверкам. Развитие денег – интерактивный процесс, усовершенствующий человеческие суждения и опыт, с одной стороны, и средства измерения – с другой. Этот процесс также создал структуру, объединяющую философию и математику в экономической науке. Экономические теории в настоящее время очень тесно связаны со своими единицами измерения, однако возникают проблемы, связанные с политическими и социальными величинами, которые, не имеют экономических эквивалентов.

Социальные величины в нашем сложном обществе требуют удобного метода шкалирования, который позволил бы на практической повседневной основе получить разумные соотношения между деньгами, качеством окружающей среды, здоровьем, счастьем и подобными реальностями. Такой подход облегчил бы взаимодействие между суждениями и социальными феноменами, к которым они применены. Нам нужен такой подход именно из-за того, что не существует шкал измерения социальных величин, которые завоевали бы популярность, хотя и известны попытки заложить основу теории измерений в социальных науках.

Пробным камнем для нового инструментария является то, насколько он естественен и прост в употреблении и насколько гармонично он составляет *единое целое* в рамках существующей теории, принят ли он теми, кто его должен использовать, и как хорошо он *работает* при решении возникающих проблем.

Наша теория создавалась для решения определенной задачи планирования при непредвиденных обстоятельствах [122] и позднее при построении будущих альтернатив для развивающейся страны – Судана [129]. В результате были получены приоритеты и план капиталовложений для проектов, осуществление которых намечено на конец 80-х годов. Идеи постепенно развивались, находя применение во многих других приложениях, таких, как распределение энергии [137], капиталовложения в различные технологии в условиях неопределенности, борьба с терроризмом [135], покупка автомобиля, выбор работы и выбор школы.

Используя парные сравнения на входе, мы можем справиться с факторами, которые обычно в приложениях не поддаются эффективной количественной оценке. Естественно, у некоторых людей вызывает сомнение неопределенность, заключающаяся в том, что числа ассоциируются с суждениями; иначе говоря, можно попасть в капкан поговорки: «мусор на входе – мусор на выходе». С суждениями трудно работать, кроме того, они меняются в широком диапазоне. Но можно исследовать согласованность суждений и тем самым обосновать их.

Различные приложения теории осуществлялись при участии юристов, инженеров, ученых, работающих в области политических и социальных наук, физиков, математиков и даже детей. Все ощущали удобства легкого и естественного способа проведения парных сравнений в пределах индивидуального опыта и легко воспринимали изложение метода, которое обычно велось без технических подробностей.

Однако почему возникла такая навязчивая идея с числами и измерениями? Каким образом она поможет нам, и как она будет работать? Нам постоянно предлагают методику, позволяющую справиться с любым феноменом, с которым мы сталкиваемся. Однако она не может справиться с вещами, для которых не существует мер. Здесь предлагается эффективный способ построения мер для таких вещей и их использования для принятия решений.

Для лучшей оценки предлагаемого нами подхода, достаточно общего для применения как к известным измерениям, так и к суждениям, приведем следующую цитату [23]:

...Кажется почти очевидным, что мы не можем решать современные значительные политические и организационные проблемы простым перемалыванием ряда доступных входных данных с помощью математических моделей или вычислительной техники. Кроме того, нам требуется более усовершенствованная схема размышления и суждения. Когда мы начнем постигать процесс размышления и суждения, мы сможем прийти к лучшему объективному методу, т. е. к некоторому оптимальному пути обдумывания в точной и достоверной форме.

Обычно процесс принятия решений включает в себя следующие составляющие: планирование, генерирование ряда альтернатив, установление приоритетов, выбор наилучшей линии поведения после нахождения ряда альтернатив, распределение ресурсов, определение потребностей, предсказание исходов, построение систем, измерение характеристик, обеспечение устойчивости системы, оптимизация и разрешение конфликтов.

Ответы на задачи по принятию решений страдают от избыточности техники «патентованной медицины», исключающей лечение в целом. Рекомендации к решению одной задачи могут привести всю систему в более возмущенное состояние чем то, в котором она была сначала.

В последние десятилетия в задачах социальных и поведенческих наук нашел свое место «системный подход» наряду со старыми редукционистскими методами, которые, по-видимому, более приемлемы для физических наук. По существу, система является абстрактной моделью имеющейся в реальности структуры, как, например, нервная система человека, управление городом, транспортная сеть штата или экосистема болотистых местностей в Нью-Джерси. Говоря системным языком, мы оцениваем воздействие различных компонент системы на всю систему и находим приоритеты этих компонент.

Некоторые определяют систему в терминах взаимодействий ее частей. Однако гораздо более богатое определение системы может быть дано в терминах ее *структуры*, её *функций*, *целей*, заложенных в ее *конструкцию* с точки зрения *перспективы* отдельного индивидуума или группы (отсюда и возможность конфликта), и наконец *окружающей среды* (большей окружающей системы), для которой она представляет собой подсистему.

Для практических целей система часто рассматривается в терминах ее:

структуры в соответствии с физической, биологической, социальной или даже психологической классификацией ее частей и в соответствии с потоком материалов и людей, которые определяют отношения и динамику структуры;

функций в соответствии с тем, каковы функции одушевленных или неодушевленных компонент системы; какие цели они должны выполнять; частями каких целей более высокого порядка являются эти цели (ведущие к общей цели системы); чьи цели удовлетворяются; какие конфликты между индивидуумами могут быть разрешены.

В действительности структура и функции системы не могут быть разделены. Они представляют собой реальность, которую мы осознаем на основании опыта. Нам следует рассматривать их одновременно. В таком плане структура служит средством для анализа функций. Функционирование изменяет динамику структуры.

Иерархия является некоторой абстракцией структуры системы, предназначенной для изучения функциональных взаимодействий ее компонент и их воздействий на систему в целом. Эта абстракция может принимать различные родственные формы, в каждой из которых, по существу, производится спуск с вершины (общей цели) вниз к подцелям, далее к силам, которые влияют на эти подцели, к людям, влияющим на эти силы, к целям отдельных людей, к их политикам, еще дальше к стратегиям, и, наконец, к исходам, являющимся результатами этих стратегий. Стоит отметить, что существует некоторая степень инвариантности этой структуры, высшие уровни которой представляют ограничения и силы окружающей среды, спускающиеся к уровням действующих лиц, их целей, функциям системы, и, наконец, к ее структуре, которая может быть модифицирована или управляема.

При построении иерархической структуры системы возникают два вопроса:

Как мы строим функции системы иерархически?

Как мы измеряем воздействия любого элемента в иерархии?

Есть также важные вопросы по оптимизации, которыми следовало бы заняться. Они приобретут смысл после того, как будут получены ответы на приведенные выше вопросы. Позже мы обсудим и структуру иерархий.

1.2. ИЗМЕРЕНИЯ И СУЖДЕНИЯ

Рассмотрим три родственные задачи, имеющие интересные приложения. *Первая* касается измерений. Предположим, что имеется некоторое множество предметов, каждый из которых достаточно легок и может быть поднят рукой. В отсутствии взвешивающего прибора мы хотим оценить их относительные веса. Один способ оценки заключается в том, чтобы угадать вес каждого предмета, взяв за единицу измерения самый легкий, таким образом сравнить все предметы, а потом разделить веса отдельных предметов на суммарный вес всех предметов, чтобы получить относительный вес каждого. Другой метод, использующий большее количество имеющейся в эксперименте информации, представляет собой попарное сравнение предметов, заключающееся в том, что мы поднимаем один предмет, затем другой, и вновь возвращаемся к первому и затем к следующему и т. д., пока у нас не сформируется суждение об относительном весе (отношении) каждой пары объектов. Затем задача заключается в получении удобной шкалы для попарных сравнений. Преимущество второго способа состоит в том, что одновременно рассматриваются только два предмета и выясняется, как они соотносятся друг с другом. Отметим также, что при этом используется избыточная информация, так как каждый предмет методично сравнивается со всеми остальными.

В задачах, где нет шкалы, по которой фиксируется количественная характеристика результатов, процесс попарных сравнений, как можно показать, обладает тем ценным качеством, что несмотря на большее число этапов, каждый из этапов проще, чем при первом способе взвешивания.

Отмети, что при любом способе измерений их согласованность — это не нечто само собой разумеющееся. Всем измерениям, включая измерения с использованием приборов, присущи как экспериментальные ошибки, так и ошибки измерительного прибора. Серьезным следствием ошибки является то, что она может привести и часто приводит к несогласованным выводам. Простым примером следствия ошибок при взвешивании предметов может служить следующая ситуация: А тяжелее Б, Б тяжелее В, однако В тяжелее А. Это может произойти, в частности, в том случае, когда веса предметов А, Б и В близки, а измерительный прибор недостаточно точен. Отсутствие согласованности может быть существенным для одних задач и не столь существенным для других. Например, если предметами являются два химических препарата, путем смешивания которых в точной пропорции изготовляют лекарство, то несогласованность в данном случае может означать, что непропорционально большее количество одного препарата смешивается с меньшим количеством второго, что может привести к пагубным результатам.

Однако совершенной согласованности в измерениях на практике трудно достигнуть даже при помощи точнейших приборов, поэтому нужен способ оценки согласованности для отдельной задачи.

Под согласованностью здесь подразумевается не просто традиционное требование транзитивности предпочтений (если яблоки предпочтительнее апельсинов, а апельсины предпочтительнее бананов, то яблоки должны быть предпочтительнее бананов), а фактическая степень предпочтения, которая проходит через всю последовательность сравниваемых предметов. Например, если яблоки в 2 раза предпочтительнее апельсинов, а те, в свою очередь, в 3 раза предпочтительнее бананов, то яблоки должны быть в 6 раз предпочтительнее бананов. Именно это мы называем числовой (кардинальной) согласованностью по степени предпочтений. Несогласованность означает отсутствие пропорциональности, которое может вызвать нарушение транзитивности, а может и не вызвать его. Наш метод исследования согласованности не только показывает несогласованность при отдельных сравнениях, но и дает численную оценку того, как сильно нарушена согласованность для всей рассматриваемой задачи. Точное определение численного показателя для согласованности будет дано позднее.

Отметим, что зависимость между согласованностью и тестами, показывающими близость измерений к воспроизводимой реальности, необязательна. Так, у индивидуума может быть отличная согласованность в суждениях, однако он может мало что знать о реальной ситуации. Хотя обычно, чем лучше человек знаком с ситуацией, тем более последовательным в своих суждениях он должен быть при ее воспроизведении. Попарные сравнения позволяют повысить согласованность путем использования всей возможной информации.

Для того чтобы измерения воспроизводили реальность, делаются следующие предположения:

1. Физическая «реальность» согласованна и при контролируемых условиях от опыта к опыту можно рассчитывать на получение одинаковых результатов.

2. Суждения должны стремиться к согласованности, являющейся желаемой целью. Необходимо «схватить» реальность, но этого еще не достаточно. У индивидуума могут быть весьма согласованные мысли, которые не соответствуют реальным ситуациям в мире. Согласованность является центральной проблемой в конкретных измерениях, в суждениях и в мыслительном процессе.

3. Для получения лучших оценок реальности, при проведении суждений следует систематически направлять наши впечатления, ощущения и мнения. Нашей целью является повышение объективности и понижение слишком большой субъективности.

4. Для получения хороших результатов (соответствующих реальности) из наших ощущений требуется: а) применить математику для построения правильной теории,

которая предоставит численные шкалы суждений и других сравнительных измерений; б) найти шкалу, которая будет различать наши ощущения так, чтобы мы легко могли доверять соответствию между качественными суждениями и числами этой шкалы; в) иметь возможность воспроизводить измерения реальности, которые уже нам известны из физики и экономики; г) иметь возможность определить величину нашей несогласованности.

Между прочим, отметим, что измерительные приборы не только не являются и не могут быть средством абсолютных измерений, но и сами стали объектом научных исследований и анализа. Если эти приборы в каком-либо смысле неадекватны (а можно всегда придумать эксперимент, для которого нет удовлетворительного измерительного прибора), то нужно создать новые приборы. Нетрудно представить себе какой-нибудь важный эксперимент, для которого нельзя найти достаточно точных приборов, всегда дающих непротиворечивые ответы. В этом случае задача в целом смещается в плоскость изучения согласованности и оценки степени несогласованности. Предлагаемый подход к оценке шкал отношений, основанный на максимальном собственном значении; позволяет измерить отклонение от согласованности. При этом обеспечивается сравнение суждений, полученных на основе информированности, с разобщёнными или случайными суждениями, что служит средством оценки отклонения от основной шкалы отношений.

При измерениях физических величин обычно можно установить размерность или характеристику, например для длины, которая остается одной и той же во времени и пространстве, и создать приборы для измерения этой характеристики. В действительности гораздо труднее создать прибор, который перед проведением измерения приспосабливает свою шкалу к изменяющимся обстоятельствам. К примеру, расстояние и масса меняются при скоростях, близких к скорости света, и поэтому прибор, который непосредственно измерял бы эти характеристики при скоростях, близких к скорости света, потребовал бы некую разновидность переменной шкалы.

Такая проблема возникает и в общественных науках. Речь идет о характеристиках, которые изменяются не только в пространстве и во времени, но, что гораздо важнее, изменяют также свое значение в сочетании с другими характеристиками. Мы не можем изобрести универсальные шкалы для социальных событий. Социальные явления сложнее физических, поскольку их труднее воспроизвести в достаточном количестве. Кроме того, при этом необходимо осуществлять строгий контроль, сам по себе часто нарушающий именно то социальное поведение, которое и пытаются измерить. Наши суждения должны быть достаточно гибкими и учитывать ситуацию, при которой происходит измерение интересующей нас характеристики.

Рассмотрим задачу измерения успеха и счастья. Оба понятия можно назвать относительными свойствами в том смысле, что можно приспособить единицу измерения для сравнения, скажем, степени счастья в одной обстановке со степенью счастья в другой обстановке. Как будет показано далее, это можно сделать с помощью техники попарных сравнений. Мощным прибором, меняющим свою шкалу в соответствии с обстоятельствами, может быть сам человеческий ум, особенно если оказывается, что измерения, проводимые им, достаточно согласованы, чтобы удовлетворить требованиям отдельной задачи. Интенсивность наших ощущений служит в качестве устройства, подстраивающего шкалу для измерения некоторых объектов по соразмерной другим объектам шкале. Фактически, с повышением точности мышление становится необходимым средством относительных измерений, так как ни один прибор, за исключением нашего ума, не может быть сконструирован так, чтобы соответствовать нашему собственному опыту и точке зрения. Некоторая группа должна скоординировать точки зрения своих членов для получения приемлемых для них (в определенном смысле) результатов.

Обратимся теперь к нашей *второй* задаче, которая касается обеспечения большей устойчивости и инвариантности в социальных измерениях. Допуская, что размерности или характеристики являются переменными, зададимся вопросом, как измерять воздействия этой изменчивости на характеристики другого, более высокого уровня, и, в свою очередь, как измерять воздействия последних на еще более высокий уровень и т. д. Получается, что для очень большого класса задач обычно можно определить общие характеристики (или одну характеристику), которые остаются неизменными достаточно долго, т. е. на время эксперимента. Такой подход ведет к измерению и анализу воздействий в иерархиях, обсуждавшихся ранее. Затем можно исследовать инвариантность полученных результатов преобразованием иерархии различными способами. Результаты измерений могут быть использованы для придания системе устойчивости или для построения систем, ориентированных на новые цели, а также (в качестве приоритетов) для распределения ресурсов. Здесь вновь, как и в монетарной системе, описанной ранее, измерения получаются из суждений, основанных на опыте и понимании, причем только из относительных, а не абсолютных сравнений.

Наша *третья* задача заключается в установлении правильных условий, при которых люди определили бы структуру своих задач и представили бы необходимые суждения для оценки приоритетов. Предполагается, что попарные сравнения получаются непосредственным опросом лиц (или отдельного лица, если задача касается только его одного), которые могут быть, а могут и не быть экспертами, но знакомы с проблемой. Центральным моментом нашего подхода является то, что суждения людей часто не согласованы, но несмотря на это приоритеты должны быть установлены.

Предполагается также, что все альтернативы определены заранее, и что не все переменные контролируются каждой из групп, влияющей на исходы альтернатив. Желательно знать, является ли приоритет альтернативы результатом влияния более сильной внешней группы. Целью здесь может быть импровизация политик и установление связей для оказания влияния на эту группу и получения более подходящего исхода для участников. Представляет интерес также и устойчивость результатов по отношению к изменениям оценок суждений.

Предполагается, что выраженные предпочтения являются детерминистическими, а не вероятностными. Поэтому предпочтение остается постоянным и независимым от других факторов, не включенных в задачу.

Если в процессе участвуют несколько лиц, то они могут помогать друг другу в уточнении своих суждений, а также разделить задачу так, чтобы произвести суждения в тех сферах, где они достаточно компетентны, таким образом дополняя друг друга. Они могут попытаться достигнуть консенсуса. В случае неудачи процесс заключения сделки, особенно для спорящих лиц, позволяет одной группе уступить, если сравниваемая пара не имеет особого значения для нее, и, в свою очередь, попросить о подобных уступках у противоположной группы. Когда оценку производит каждый из нескольких лиц, отдельные результаты могут сравниваться с точки зрения их индивидуальных полезностей для синтеза, осуществляемого внешней группой.

Еще одним способом применения метода было бы получение решения посредством использования своих суждений каждым членом группы с конфликтующими интересами, запись результата и сравнение его (возможно, с помощью ЭВМ) с результатами, полученными другими. Данный процесс обнаруживает, на достижение какого исхода оказывает давление каждая группа. Важным результатом этого является стимулирование сотрудничества.

1.3. ИЕРАРХИИ

Очень часто при анализе интересующей нас структуры число элементов и их взаимосвязей настолько велико, что превышает способность исследователя воспринимать информацию в полном объеме. В таких случаях система делится на подсистемы, почти так же, как схема ЭВМ, состоящая из блоков и их взаимосвязей, причем у каждого блока есть собственная схема.

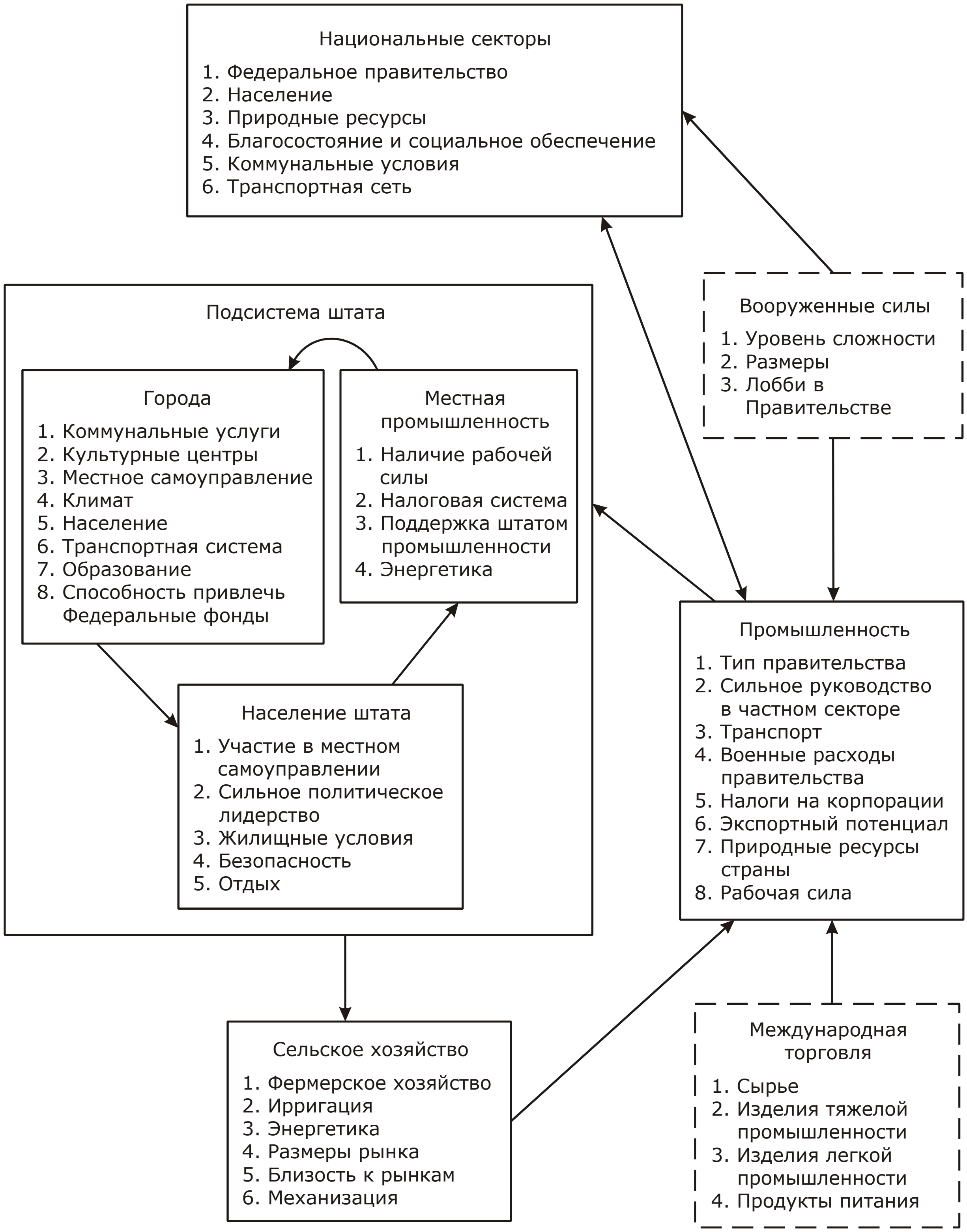


Рис. 1.1

На рис. 1.1 весьма грубо представлены различные подсистемы, которые вместе с взаимосвязями составляют современную систему производства в стране. Подобными системами (имеющими циклы) мы займемся в гл. 8, а сейчас обратимся к наиболее простому иерархическому представлению задач.

Иерархия есть определенный тип системы, основанный на предположении, что элементы системы могут группироваться в несвязанные множества. Элементы каждой группы находятся под влиянием элементов некоторой вполне определенной группы и, в свою очередь, оказывают влияние на элементы другой группы (в отдельной главе мы изучим взаимодействия и между несколькими группами). Мы считаем, что элементы в каждой группе иерархии (называемой уровнем, кластером, стратой) независимы. Случай наличия зависимости между элементами рассматривается в гл. 6.

Ниже дан элементарный пример иерархии. Благосостояние полисов (городов-государств) в средневековой Европе зависело в основном от силы и способностей их правителей. Общая структура полиса может быть воспроизведена в иерархической форме, показанной на рис. 1.2.

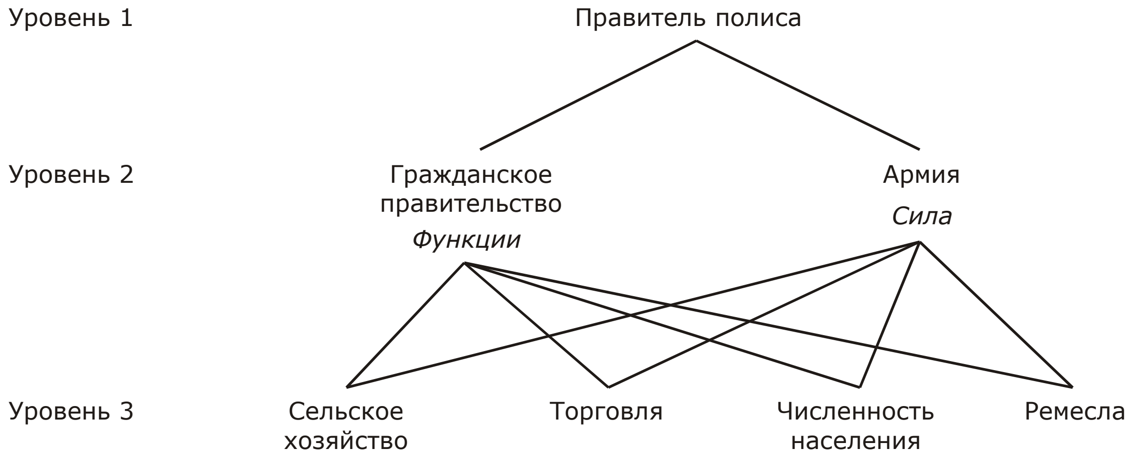


Рис. 1.2

Мы сгруппировали сельское хозяйство, торговлю, численность населения и ремесла в одно множество, или уровень, так как в этой модели они обладают свойствами наиболее фундаментальных факторов экономической силы полиса. Эти факторы определяют способность функционирования гражданского правительства и силу армии, которые, в свою очередь, влияют на благосостояние полиса.

Приведем некоторые замечания. Во-первых, очевидно, что модель слишком проста. Здесь можно было бы определить намного больше элементов и больше уровней в зависимости от вопроса, на который мы пытаемся ответить. Модель быстро усложняется и становится трудно воспринимаемой. Поэтому следует тщательно строить иерархию с учетом соответствия действительности и нашего понимания ситуации. Опыт показал, что даже весьма грубая на вид идеализация может позволить глубже вникнуть в суть проблемы.

Во-вторых, в модель не включен тот очевидный факт, что не только торговля влияет на гражданское правительство, но и гражданское правительство также воздействует на торговлю. Это «реверсивное» воздействие, или обратная связь, будучи зачастую важным, все же не так существенно, как это может показаться вначале. Анализ нескольких задач проведен сначала без учета обратной связи, а затем с ее учетом. Первые результаты были достаточно близки, и это позволяет допустить, что правильно построенная иерархия будет в большинстве случаев хорошей моделью реальности, даже если возможные обратные связи игнорируются. Тем не менее, как показывает первый пример этого раздела, некоторые ситуации могут быть настолько сложными, что их представление в виде иерархии окажется упрощенным, вводящим в заблуждение.

Возможно, следующий пример сделает понятие иерархии более ясным. Вопрос, который нас интересует, связан с колледжем; мы стремимся определить сценарий, согласно которому с наибольшей вероятностью будет обеспечено продолжительное существование колледжа. Назовем благосостояние колледжа общей целью. На нее влияют следующие силы: обучение, общественная жизнь, дух (атмосфера), наличие оборудования и внешкольная деятельность. Эти силы определяются следующими акторами (действующими лицами): академической администрацией, неакадемической администрацией, профессорско-преподавательским составом, студентами, попечителями. Мы опускаем очевидную обратную связь между силами и акторами. Различные акторы имеют определенные цели: профессорско-преподавательский состав может хотеть сохранить свою работу, расти профессионально, качественно проводить обучение; студенты могут быть заинтересованы в получении работы, в женитьбе, в получении хорошего образования и т. д. Наконец, имеется несколько возможных сценариев, таких как: статус-кво, акцент на профессиональное обучение, дальнейшее образование, или превращение в религиозную школу. Сценарии определяют вероятность достижения целей, цели влияют на акторов, акторы направляют силы, которые, наконец, воздействуют на благосостояние колледжа. Таким образом, мы получаем иерархию (рис. 1.3).

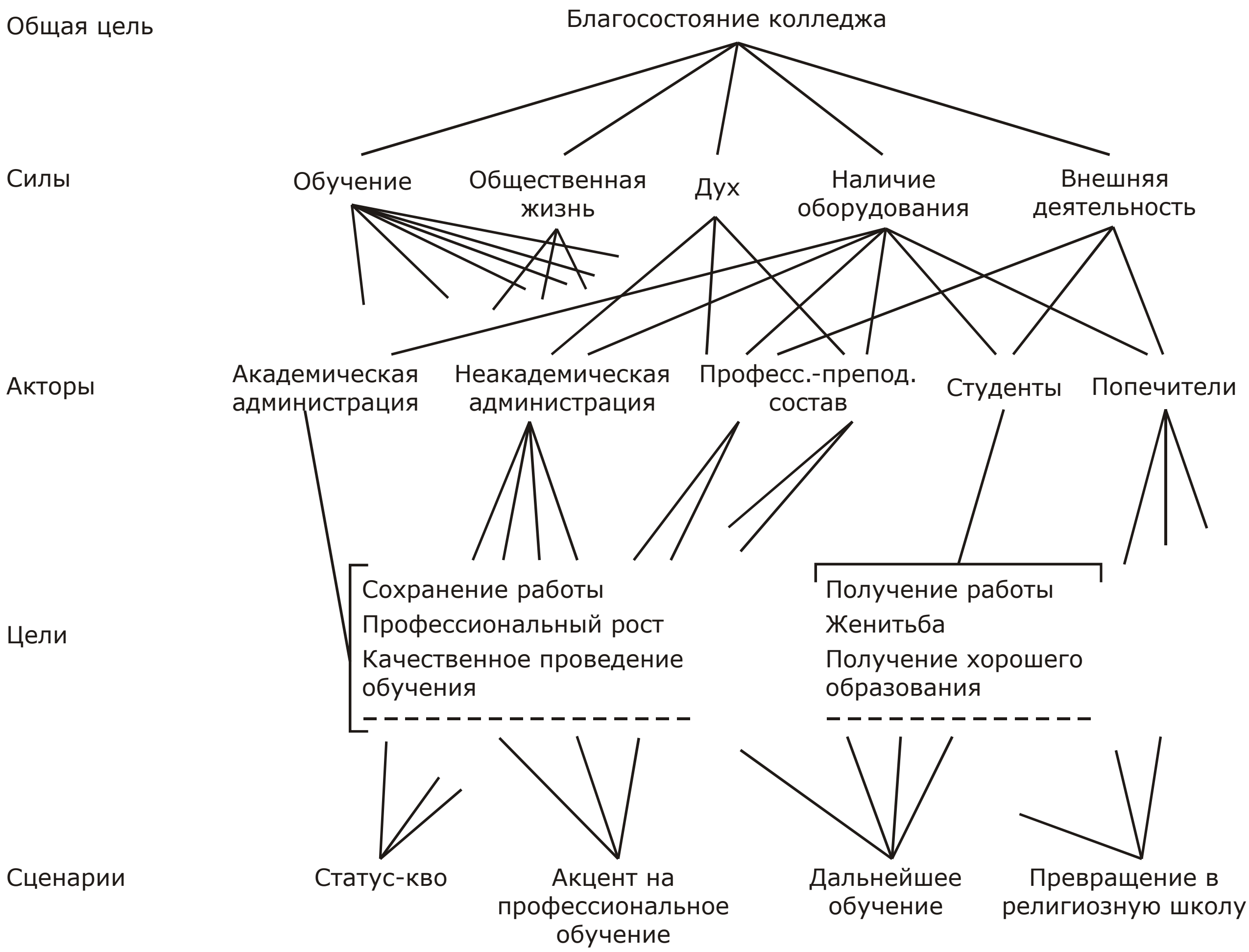


Рис. 1.3

Рассмотрим это понятие иерархии более внимательно.

Многие склонны полагать, что иерархии были изобретены в корпорациях и правительствах для решения собственных проблем. Это не так. Иерархии являются основным способом, с помощью которого человек подразделяет реальность на кластеры и подкластеры. Красноречивым подтверждением этой точки зрения служит следующая цитата:

Очевидна огромная сфера приложений иерархической классификации. Это наиболее мощный метод классификации, используемый человеком для приведения в порядок опыта, наблюдений и информации. Хотя нейрофизиологией и психологией определенно это еще не установлено, однако иерархическая классификация, возможно, воспроизводит первичную форму координации или организации: 1) корковых процессов, 2) их психических соотносительных понятий и 3) их выражения в символах и языках. Использование иерархического упорядочивания, по-видимому, так же старо, как и человеческое мышление, сознательное и бессознательное... [179].

Основной задачей в иерархии является оценка высших уровней исходя из взаимодействия различных уровней иерархии, а не из непосредственной зависимости от элементов на этих уровнях. Точные методы построения систем в виде иерархий постепенно появляются в естественных и общественных науках, и особенно в задачах общей теории систем, связанных с планированием и построением социальных систем. Путем иерархической композиции, по существу, уклоняются от непосредственного сопоставления большого и малого [149, 181]. Концептуально, наиболее простая иерархия – линейная, восходящая от одного уровня элементов к соседнему уровню. Например, в процессе производства имеется уровень рабочих, доминируемый уровнем мастеров, который в свою очередь доминируется уровнем управляющих и т. д., до вице-президентов и президента. В нелинейной иерархии верхний уровень может быть как в доминирующем положении по отношению к нижнему уровню, так и в доминируемом (например, в случае потока информации). В математической теории иерархий разрабатывается метод оценки воздействия уровня на соседний верхний уровень посредством композиции соответствующего вклада (приоритетов) элементов нижнего уровня по отношению к элементу верхнего уровня. Эта композиция может распространяться вверх по иерархии.

Каждый элемент иерархии функционально может принадлежать к нескольким другим различным иерархиям. Например, ложку можно расположить вместе с другими ложками различного размера в одной иерархии, или вместе с ножами и вилками в другой иерархии. Элемент может являться управляющей компонентой на некотором уровне одной иерархии или может просто быть элементом, раскрывающим функции нижнего или высшего порядка в другой иерархии.

ПРЕИМУЩЕСТВА ИЕРАРХИЙ

1. Иерархическое представление системы можно использовать для описания того, как влияют изменения приоритетов на верхних уровнях на приоритеты элементов нижних уровней.

2. Иерархии предоставляют более подробную информацию о структуре и функции системы на нижних уровнях и обеспечивают рассмотрение акторов и их целей на высших уровнях. Для удовлетворения ограничений на элементы уровня их лучше всего воспроизводить на следующем более высоком уровне. Например, природу можно рассматривать как актор, цель которого – использовать определенный материал и который подчиняется определенным законам в качестве ограничений.

3. Естественные системы, составленные иерархически, т. е. посредством модульного построения и затем сборки модулей, строятся намного эффективнее, чем системы, собранные в целом.

4. Иерархии устойчивы и гибки; они устойчивы в том смысле, что малые изменения вызывают малый эффект, а гибкие в том смысле, что добавления к хорошо структурированной иерархии не разрушают ее характеристик.

КАК ПОСТРОИТЬ ИЕРАРХИЮ

На практике не существует установленной процедуры генерирования целей, критериев и видов деятельности для включения в иерархию или даже в более общую систему. Это зависит от тех целей, которые мы выбираем для декомпозиции сложной системы.

Обычно эта процедура начинается с изучения литературы для обогащения мыслями, и часто, знакомясь с чужими работами, мы как бы проходим через стадию мозгового штурма для составления перечня всех концепций, существенных для задачи, независимо от их соотношения или порядка. Следует помнить, что основные цели устанавливаются на вершине иерархии; их подцели – непосредственно ниже вершины; силы, ограничивающие акторов, – еще ниже. Силы доминируют над уровнем самих акторов, которые, в свою очередь, доминируют над уровнем своих целей, ниже которых будет уровень их возможных действий, и в самом низу находится уровень различных возможных исходов (сценариев) (см. рис. 1.3). Это естественная форма, которую принимают иерархии, связанные с планированием и конфликтами. В иерархии, предназначенной для физической системы, возможные действия могут быть заменены методами конструирования. За ними должны следовать несколько промежуточных уровней. Прежде чем будет сформирован хорошо определенный план, могут потребоваться значительные критические замечания и перепроверки.

Существует достаточное сходство между проблемами, так что мы не всегда сталкиваемся с совершенно новой задачей при построении иерархии. Задачей для опытного исследователя в некотором смысле становится отождествление различных классов проблем, возникающих в реальных системах. Существует такое разнообразие этих систем, что исследователю необходимо знание идей и концепций, которыми оперируют специалисты. Это требует интеллекта, терпения и способности взаимодействовать с другими людьми, чтобы извлечь выгоду из их опыта и знаний.

Общая цель и другие критерии иерархии в социополитических приложениях могут не быть единственными. Они зависят от исследуемого вопроса. Это не является специфической особенностью иерархии, а присуще жизненным ситуациям. Например, в шахматах известны постоянные (априорные) величины, характеризующие веса фигур в начале игры. Имеются также текущие (апостериорные), или эмпирические величины, характеризующие веса фигур в зависимости от сопоставления занятых ими позиций в конце партии. Значения весов обоих типов для фигуры могут быть получены в соответствии с двумя положениями: 1) в зависимости от того, сколько клеток они контролируют, располагаясь на каждой клетке; 2) в зависимости от возможности фигуры объявить шах королю противника так, чтобы самой не быть убитой. Имеются следующие относительные веса коня, слона, ладьи и ферзя [6]:

	Случай 1	*Случай 2*
	Контроль клеток	*Угроза королю*
Постоянное значение	*3, 5, 8, 13*	*12, 13, 24, 37*
Текущее значение (получено эмпирически)	*350, 360, 540, 1000*	*12, 13, 18, 33*

При этом значения в случае 2 близки, а в случае 1 они различны. Анализ приводит к вопросу: «какова в действительности относительная ценность фигур в шахматах?» Очевидно, что единственного ответа здесь нет. Тем не менее может быть приемлемым ответ в терминах относительного упорядочивания значений.

Наше чувственное восприятие действует специфически, а именно, служит потребностям выживания. Поэтому, хотя мы и стараемся быть объективными при интерпретации опыта, наша способность понимать и абстрагировать – очень субъективна и обычно служит нашим нуждам! Выживание, по-видимому, является основой для выработки целей. В действительности, то, что мы подразумеваем под объективностью, есть разделённая субъективность. Поэтому формируемые нами иерархии объективны в соответствии с нашим собственным определением, так как они отражают коллективный опыт.

Важным замечанием при иерархическом подходе к решению задач является то, что функциональное воспроизведение системы может быть различным у разных лиц, однако люди обычно приходят к согласию по нижнему уровню альтернативных действий, которые нужно предпринимать, и по следующему за ним уровню характеристик этих действий. Например, нижний уровень может состоять из различных маршрутов движения транспорта между двумя пунктами, а уровень характеристик может включать время следования, сужения, выбоины, безопасность и т. д. В табл. 1.1 показаны уровни иерархий различных типов, однако лицо, формирующее иерархию, должно быть уверенным в том, что уровни естественно связаны друг с другом. При необходимости уровень может быть разбит на два уровня и более или совершенно удален.

1.4. ПРИОРИТЕТЫ В ИЕРАРХИЯХ

Иерархия, в том виде, в каком она представлена в предыдущем разделе, является более или менее заслуживающей доверия моделью реальной ситуации. Она отражает проведенный нами анализ наиболее важных элементов и их взаимоотношений, однако она – не достаточно мощное средство в процессе принятия решений пли планирования. Необходим метод определения силы, с которой различные элементы одного уровня влияют на элементы предшествующего уровня, чтобы можно было вычислять величину воздействий элементов самого низкого уровня на общую цель.

Таблица 1.1. Общее построение иерархий и декомпозиция

Общая иерархия системы	Ограничения и силы окружающей среды	Перспектива (акторы)	Цели акторов	Возможные действия	Исходы	Результирующий исход
Иерархия для конфликта	Ограничения	Акторы	Цель	Возможные действия	Исходы	Компромисс или устойчивый исход
Прямое или проектируемое планирование	Возможные организационные действия в настоящее время →	Другие акторы →	Цели других акторов →	Возможные действия →	Сценарии →	Логическое будущее ↓
Обратное или идеализированное планирование	Ответные возможные организационные действия ↑	← Другие акторы	← Цели других акторов	← Возможные действия других акторов	← Сценарии	← Желательное будущее
Анализ стоимость – эффективность	Критерии	Подкритерии	Цели	Возможные действия	Выборы	Лучший выбор или смесь
Выбор капиталовложений	Уровень риска	Основные силы	Критерии	Сферы задач	Характерные проекты	
Прогнозирование	Уровень риска	Основные силы	Критерии	Сферы задач	Категории	

Для большей ясности возвратимся к иерархии колледжа из предыдущего раздела. Как уже было отмечено, нас интересует «сценарий, по которому с наибольшей вероятностью будет обеспечено продолжительное существование колледжа». Для определения этого сценария сначала находим важность сил относительно общей цели. Затем для каждой силы определяем степень влияния акторов на эту силу. Отсюда несложным вычислением получаем степень влияния акторов на общую цель. Затем оцениваем важность целей для каждого актора и, наконец, определяем действенность различных сценариев в обеспечении достижения каждой цели. Повторив несколько раз упомянутые выше вычисления, получим «наилучший» сценарий.

Определим «степень влияния», или приоритеты, элементов одного уровня относительно их важности для элемента следующего уровня. Здесь представим только наиболее элементарные аспекты нашего метода. Психологическая мотивация и математические основы метода будут изложены позже.

Введем некоторые понятия. *Матрица* – это массив чисел в виде прямоугольной таблицы, например

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2{,}9 & 6 \\ 3 & 3{,}5 & 7 & 1 \\ 2{,}1 & 2 & 0 & 1{,}1 \end{bmatrix}$$

Горизонтальная последовательность чисел в матрице называется *строкой*, а вертикальная – *столбцом*. Матрица, состоящая только из одной строки или из одного столбца называется *вектором*, а с одинаковым числом строк и столбцов – *квадратной*. Полезно отметить, что с квадратной матрицей ассоциируются ее собственные векторы и соответствующие собственные значения. Пусть читателя не обескураживают эти понятия, поскольку подробное их объяснение будет дано в последующих главах.

Наш метод можно описать следующим образом. Допустим, заданы элементы одного, скажем, четвертого уровня иерархии и один элемент I следующего более высокого уровня. Нужно сравнить элементы четвертого уровня *попарно* по силе их влияния на *е*, поместить числа, отражающие достигнутое при сравнении согласие во мнениях, в матрицу и найти собственный вектор с наибольшим собственным значением. Собственный вектор обеспечивает упорядочение приоритетов, а собственное значение является мерой согласованности суждений.

Определим шкалу приоритетов для следующего примера. Пусть *A, B*, *C* и *D* обозначают стулья, расставленные по прямой линии, ведущей от источника света. Создадим шкалу приоритетов относительной освещенности для стульев. Суждения производит человек, стоящий около источника света, у которого, например, спрашивают: «Насколько сильнее освещенность стула *B* по сравнению с *C*?» Он отвечает одним из чисел для сравнения, записанных в таблице, и это суждение заносится в позицию (*B*, *C*) матрицы. По соглашению сравнение силы всегда производится для действия или объекта, стоящего в левом столбце, по отношению к действию или объекту, стоящему в верхней строке. Мы имеем матрицу попарных сравнений для четырех строк и четырех столбцов (матрица 4x4).

Освещенность	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Условимся, что это следующие числа. Пусть заданы элементы *A* и *B*; если:

- *A* и *B* одинаково важны, заносим 1;
- *A* незначительно важнее, чем *B*, заносим 3;
- *A* значительно важнее *B*, заносим 5;
- *A* явно важнее *B*, заносим 7;
- *A* по своей значительности абсолютно превосходит *B*, заносим 9 в позицию (*A*, *B*), где пересекаются строка *A* и столбец *B*.

При сравнении элемента с самим собой имеем равную значительность, так что на пересечении строки *A* со столбцом *A* в позиции (*A*, *A*) заносим 1. Поэтому главная диагональ матрицы должна состоять из единиц. Заносим соответствующие обратные величины: 1, 1/3, ..., или 1/9 на пересечениях столбца *A* и строки *B*, т. е. в позицию (*B*, *A*) для обратного сравнения *B* с *A*. Числа 2, 4, 6, 8 и их обратные величины используются для облегчения компромиссов между слегка отличающимися от основных чисел суждениями. Используем также рациональные числа для получения отношений из описанных выше значений шкалы, когда желательно увеличить согласованность всей матрицы при малом числе суждений (не менее $n-1$).

В общем случае, под согласованностью подразумевается то, что при наличии основного массива необработанных данных все другие данные логически могут быть получены из них. Для проведения парных сравнений n объектов или действий при условии, что каждый объект или действие представлены в данных по крайней мере один раз, требуется $(n-1)$ суждений о парных сравнениях. Из них можно просто вывести все остальные суждения, используя следующее отношение: если объект A_1 в 3 раза превосходит объект A_2 и в 6 раз превосходит A_3, то $A_1=3A_2$ и $A_1=6A_3$. Следовательно, $3A_2=6A_3$, или $A_2=2A_3$ и $A_3=1/2A_2$. Если численное значение суждения в позиции (2, 3) отличается от 2, то матрица будет несогласованной. Это случается часто и не является бедствием. Даже при использовании для суждений всех действительных чисел до тех пор, пока не будет суждений по основным $(n-1)$ объектам, получить согласованные числа невозможно. Добавим, что для большинства задач очень трудно определить $(n-1)$ суждений, связывающих все объекты или виды действия, одно из которых является абсолютно верным.

Известно, что согласованность положительной обратно-симметричной матрицы эквивалентна требованию равенства ее максимального собственного значения $\lambda_{\max}$ с n. Можно также оценить отклонение от согласованности разностью $\lambda_{\max}-n$, разделенной на $(n-1)$. Заметим, что неравенство $\lambda_{\max}\geq n$ всегда верно. Насколько плоха согласованность для определенной задачи, можно оценить путем сравнения полученного нами значения величины $(\lambda_{\max}-n)/(n-1)$ с ее значением из случайно выбранных суждений и соответствующих обратных величин матрицы того же размера. На странице даны соответствующие цифры для таких элементов. Более подробно согласованность обсуждается в следующих главах.

Вернемся теперь к нашему примеру освещенности стульев. В матрице для наших чисел имеется 16 полей. Четыре из них уже определены, а именно те, что находятся на диагонали, (*A*, *A*), (*B*, *B*), (*C*, *C*), (*D*, *D*) и равны единице, так как, например, стул *A* имеет одинаковую освещенность по отношению к самому себе. Для оставшихся после заполнения диагонали 12 чисел нужно провести шесть сравнений, поскольку остальные шесть являются обратными сравнениями и их оценки должны быть обратными величинами к оценкам первых шести. Допустим, что человек, используя рекомендованную шкалу, вносит число 4 в позицию (*B*, *C*), так как полагает, что интенсивность освещенности стула *B* по сравнению со стулом *C* находится между слабой и сильной. Тогда в позицию (*C*, *B*) автоматически заносится обратная величина, т. е. 1/4, что не обязательно, но в общем случае рационально. После проведения оставшихся пяти суждений, а также занесения их обратных величин, для всей матрицы получим

Освещенность	A	B	C	D
A	1	5	6	7
B	1/4	1	4	6
C	1/6	1/4	1	4
D	1/7	1/6	1/4	1

Следующий шаг состоит в вычислении вектора приоритетов по данной матрице. В математических терминах это – вычисление главного собственного вектора, который после нормализации становится вектором приоритетов. В следующей главе будет показано, что относительная освещенность стульев, выраженная этим вектором, удовлетворяет закону обратного квадрата в оптике. В отсутствие ЭВМ, позволяющей точно решить эту задачу, можно получить грубые оценки этого вектора следующими четырьмя способами, которые представлены ниже в порядке увеличения точности оценок.

1. Суммировать элементы каждой строки и нормализовать делением каждой суммы на сумму всех элементов; сумма полученных результатов будет равна единице. Первый элемент результирующего вектора будет приоритетом первого объекта, второй – второго объекта и т. д.

2. Суммировать элементы каждого столбца и получить обратные величины этих сумм. Нормализовать их так, чтобы их сумма равнялась единице, разделить каждую обратную величину на сумму всех обратных величин.

3. Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца (т. е. нормализовать столбец), затем сложить элементы каждой полученной строки и разделить эту сумму на число элементов строки. Это – процесс усреднения по нормализованным столбцам.

4. Умножить n элементов каждой строки и извлечь корень n-й степени. Нормализовать полученные числа.

Для простой иллюстрации того, что методами 1, 2 и 3 получаем предполагаемые ответы, используется урна с тремя белыми (Б), двумя черными (Ч) и одним красным (К) шарами. Вероятность извлечения Б, Ч или К шара, соответственно: 1/2, 1/3, 1/6. Легко убедиться, что любым из первых трех методов эти вероятности получатся при использовании следующей согласованной матрицы попарных сравнений. Метод 4 дает такой же результат.

	Б	Ч	К
Б	1	3/2	3
Ч	2/3	1	2
К	1/3	1/2	1

Отметим, что в общем случае, когда матрица не согласована, эти методы дают различные результаты. Применим различные методы оценки решения в примере со стульями. Метод 1 дает сумму строк этой матрицы в виде вектора-столбца, который для экономии места напишем в виде строки (19,00; 11,20; 5,42; 1,56). Сумма всех элементов матрицы получается путем сложения компонент этого вектора и равна 37,18. Разделив каждую компоненту вектора на это число, получим записанный в виде строки (0,51; 0,30; 0,15; 0,04) вектор-столбец приоритетов относительной освещенности стульев A, B, C и D соответственно.

Метод 2 дает сумму столбцов этой матрицы в виде вектора-строки (1,51; 6,43; 11,25; 18,00). Обратными величинами этих сумм являются (0,66; 0,16; 0,09; 0,06), а после нормализации становятся (0,68; 0,16; 0,09; 0,06).

Методом 3 нормализуем каждый столбец (складываем компоненты и делим каждую компоненту на эту сумму) и получаем матрицу

$$\begin{bmatrix} 0{,}66 & 0{,}78 & 0{,}53 & 0{,}39 \\ 0{,}13 & 0{,}16 & 0{,}36 & 0{,}33 \\ 0{,}11 & 0{,}04 & 0{,}09 & 0{,}22 \\ 0{,}09 & 0{,}03 & 0{,}02 & 0{,}06 \end{bmatrix}$$

Сумма строк является вектором-столбцом (2,36; 0,98; 0,46; 0,20), который после деления на размерность столбцов 4 позволяет получить вектор-столбец приоритетов (0,590; 0,245; 0,115; 0,050).

Метод 4 дает (0,61; 0,24; 0,10; 0,04).

Точное решение задачи, которое изложено далее, получается путем возведения матрицы в произвольно большие степени и деления суммы каждой строки на общую сумму элементов матрицы. С точностью до одной сотой это решение будет (0,61; 0,24; 0,10; 0,05).

Сравнивая полученные результаты, отметим, что точность повышается от 1 к 2 и далее к 3, однако одновременно усложняются вычисления. Если матрица согласована, то во всех четырех случаях векторы приоритетов будут одинаковыми. В случае несогласованности очень хорошее приближение можно получить только с помощью метода 4.

Полагая, что читателю известен способ умножения матрицы на вектор, приведём метод получения грубой оценки согласованности.

Умножив матрицу сравнений справа на полученную оценку вектора решения, получим новый вектор. Разделив первую компоненту этого вектора на первую компоненту оценки вектора решения, вторую компоненту нового вектора на вторую компоненту оценки вектора решения и т. д., определим еще один вектор. Разделив сумму компонент этого вектора на число компонент, найдем приближение к числу $\lambda_{\max}$ (называемому максимальным или главным собственным значением), используемому для оценки согласованности, отражающей пропорциональность предпочтений. Чем ближе $\lambda_{\max}$ к *n* (числу объектов или видов действия в матрице), тем более согласован результат.

Как будет ясно из теоретического обсуждения в последующих главах, отклонение от согласованности может быть выражено величиной $(\lambda_{\max}-n)/(n-1)$, которую назовем *индексом согласованности* (ИС).

Индекс согласованности сгенерированной случайным образом по шкале от 1 до 9 обратно-симметричной матрицы с соответствующими обратными величинами элементов, назовем *случайным индексом* (СИ). В Национальной лаборатории Окриджа коллеги (см. гл. 3) сгенерировали средние СИ для матриц порядка от 1 до 15 на базе 100 случайных выборок. Как и ожидалось, СИ увеличивались с увеличением порядка матрицы. Так как величина выборки была только 100, наблюдались статистические флуктуации в индексе при переходе от матрицы одного порядка к другому. Поэтому вычисления были повторены в школе Уортона для величины случайной выборки 500 в матрицах порядка до 11x11, а далее использовались предыдущие результаты для n=12, 13, 14, 15. Ниже представлены порядок матрицы (первая строка) и средние СИ (вторая строка), определенные так, как описано выше:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,00	0,00	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48	1,56	1,57	1,59

Отношение ИС к среднему СИ для матрицы того же порядка называется *отношением согласованности* (ОС). Значение ОС, меньшее или равное 0,10, будем считать приемлемым.

Чтобы проиллюстрировать на примере наши приближенные вычисления ИС, для нахождения $\lambda_{\max}$ используем приведенную выше матрицу и третий вектор-столбец, полученный методом 3. После умножения матрицы справа на вектор приоритетов (0,59; 0,25; 0,11; 0,05) имеем вектор-столбец (2,85; 11,11; 0,47; 0,20). Разделив компоненты этого вектора на соответствующие компоненты первого вектора, получим (4,83; 4,44; 4,28; 4,00), а в результате усреднения последних – 4,39. Отсюда ИС=(4,39—4)/3=0,13. Для определения того, насколько хорош этот результат, разделим его на соответствующий СИ=0,90. Отношение согласованности 0,13/0,90=0,14, что, пожалуй, не так уж близко к 0,10.

Эти сравнения и вычисления устанавливают приоритеты элементов некоторого уровня иерархии относительно одного элемента следующего уровня. Если уровней больше, чем два, то различные векторы приоритетов могут быть объединены в матрицы приоритетов, из которых определяется один окончательный вектор приоритетов для нижнего уровня.

1.5. ИНТУИТИВНОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Допустим, что *n* видов действия или объектов рассматриваются группой экспертов. Предположим, что цели группы следующие: 1) высказать суждения об относительной важности этих объектов; 2) гарантировать такой процесс получения суждений, который позволит количественно интерпретировать суждения по всем объектам.

Очевидно, что для достижения второй цели потребуется разработка соответствующего метода.

Нашей целью является описание метода получения из количественных суждений группы (т. е. из относительных величин, ассоциируемых с *парами* объектов) множества весов, ассоциируемых с *отдельными* объектами; в том смысле, который определен ниже, эти веса должны отражать количественные суждения группы. Благодаря такому подходу полученную из (1) и (2) информацию приводим в удобную форму без информационных потерь, свойственных качественным суждениям.

Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – совокупность объектов (возможных действий). Количественные суждения о парах объектов $\left(C_i, C_j\right)$ представляются матрицей размера $n \times n$

$$A = \left(a_{ij}\right),\ \left(i, j = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Элементы a_{ij} определены по следующим правилам:

Правило 1. Если $a_{ij} = \alpha$, то $a_{ji} = 1/\alpha$, $\alpha \neq 0$.

Правило 2. Если суждения таковы, что C_i имеет одинаковую с C_j относительную важность, то $a_{ij} = 1$, $a_{ji} = 1$; в частности, $a_{ii} = 1$ для всех *i*. Итак, матрица *A* имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

После представления количественных суждений о парах $\left(C_i, C_j\right)$ в числовом выражении через a_{ij}, задача сводится к тому, чтобы *n* возможным действиям $C_1, C_2, \ldots, C_n$ поставить в соответствие множество числовых весов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, которые соответствовали бы зафиксированным суждениям.

Для этого, во-первых, необходимо нечетко сформулированной задаче придать строгую математическую форму. Этот существенный (хотя и безобидный с виду) шаг является наиболее важным в любой задаче, в которой требуется представить жизненную ситуацию в терминах абстрактной математической структуры. Особенно важен он в рассматриваемой задаче, поскольку в ней процесс математической формулировки включает в себя ряд не явно видимых переходов. Поэтому в данной задаче желательно четко определить основные этапы процесса ее формулирования и как можно подробнее описать каждый этап, чтобы потенциальный пользователь мог составить собственное мнение о *значимости* и *ценности* этого метода для решения его конкретной задачи.

Основным является вопрос, связанный со смыслом нечетко сформулированного условия в изложении нашей цели: «...эти веса должны отражать количественные суждения группы». Это вызывает необходимость описания в точных, математических терминах, каким образом зависят веса ω_i от суждений a_{ij}. Другими словами, задача определения условий, которые накладываются на искомые веса, решается относительно полученных суждений. Необходимое описание проводится в три этапа, начиная от простейшего частного случая и кончая общим.

Этап 1. Предположим, что «суждения» – просто результат точных физических измерений. Пусть экспертам даны несколько камешков $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и точные весы. Чтобы сравнить C_1 и C_2, на весы кладут C_1 и считывают показания, скажем, $\omega_1 = 305$ г. Затем взвешивают C_2 и получают $\omega_2 = 305$ г. Деление ω_1 на ω_2 дает 1,25. После этого эксперты высказывают суждение:

«C_1 в 1,25 раза тяжелее C_2» и записывают это в виде $a_{12} = 1{,}25$. Таким образом, в идеальном случае точного измерения отношения между весами ω_i и суждениями a_{ij} выражаются в виде

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} = a_{ij} \text{ (для } i, j = 1, 2, \ldots, n\text{)} \tag{1.1}$$

и

$$A = \begin{bmatrix} \omega_1/\omega_1 & \omega_1/\omega_2 & \ldots & \omega_1/\omega_n \\ \omega_2/\omega_1 & \omega_2/\omega_2 & \ldots & \omega_2/\omega_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_n/\omega_1 & \omega_n/\omega_2 & \ldots & \omega_n/\omega_n \end{bmatrix}.$$

Тем не менее нереальным было бы требование выполнения этих условий в общем случае. В большинстве практических случаев это сделало бы задачу нахождения ω_i (при заданных a_{ij}) неразрешимой. Во-первых, даже физические изменения никогда не бывают точными в математическом смысле, и, следовательно, отклонения должны быть приняты во внимание; во-вторых, эти отклонения достаточно велики из-за ошибок в человеческих суждениях.

Этап 2. Чтобы понять, как установить допуски на отклонения, рассмотрим *i*-ю строку матрицы *A*. Элементами этой строки являются

$$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}$$

В идеальном (точном) случае эти величины не что иное, как отношения

$$\frac{\omega_i}{\omega_1}, \frac{\omega_i}{\omega_2}, \ldots, \frac{\omega_i}{\omega_j}, \ldots, \frac{\omega_i}{\omega_n}$$

Следовательно, в идеальном случае при умножении первого элемента этой строки на ω_1, второго – на ω_2 и т. д. получим

$$\frac{\omega_i}{\omega_1}\omega_1 = \omega_i, \quad \frac{\omega_i}{\omega_2}\omega_2 = \omega_i, \quad \ldots, \quad \frac{\omega_i}{\omega_j}\omega_j = \omega_i, \quad \ldots, \quad \frac{\omega_i}{\omega_n}\omega_n = \omega_i.$$

В итоге имеем строку идентичных элементов $\omega_i, \omega_i, \ldots, \omega_i$, тогда как в общем случае мы получили бы строку элементов, представляющих статистическое рассеивание значений вокруг ω_i. Поэтому, видимо, имело бы смысл требование равенства ω_i среднему этих значений. Следовательно, вместо выражения (1.1) в идеальном случае

$$\omega_i = a_{ij}\omega_j \ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

более реалистичные выражения для общего случая принимают вид (для каждого фиксированного i)

$$\omega_i = \text{среднее из } (a_{i1}\omega_1, a_{i2}\omega_2, \ldots, a_{in}\omega_n).$$

Иначе это можно записать в виде

$$\omega_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.2}$$

Несмотря на то, что условия для выражения (1.2) являются менее строгими, чем для выражения (1.1) все ещё остается вопрос: достаточны ли эти условия для существования решения; т. е. гарантируется ли решаемость задачи по определению единственных весов ω_i, при заданных a_{ij}?

Этап 3. Чтобы найти ответ на заданный выше существенно математический вопрос, необходимо записать (1.2) в ещё одном, более знакомом виде. Для этого необходимо подытожить цепь рассуждений по данному вопросу. При поиске условий, описывающих зависимость вектора весов ω от количественных суждений, мы вначале рассмотрели идеальный (точный) случай этапа 1 и получили выражение (1.1). Затем, ясно понимая, что в реальном случае потребуется допускать отклонения, мы предусмотрели такие допущения на этапе 2 и пришли к формулировке (1.2). Оказалось, что все это еще недостаточно реалистично, т. е. то, что выражение (1.2), имеющее силу в идеальном случае, все еще слишком строго для гарантирования существования такого вектора весов ω, который удовлетворял бы (1.2). Отметим, что при хороших оценках a_{ij} приближается к ω_i / ω_j и, следовательно, является малым возмущением этого отношения. Теперь выходит, что поскольку a_{ij} изменяется, соответствующее решение (1.2) получим (т. е. ω_i и ω_j могут изменяться, чтобы приспособиться к отклонению a_{ij} от идеального случая), если изменится n. Обозначим это значение n через $\lambda_{\max}$. Следовательно, задача

$$\omega_i = \frac{1}{\lambda_{\max}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.3}$$

имеет решение, которое также должно быть единственным. Это – хорошо известная задача о собственном значении, которой мы займемся в дальнейшем.

В общем случае отклонения в a_{ij} могут вызывать большие отклонения как в $\lambda_{\max}$, так и в ω_i, $i = 1, \ldots, n$. Однако в случае обратно-симметричных матриц, удовлетворяющих правилам 1 и 2, этого не наблюдается, т. е. имеется устойчивое решение.

Напомним, что мы представили интуитивное обоснование нашего подхода. Существует элегантный способ его математического формулирования, который детально описан в последующих главах. Излагая его в матричных обозначениях, начнем с того, что назовем идеальным случаем $A\omega = n\omega$, где *A* – согласованная матрица, и рассмотрим обратно-симметричную матрицу *A′* (являющуюся возмущением матрицы *A*), выявленную из суждений о парных сравнениях, а также решим задачу $A'\omega' = \lambda_{\max}\omega'$, где $\lambda_{\max}$ – наибольшее собственное значение *A′*.

Иногда интерес представляет превосходство, обратное относительно данной характеристики. Назовем его рецессивностью одного вида действия при сравнении с другим относительно этой характеристики. В этом случае решается задача нахождения левого собственного вектора υ в $\upsilon A = \lambda_{\max}\upsilon$. Компоненты υ и ω в общем случае являются взаимообратными величинами только тогда, когда *A* согласованна. Когда нет согласованности, они взаимообратны для $n = 2$ и $n = 3$. В общем, ожидать, что между ними будет существовать определенная взаимозависимость, не следует. Фактически эти два вектора соответствуют двум сторонам лика Януса — светлой и темной.

1.6. ПРИМЕР ИЕРАРХИЧЕСКОЙ КОМПОЗИЦИИ ПРИОРИТЕТОВ

Задача о выборе школы

Был проведен анализ трех школ *A*, *B* и *C* на предмет их желательности с точки зрения сына автора книги. Для сравнения были выбраны шесть независимых характеристик: учеба, друзья, школьная жизнь, профессиональное обучение, подготовка к колледжу и обучение музыке (см. рис. 1.4). Полученные матрицы попарных сравнений показаны в табл. 1.2 и 1.3.

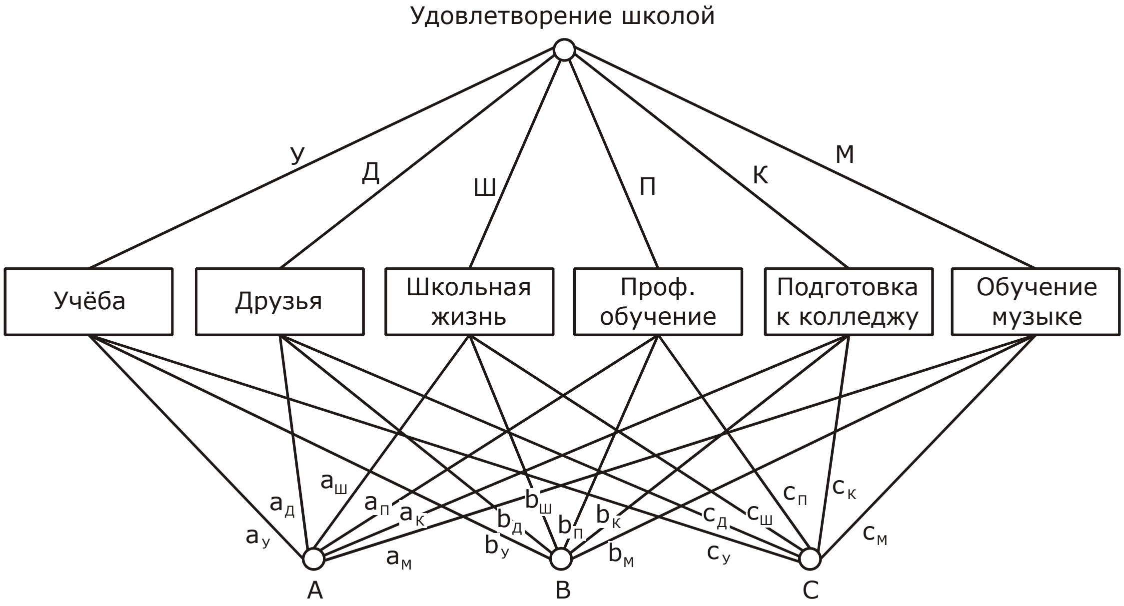


Рис. 1.4. Иерархия удовлетворения школой

Вектор приоритетов первой матрицы получается равным (0,32; 0,14; 0,03; 0,13; 0,24; 0,14), и соответствующее ему собственное значение $\lambda_{\max} = 7,49$, что достаточно далеко от значения в случае согласованности, равного 6; ИС=0,30 и ОС=0,30/1,24=0,24, что также достаточно велико.

Чтобы получить общее ранжирование школ, умножим матрицу табл. 1.4 справа на транспонированный вектор-строку весов характеристик. Это то же самое, что взвесить каждый из полученных выше шести собственных векторов приоритетом соответствующей характеристики и затем сложить (что допустимо при независимости характеристик). В результате имеем

A=0,37; *B*=0,38; *C*=0,25.

Сын поступил в школу *A*, так как она получила почти такую же оценку, что и школа *B* и была бесплатной, а школа *B* была частной, за обучение в ней нужно было платить около 1600 долл. в год. Это было проблемой конфликта между сыном и женой автора; первый отдал предпочтение школе *B*, а вторая – школе А, однако они не принимали во внимание вопрос денег. Хотя ОС для второго уровня было большим, они были склонны принять решение, несмотря на протесты автора, вызванные большой несогласованностью их суждений.

Объяснение рис. 1.4. Критерии на рисунке обозначены через У, Д, Ш, П, К и М. Если веса критериев и веса школ относительно каждого критерия таковы, как обозначено вдоль каждого отрезка на рисунке, то

Общая оценка школы $\mathrm{A} = a_У У + a_Д Д + a_Ш Ш + a_П П + a_К К + a_М М$.

Общая оценка школы $\mathrm{B} = b_У У + b_Д Д + b_Ш Ш + b_П П + b_К К + b_М М$.

Таблица 1.2. Сравнение характеристик относительно общего удовлетворения школой

	Учёба	Друзья	Школьная жизнь	Проф. обучение	Подготовка к колледжу	Обучение музыке
Учёба	1	4	3	1	3	4
Друзья	1/4	1	7	3	1/5	1
Школьная жизнь	1/3	1/7	1	1/5	1/5	1/6
Проф. обучение	1	1/3	5	1	1	1/3
Подготовка к колледжу	1/3	5	5	1	1	3
Обучение музыке	1/4	1	6	3	1/3	1

$\lambda_{\max} = 7{,}49$; $ИС = 0{,}30$; $ОС = 0{,}24$

Таблица 1.3. Сравнение школ относительно шести характеристик

Учёба	A	B	C
A	1	1/3	1/2
B	3	1	3
C	2	1/3	1

$\lambda_{\max} = 3{,}05$

$ИС = 0{,}025$

$ОС = 0{,}04$

Друзья	A	B	C
A	1	1	1
B	1	1	1
C	1	1	1

$\lambda_{\max} = 3{,}00$

$ИС = 0$

$ОС = 0$

Школьная жизнь	A	B	C
A	1	5	1
B	1/5	1	1/5
C	1	5	1

$\lambda_{\max} = 3{,}00$

$ИС = 0$

$ОС = 0$

Проф. обучение	A	B	C
A	1	9	7
B	1/9	1	1/5
C	1/7	5	1

$\lambda_{\max} = 3{,}21$

$ИС = 0{,}105$

$ОС = 0{,}18$

Подготовка к колледжу	A	B	C
A	1	1/2	1
B	2	1	2
C	1	1/2	1

$\lambda_{\max} = 3{,}00$

$ИС = 0$

$ОС = 0$

Обучение музыке	A	B	C
A	1	6	4
B	1/6	1	1/3
C	1/4	3	1

$\lambda_{\max} = 3{,}05$

$ИС = 0{,}025$

$ОС = 0{,}04$

Таблица 1.4.

Учёба	Друзья	Школьная жизнь	Проф. обучение	Подготовка к колледжу	Обучение музыке
0,16	0,33	0,45	0,77	0,25	0,69
0,59	0,33	0,09	0,05	0,50	0,09
0,25	0,33	0,46	0,17	0,25	0,22

Общая оценка школы $\mathrm{C} = \mathrm{c_У У + c_Д Д + c_Ш Ш + c_П П + c_К К + c_М М}$.

Предыдущие вычисления могут быть представлены в виде следующего матричного произведения:

$$\begin{bmatrix} 0{,}16(a_{\text{У}}) & 0{,}33(a_{\text{Д}}) & 0{,}45(a_{\text{Ш}}) & 0{,}77(a_{\text{П}}) & 0{,}25(a_{\text{К}}) & 0{,}69(a_{\text{М}}) \\ 0{,}59(b_{\text{У}}) & 0{,}33(b_{\text{Д}}) & 0{,}09(b_{\text{Ш}}) & 0{,}05(b_{\text{П}}) & 0{,}50(b_{\text{К}}) & 0{,}09(b_{\text{М}}) \\ 0{,}25(\mathrm{c}_{\text{У}}) & 0{,}33(\mathrm{c}_{\text{Д}}) & 0{,}46(\mathrm{c}_{\text{Ш}}) & 0{,}17(\mathrm{c}_{\text{П}}) & 0{,}25(\mathrm{c}_{\text{К}}) & 0{,}22(\mathrm{c}_{\text{М}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}32(У) \\ 0{,}14(Д) \\ 0{,}03(Ш) \\ 0{,}13(П) \\ 0{,}24(К) \\ 0{,}14(М) \end{bmatrix}$$

Для выявления меры удовлетворения кандидата школой сначала следует перечислить важнейшие критерии, характеризующие школы, и вычислить сравнительную желательность этих критериев для кандидата. Желательность будет меняться от одного кандидата к другому. Например, для одного ученика друзья более привлекательны, чем подготовка к колледжу, в то время, как другой ученик имеет противоположное мнение.

Следующим шагом является вычисление относительного ранга каждой школы по каждому критерию. Например, в одной школе лучше обучают музыке, в то время как другая славится профессиональным обучением.

Для получения обшей оценки каждой школы, нужно, во-первых, умножить вес оценки этой школы по некоторому критерию на вес этого критерия. Затем следует сложить значения, полученные для каждой школы по всем критериям. Например, для школы *А*, $\mathrm{a_У}$ есть относительный вес учебы в этой школе. Так как относительный вес учебы есть $\mathrm{У}$, общий вес учебы для школы *А* будет $\mathrm{a_У У}$. Таким же образом вычисляем $\mathrm{a_Д Д}$, $\mathrm{a_Ш Ш}$, $\mathrm{a_П П}$, $\mathrm{a_К К}$ и $\mathrm{a_М М}$. Следовательно, общая оценка школы *А* будет суммой общих весов упомянутых видов деятельности, т. е. общая оценка школы

$$\mathrm{A = a_У У + a_Д Д + a_Ш Ш + a_П П + a_К К + a_М М}.$$

Таблица 1.5. Общее удовлетворение школой

	Учёба	Друзья	Школьная жизнь	Проф. обучение	Подготовка к колледжу	Обучение музыке
Учёба	1	5	7	5	3	1
Друзья	1/5	1	3	1/5	1/6	1/6
Школьная жизнь	1/7	1/3	1	1/4	1/5	1/5
Проф. обучение	1/5	5	4	1	1/5	1/6
Подготовка к колледжу	1/3	6	5	5	1	1
Обучение музыке	1	6	5	6	1	1

$\lambda_{\max} = 6{,}68$; $ИС = 0{,}14$; $ОС = 0{,}14$.

Соответствующий собственный вектор – $(0{,}33;\ 0{,}05;\ 0{,}03;\ 0{,}09;\ 0{,}23;\ 0{,}27)$.

Читатель, которого интересует упрямство в юношеских суждениях, может захотеть узнать, как выглядели приоритеты три года спустя (табл. 1.5). Молодой человек (в 18 лет) больше не считает, что друзья или профессиональное обучение так важны. Его интерес к колледжу и музыке представляется преобладающим. Колледж и музыка стали для него насущной потребностью, а не отдалёнными стремлениями.

Согласованность также очень повысилась. Приоритеты школ относительно характеристик получились теми же, что и раньше, и сейчас намного яснее, что тогда был сделан правильный выбор. Приоритеты школ следующие: A=0,40; B=0,36; C=0,25.

1.7. ПРОЦЕДУРА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИОРИТЕТОВ

Первым требованием при анализе функционирования системы является построение иерархии, воспроизводящей функциональные отношения. Заметим, что для наиболее простых систем напрашивается вид иерархии по аналогии с функциями системы. Тем не менее система может быть очень сложной, и тогда нелегко выявить иерархическую структуру, которая ей соответствует. Используя прямой подход, мы часто прибегали к процессу мозгового штурма, перечисляя все элементы, относящиеся к иерархии. Затем их располагали по группам в соответствии с влиянием между группами. Эти группирования служили уровнями иерархии. Для процесса группирования может быть использована техническая процедура, описываемая далее. Полезно отметить, что две характеристики уровня иерархии, имеющие много общего, следует сгруппировать для сравнений в одну, более общую характеристику. Например, качество и размер часто сочетаются и могут быть соединены в группе годности или приемлемости.

Для повышения качества обоснованных суждений на входе, необходимо, чтобы иерархия видов действия, целей и высших, общих, целей была тщательно построена. Может потребоваться исследование для идентификации и характеристики тех свойств на уровнях иерархии, которые влияют на свойства более высоких уровней или на осуществление целей на высших уровнях.

После разделения понятий на категории тщательно и методично доводится до конца процесс определения целей, ради которых изучается задача и строится иерархия. При структурировании процесса существенным моментом является экспериментирование. Самое важное, чтобы знания и суждения отдельного лица или группы имели хорошую возможность быть адекватно и точно выраженными. Это – задача не для нетерпеливого и вспыльчивого руководителя. Первостепенное значение здесь приобретает дипломатичность и умение прислушаться к чужому мнению. Однако сам лидер должен быть уверен, что различия во взглядах не вызывают ухудшения процесса. Время от времени участникам помогает напоминание о том, что кто-то должен заниматься проблемой, и если они не в состоянии придать определенную форму своим мыслям, то результат может получиться обратный тому, который они желали бы получить при благоприятном протекании процесса.

Во избежание последующих споров, перед тем, как приступить к определению приоритетов, необходимо попытаться записать определения введенных элементов.

Такой же подход может быть использован и одним лицом, принимающим решения, которое вникает в стоящую перед ним проблему и устанавливает приоритеты, отражающие его убеждения и позиции. В сложной ситуации нельзя надеяться на то, что проблемы могут быть разрешены интуитивным, а не четко сформулированным пониманием важнейших факторов. Постоянная забота о том, чтобы не упустить во время процесса некоторые важные факторы, может оказаться непроизводительной. Если индивидуум действительно понимает процесс, то он должен уметь выделить важные факторы и продолжать проверять свои взгляды относительно оставшихся факторов, также важных, но еще не рассмотренных. Это является аргументом в пользу того, что следует уделить время на изучение проблемы и не торопиться.

Качество полученного результата можно оценить тем, насколько логически удовлетворительны ответы. Они должны, в некотором смысле, быть согласованными с начальными данными. Например, у звена, которому оказано предпочтение перед другими звеньями в начальных попарных суждениях на некотором уровне, должен получиться более высокий ранг и т. д. Конечно, важнейшей целью модели является получение согласованного порядка. Отметим, что общее упорядочение вначале не известно, а имеются только попарные сравнения, которые фактически могут быть несогласованными. Результаты должны соответствовать интуитивным предположениям о разумном исходе. В противном случае было бы противоречие между высказанными суждениями и теорией.

Важно отметить, что числа, используемые в шкале, являются абсолютными величинами, а не просто порядковыми числами. Это говорит о том, что наша шкала не позволяет проводить сравнения, если интенсивность превышает 9. Как уже указывалось, элементы должны быть сгруппированы в кластеры, в пределах каждого из которых они сравнимы по этой шкале, а кластеры, в свою очередь, также должны сравниваться по той же шкале. Заметим, что может возникнуть необходимость создания промежуточных кластеров для проведения относительных сравнений, идущих от кластера с наименьшими по весам (или слабейшими) элементами к кластеру с наибольшими по весам (или сильнейшими) элементами. Это естественный путь, а не изобретение ради теории. Мы не можем непосредственно сравнивать вес песчинки с весом Солнца. Нужен постепенный переход.

Особенно тщательно должны устанавливаться приоритеты высших уровней иерархии, так как для них наиболее необходим консенсус, ввиду того, что эти приоритеты – ведущие в иерархии. На каждом уровне должна быть обеспечена независимость представляемых критериев, или, по крайней мере, критерии должны достаточно различаться, и эти различия могут быть зафиксированы как независимые характеристики на уровне. Для успешного фиксирования независимости может оказаться необходимым пересмотр элементов. Как будет показано в гл. 8, наш подход можно распространить и на взаимосвязь критериев, когда зависимость является внутренним свойством и ею нельзя пренебречь. При движении вниз по иерархии ожидается большее непостоянство во мнениях между в общем-то совместимыми людьми при достижении операционного уровня. В области, где люди сходятся во взглядах как на смысл, так и на важность элементов, следует размещать больше ресурсов; в той же области, в которой люди расходятся во взглядах на смысл или важность, их суждения имеют тенденцию сводить на нет мнения друг друга, и данная область получит меньшую долю действия до тех пор, пока ей не будет оказана сильная поддержка. Если область важна для нас, но в ней имеется расхождение во мнениях, то следует воздержаться от действий до тех пор, пока люди лучше не разберутся во взглядах и не придут к согласованному действию. Это является логическим исходом иерархического подхода. Там, где есть расхождение, люди будут неудовлетворенными, так как они не встречают понимания своих суждений. С другой стороны, если взгляды сходятся, то люди испытывают удовлетворение.

Большой группе людей разной квалификации потребуется много времени для построения иерархии и проведения суждений. В такой группе может быстро наступить утомление, и за время, выделенное для встречи, не будут получены плодотворные результаты. Наилучший способ вовлечь большую группу людей – либо выбрать узкую цель для дискуссии, либо, что лучше, заставить людей построить иерархию (или заготовить для них некоторую иерархию для обсуждения), а затем разделить их на однородные группы и дать возможность каждой группе производить суждения по тем частям иерархии, которые отражают их частные интересы. Людям следует сказать, что некоторые из них могут почувствовать тщетность своих усилий во время процесса; им можно посоветовать прогуляться или принять участие в обсуждении в отдельной комнате, в то время как другие будут продолжать работу, а затем, когда они почувствуют прилив сил, вернуться. Это позволит избежать ухудшения процесса.

Конечно, есть моменты, когда могут действовать политические пристрастия, скрытые «домашние заготовки», раскол и другие мотивы. В этом случае взаимодействие и сотрудничество в группе затрудняются. Мы сталкивались с такими проблемами на практике при использовании метода анализа иерархии (МАИ). Наше заключение таково, что МАИ является мощным средством для тех, кто хочет оценить как свои стратегии, так и стратегии своих оппонентов. Тех, кто не желает участвовать в процессе, нельзя заставить, однако их иногда можно убедить. Процесс движется быстрее, если участники имеют общие цели, долговременный близкий контакт, работу в климате социального одобрения и одинаковый статус.

Последним замечанием является то, что взаимодействие не похоже на брак, о котором люди склонны иметь романтические представления, однако после вступления в него они сталкиваются с множеством трений, ссор и разногласий. Тем не менее, в общем, жизнь продолжается, и имеются фундаментальные точки согласия и общие потребности, которые удерживают людей друг с другом. Поэтому входить в процесс группового взаимодействия никто не должен со слишком большими надеждами и сильным предрасположением к правильности и порядку.

Теперь обратим внимание на следующий этап процесса, который заключается в получении суждений от экспертов.

Заданы элементы уровня иерархии, и нужно составить матрицу попарных сравнений между этими элементами относительно каждого элемента следующего более высокого уровня, который служит критерием или сравниваемым свойством. Лицу, высказывающему суждения, задают вопросы следующего типа: «Какой элемент из предлагаемой пары элементов матрицы кажется вам более наделенным или способствующим данному свойству? Насколько сильно это преобладание: равное, слабое, сильное, очевидное или абсолютное, или же это компромиссная величина между смежными значениями?»

Вопрос должен быть тщательно сформулирован, чтобы выявить суждения или ощущения вовлеченных лиц. Следует сохранять единообразие при постановке вопросов. Важно сосредоточить внимание на свойствах, так как для человеческого мышления характерно стремление к нечетким обобщениям.

Замечание. Для получения набора приоритетов, которые отражают достоинство или положительное влияние объектов, набор свойств, относительно которых они сравниваются, должен быть сформулирован таким образом, чтобы выявлять желательные отличительные черты элементов. Например, стоимость поездки в отпуск получит более высокий приоритет для более дорогого места проведения отпуска, но, в действительности, этому приоритету следует быть низким. В этом случае вопрос, который нужно задать, будет звучать так: «В каком месте проведения отдыха получим большую экономию денег?» А не так: «Какой курорт обходится дороже?»

Если в суждениях индивидуумов есть различия, им позволяется рассмотреть случай самим. Тогда они либо достигнут консенсуса (что иногда случается даже после жарких споров), либо используют какое-нибудь правило, существующее для достижения единого суждения, например, правило большинства. Известно, что отдельные лица меняют свою позицию. В некоторых случаях целая группа меняла свою позицию после того, как выслушивала доводы, представленные одним из ее членов. В ряде случаев может быть достигнут компромисс, когда люди принимают суждения, высказанные другими в ответ на согласие оппонентов принять их собственные суждения в более важной для них сфере.

Когда люди неохотно предоставляют свое суждение, можно следовать процедуре типа аукциона, предлагая различные значения суждений и спрашивая людей, как они их воспринимают. Отсутствие заметного различия двух элементов часто означает, что их влияние на характеристику одинаково. Когда нет согласия, каждый эксперт записывает свои суждения, и получаемые решения проверяются для более ясного понимания того, что может быть сделано (если вообще что-либо может быть сделано). Есть моменты, когда различия между людьми препятствуют действию.

Когда все суждения получены, экспертов спрашивают, насколько верно они отражают понимание ими проблемы и верно ли отражены их суждения. Это позволяет избежать неприятных ощущений, появляющихся у людей от того, что их мнением пренебрегли. Если время ограничено, то дебаты можно сократить, однако людям следует напомнить, что это их проблема и для получения хороших результатов требуется определенное время. Всегда следует советоваться с участниками об адекватности иерархического представления их задачи с представленными ими суждениями. Если есть возражения, то их следует тщательно и терпеливо рассмотреть. Если желателен пересмотр, то его можно провести быстро, определяя как подзадачу и сообщая результаты группе.

Зачастую можно отметить для себя области наибольших разногласий в суждениях и вновь поднять вопрос о пересмотре этих суждений позже во время обсуждения.

Процедура может начаться с заострения внимания на строках матрицы в порядке преобладания соответствующих элементов, по существу, подразумевая, что люди, вероятно, заранее укажут порядок доминирования элементов. Вначале сравниваются сильнейший и слабейший элементы, чтобы получить ориентир для других величин. Конечно, это не всегда возможно. Другим способом является попытка провести те сравнения, в которых эксперты чувствуют уверенность.

Численные значения и их обратные величины вводятся в матрицу каждый раз, когда получаются суждения, и вскоре люди привыкают представлять свои суждения непосредственно в виде чисел. Можно использовать геометрические средние суждений, если участники не хотят дебатов. Это, вероятно, менее желательная альтернатива. Иногда можно получить индивидуальные векторы приоритетов и в качестве ответа принять их геометрическое среднее.

Следует отметить, что временами критерии с более низкими приоритетами в конечном счете определяют выбор альтернатив. Рассмотрим покупку автомобиля семьей из четырех человек. Самым важным критерием является имеющийся в распоряжении семьи бюджет (приоритет 0,52). Следующим является цена автомобиля (приоритет 0,23). Сравнительно низким приоритетом обладают модель и размеры (приоритет 0,16) и, наконец, экономичность управления (приоритет 0,09). После того, как семья отберет несколько машин с одним уровнем цен, который позволяет ее бюджет, окончательный выбор одного автомобиля будет обусловлен моделью и экономичностью. Критерии с более высоким приоритетом помогают в отборе подходящего класса машин, в то время как критерии с более низким приоритетом помогают в выборе отдельного автомобиля среди разных марок.

В отношении процесса суждений иногда возникают вопросы четырех типов: 1) первичный эффект, т. е. не может ли оказать косвенного влияния на результат то, что рассматривается вначале при проведении суждений; 2) эффект новизны, или влияние более поздней информации на ранее полученную; 3) выступление не в своей роли, когда человек берет на себя роль другого и вместо него производит суждения, недостаточно понимая того, в чьей роли он выступает; 4) личное косвенное влияние при участии в групповом принятии решений. Большинство этих явлений может происходить при обычной групповой процедуре. Их влияние ослабляется, если повторяющимся взаимодействиям уделяется больше времени и люди предупреждены о личном влиянии. Другими словами, при корректировке задачи путем различных повторений названные трудности выдвигаются на передний план, что приводит в итоге к конечному осуществлению решения, определяемому группой как наиболее характерному для рассматриваемой задачи.

Для лица, принимающего решения

Если вы столкнулись с некоторым количеством действий, среди которых нужно сделать выбор и у вас есть сомнения в критериях, по которым вы проводите оценку, сравните попарно критерии относительно *кратко-* и *долгосрочных* действий, *риска* и *преимуществ*, а также постройте матрицу попарных сравнений относительно эффективности и успеха. Наконец, на самом нижнем уровне сравните выбираемые действия относительно каждого критерия, составьте веса иерархически и выберите действие с высшим приоритетом. Если вы разобрали достаточно суждений и уверены в том, что рассмотрели все существенные факторы и правильные суждения, бросьте терзаться вашим выбором. Вы сделали все, что было в человеческих силах для того, чтобы сделать выбор.

Для быстрых решений в текущих делах заведите картотеку ваших иерархий по работе, суждений по ним и полученных приоритетов. Отметьте, какие суждения должны быть заменены для получения желательного результата. Наконец, добавьте элементы вместе с соответствующими суждениями, если необходимо получить новые приоритеты. Это также можно сделать во взаимодействии с ЭВМ, в которой хранится информация.

Выбор перечня ценных бумаг требует построения иерархии как для стоимости, так и для эффективности. Отношения эффективности к стоимости затем используются для принятия решений.

1.8. РЕЗЮМЕ

Подход к парным сравнениям, основанный на решении задачи о собственном значении, обеспечивает способ шкалирования, особенно в тех сферах, где не существует измерений и количественных сравнений. Мера согласованности позволяет возвратиться к суждениям, модифицируя их для улучшения общей согласованности. Участие нескольких человек позволяет приходить к компромиссам между различными элементами, а также может вызвать диалог о том, каким следует быть действительному отношению – компромиссу между различными суждениями, представляющими разный опыт.

Этапы процесса проходят следующим образом:

1. Сформулируйте задачу.
2. Поставьте задачу в общем плане – вставьте ее (если есть необходимость) в большую систему, включающую другие действующие лица, их цели и результаты.
3. Идентифицируйте критерии, влияющие на задачу.
4. Постройте иерархию общих критериев, частных критериев, свойств альтернатив и самих альтернатив.
5. В задаче с многими участниками уровни могут относиться к окружающей среде, акторам, их целям, политике и результатам, из которых получаем обобщенный результат (состояние сферы действия).
6. Чтобы устранить неясность, тщательно определите каждый элемент в иерархии.
7. Установите приоритеты первичных критериев относительно их воздействия на общую цель, называемую фокусом.
8. Ясно сформулируйте вопрос для парных сравнений в каждой матрице. Обратите внимание на ориентацию каждого вопроса, например, стоимость должна уменьшаться, а эффективность увеличиваться.
9. Установите приоритеты частных критериев относительно своих общих критериев.
10. Введите суждения о попарных сравнениях и их обратные величины.
11. Вычислите приоритеты путем суммирования элементов каждого столбца и деления каждого элемента на общую сумму столбца. Усредните по строкам результирующую матрицу, и вы получите вектор приоритетов. Для (12) – (15) см. последующие главы.
12. В случае сценариев прокалибруйте их переменные состояния по шкале от -8 до +8 в зависимости от того, насколько они отличаются от существующего Состояния, обозначенного 0.

13. Составьте веса в иерархии для получения общих приоритетов, а также составных значений переменных состояния, которые вместе определяют общий результат.

14. В случае выбора среди альтернатив выберите альтернативу с наибольшим приоритетом.

15. В случае размещения ресурсов оцените стоимость альтернативы, вычислите отношение эффективности к стоимости и распределите ресурсы соответствующим образом: или полностью, или пропорционально. В задаче определения приоритетов стоимости распределите ресурсы пропорционально приоритетам.

1.9. ИЕРАРХИИ И СУЖДЕНИЯ, ПОЛУЧАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ АНКЕТИРОВАНИЯ

Иерархию в рассматриваемой проблеме можно выявить посредством анкетирования, синтезировать результат и продолжить дело с помощью анкеты для выявления суждений.

Мы предлагаем простую иллюстрацию того, как могут быть получены суждения для одной матрицы с использованием анкеты. Тот же метод может быть применен для иерархии. Рассмотрим пример для получения суждений об относительной освещённости стульев. Обозначим значения шкалы, располагая их в ряд от одного крайнего значения к равенству и затем вновь повышая их до второго крайнего значения. В левом столбце перечислим все альтернативы, которые нужно сравнить по степени превосходства с другими альтернативами из правого столбца. Всего каждый столбец содержит $\left[n(n-1)\right]/2$ альтернатив. Затем эксперты должны отметить суждение, которое выражает превосходство элемента из левого столбца над соответствующим элементом из правого столбца, расположенном в той же строке. Если такое превосходство в действительности имеет место, то одна из позиций левее равенства будет отмечена. В противном случае будет отмечено равенство, или некоторая позиция справа. То же проделываем и для других альтернатив (см. табл. 1.6).

Таблица 1.6. Относительная освещенность

Столбец I	Абсолютное	Очень сильное	Сильное	Слабое	Равенство	Слабое	Сильное	Очень сильное	Абсолютное	Столбец II
C_1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C_2
C_1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C_3
C_1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C_4
C_2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C_3
C_2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C_4
C_3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C_4

ГЛАВА 2
ПОУЧИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

2.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе, в основном с помощью примеров, наш метод развивается дальше. Вначале обсуждается эксперимент с освещенностью стульев и показывается, что относительная яркость стульев, определенная с помощью субъективных парных сравнений, очень близка к яркости, предсказываемой законом обратного квадрата оптики. Для дальнейшей иллюстрации того, что нашим методом близкая аппроксимация получается при известных фактических данных, представлены результаты элементарного исследования влияния стран в зависимости от их национальных богатств. Затем следует пример оценки относительного расстояния шести городов от Филадельфии. Далее рассматривается различие между полной и неполной иерархиями.

Заканчивается глава двумя примерами. Они были выбраны с целью продемонстрировать определение общего приоритета элементов нижнего уровня в иерархии с более чем двумя уровнями. Первый из этих примеров позволяет провести некоторые наблюдения более общего характера.

2.2. ТЕСТЫ НА ТОЧНОСТЬ, СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ И МЕДИАННОЕ АБСОЛЮТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Значительный интерес представляет вопрос о близости вектора приоритетов, полученного нашим методом, к «действительному» вектору приоритетов. Одним из способов установления этой близости является применение метода к ситуациям, в которых возможно определение фактических чисел. Для таких случаев проверим, насколько точен вектор приоритетов.

Для проверки точности необходимо сравнить оценки в экспериментах с действительными ответами, которые известны. Сравнение чисел включает использование статистических мер. Для подтверждения теоретических результатов в сравнении с реальностью имеется немного мер. Две из них – среднеквадратичное отклонение и медианное абсолютное отклонение от медианы. Обычно они используются для сравнения – выбора среди нескольких выборочных оценок ближайшей к действительности оценки, а не абсолютной меры. Обе оценки являются средними измерения разброса множества измерений от известного множества основных величин.

Отклонения между малыми числами, вероятно, будут малы. Чтобы показать, насколько они малы в абсолютных значениях, их надо разделить на среднее значение числа, от которого они получены. В нашем случае это будет $1/n$, где n – число сравниваемых объектов. Кстати, одну из мер ошибки можно получить, если взять разности (или абсолютные разности), взвесить их приоритетами, взять их среднее, затем разделить на $1/n$, т. е.

$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \left| \omega_i - x_i \right|$, где ω_i – приоритеты, x_i – их оценки.

Среднеквадратичное отклонение (СКО) двух наборов чисел $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ есть

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - b_i\right)^2}$$

Медиана набора n чисел получается расположением чисел в возрастающем порядке и выбором члена, находящегося посередине, если n – нечетное, и среднего из двух серединных членов, если n – четное. Медианное абсолютное отклонение от медианы (МАО) набора чисел $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ дается выражением:

$$\textit{Медиана}\ \left\{\left|\left(a_i - b_i\right) - \textit{медиана}\left(a_i - b_i\right)\right|\right\}.$$

В качестве иллюстрации может служить пример интенсивности освещения в следующем разделе.

2.3. ИНТЕНСИВНОСТЬ ОСВЕЩЕНИЯ И ЗАКОН ОБРАТНОГО КВАДРАТА

В гл. 1 приведен пример освещенности стульев, вынесены суждения и получено решение для относительной освещенности. Четыре идентичных стула были расположены по прямой от источника света на расстоянии 9, 15, 21 и 28 ярдов. Целью было: попытаться сравнить попарно относительную освещенность стульев, если смотреть на них от источника света, заполнить матрицу суждений и получить взаимоотношение между стульями и расстоянием до источника света. Этот эксперимент повторялся дважды с различными экспертами, матрицы суждений которых приводятся. Первая из этих матриц уже была приведена в гл. 1.

Относительная визуальная освещенность

(Первое испытание)

	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1	5	6	7
C_2	1/5	1	4	6
C_3	1/6	1/4	1	4
C_4	1/7	1/6	1/4	1

(Второе испытание)

	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1	4	6	7
C_2	1/4	1	3	4
C_3	1/6	1/3	1	2
C_4	1/7	1/4	1/2	1

Экспертами в первой матрице были маленькие дети автора – 5 и 7 лет, которые представляли свои качественные суждения. Экспертом во второй матрице была жена автора, не присутствовавшая при вынесении суждений детьми.

Собственный вектор относительной освещенности

(Первое испытание)	(Второе испытание)
0,61	0,62
0,24	0,22
0,10	0,10
0,05	0,06
$\lambda_{\max} = 4{,}39$	$\lambda_{\max} = 4{,}1$
ИС=0,13	ИС=0,03
ОС=0,14	ОС=0,03

Сравним собственные векторы для первого и второго испытания с последним столбцом табл. 2.1, вычисленным из закона обратного квадрата оптики. Интересно и важно отметить, что в данном случае суждения отразили закон природы. Представляется, что то же может произойти и в других сферах восприятия и познания, что мы увидим позже.

Таблица 2.1. Закон обратного квадрата оптики

Расстояние	Нормализованное расстояние	Квадрат нормализованного расстояния	Обратная величина предыдущего столбца	Нормализованный столбец обратной величины	Округление
9	0,123	0,015129	66,098	0,6079	0,61
15	0,205	0,042025	23,79	0,2188	0,22
21	0,288	0,082944	12,05	0,1108	0,11
28	0,384	0,147456	6,78	0,0623	0,06

Отметим чувствительность результатов в тех случаях, когда объект находился очень близко к источнику света. Причина этого в том, что здесь на относительные показатели сильно влияют неточности определения абсолютных величин. Малая ошибка в оценке расстояний до источника света дает значительную ошибку в результатах. В этом сенсорном эксперименте достойна внимания гипотеза о том, что наблюдаемая интенсивность освещенности меняется (приблизительно) обратно пропорционально квадрату расстояния до источника. Чем тщательнее спланирован эксперимент, тем лучше получаются результаты при визуальных наблюдениях.

Среднеквадратичное отклонение векторов (0,62; 0,22; 0,10; 0,06) и (0,61; 0,22; 0,11; 0,06) равно $\{1/4\ [(0{,}01)^2 + 0 + (0{,}01)^2 + 0]\}^{1/2} = 2{,}23\times10^{-3}$. Медианное абсолютное отклонение будет следующим. Разность двух векторов равна (0,01; 0; -0,01; 0). Медиана этих чисел равна (0 + 0)/2 = 0. Отклонения от медианы будут (0,01; 0; -0,01; 0). Медиана их абсолютных значений будет $(0+0{,}01)/2 = 5\times10^{-3}$. Значимость как СКО, так и МАО может быть определена делением их величин на среднюю величину компонент вектора, равную $1/n$, где n – число компонент. Оба вектора почти одинаковы, если хотя бы одно из отношений, например, меньше чем 0,1.

2.4. НАЦИОНАЛЬНЫЕ БОГАТСТВА СТРАН И ИХ ВЛИЯНИЕ В МИРЕ [136]

Многие ученые исследовали проблему измерения влияния стран в мире. Мы кратко рассмотрели эту задачу в рамках нашей модели, сделав предположение, что влияние является функцией нескольких факторов. Было рассмотрено пять таких факторов: людские ресурсы, богатство, торговля, технология и военная мощь. Культура и идеология, а также потенциальные природные ресурсы (такие как нефть), не были включены.

Для проведения анализа было выбрано семь стран. Это США, СССР, Китай, Франция, Великобритания, Япония и ФРГ. Предполагалось, что эта группа охватывает основной класс влиятельных стран. Требовалось сравнить их между собой относительно их общего влияния на международные отношения. Ясно, что предлагаемый анализ является очень грубой оценкой, служащей в основном в качестве интересного примера приложения нашего подхода к приоритетам. Проиллюстрируем метод относительно единственного фактора – богатства. Более общая задача исследовалась в [136].

В табл. 2.2 представлена матрица парных сравнений семи стран относительно их национальных богатств. Например, число 4 в первой строке показывает превышение богатств США над СССР, оцениваемом между слабым и сильным. Величина обратная 4 появляется в симметричной позиции, указывая на обратное отношение богатства СССР по сравнению с США.

Таблица 2.2. Национальные богатства

	США	СССР	Китай	Франция	Великобритания	Япония	ФРГ
США	1	4	9	6	6	5	5
СССР	0,25	1	7	5	5	3	4
Китай	0,11	0,14	1	0,2	0,2	0,14	0,2
Франция	0,17	0,2	5	1	1	0,33	0,33
Великобритания	0,17	0,2	5	1	1	0,33	0,33
Япония	0,2	0,33	7	3	3	1	2
ФРГ	0,2	0,25	5	3	3	0,5	1

$\lambda_{\max} = 7{,}608$; ИС = 0,10; ОС = 0,08.

Пояснения к таблице

В первой строке приведены результаты попарных сравнений влияния национальных богатств США и других стран. Например, при сравнении США с США получается, естественно, единица, превышение США над СССР оценивается между слабым и сильным (поэтому во второй позиции поставлено 4), при сравнении с Китаем выявлено абсолютное превосходство (поэтому в третьей позиции стоит 9). Национальному богатству США отдано предпочтение между сильным и явным при сравнении с Францией и Великобританией (поэтому в следующих двух позициях стоят числа 6) и сильное предпочтение при сравнении с Японией и ФРГ (поэтому стоят числа 5). Числа в первом столбце являются обратными величинами чисел в первой строке; остальные элементы матрицы заполняются аналогичным путем.

Таблица 2.3 Нормализованный собственный вектор национальных богатств

	Нормализованный собственный вектор	Фактические значения ВНП (в млрд. долл.) (1972 г.)	Доли от суммарного ВНП
США	0,427	1167	0,413
СССР	0,230	635	0,225
Китай	0,021	120	0,043
Франция	0,052	196	0,069
Великобритания	0,052	154	0,055
Япония	0,123	294	0,104
ФРГ	0,094	257	0,091
	Суммарный	2823	

Примечания. СКО = 0,024; данные по СССР неточны.

Отметим, что сравнения не согласованы. Например, США:СССР = 4, СССР:Китай = 7, однако США: Китай = 9 (а не 28). Тем не менее, проведя необходимые вычисления, получаем для США и СССР относительные веса 0,427 и 0,230, которые находятся в поразительном соответствии с валовыми национальными продуктами (ВНП), взятыми в качестве долей от общей суммы ВНП (см. табл. 2.3). Таким образом, несмотря на произвольность шкалы, нарушения исчезают и числа попадают в хорошее соответствие с наблюдаемыми данными. Таким образом, влияние, обусловленное богатствами, пропорционально действительным богатствам.

Сравним столбец нормализованного собственного вектора, полученного использованием матрицы суждений табл. 2.2 с долями фактических ВНП (первый и третий столбцы в табл. 2.3). Их значения очень близки. По разным оценкам фактический ВНП Китая составляет от 74 до 128 млрд. долларов. По-видимому, малая величина ВНП не позволяет причислить Китай к этой группе стран.

2.5. ОЦЕНКА РАССТОЯНИЙ

Было выбрано шесть городов: Монреаль, Чикаго, Сан-Франциско, Лондон, Каир и Токио. Расстояния от них до Филадельфии попарно сравнивал человек, имеющий большой опыт воздушных путешествий, который вспоминал скуку в самолете, а не думал о фактическом времени полета или о расстоянии. Его суждения даны в представленной матрице сравнения расстояний.

Сравнение	Каир	Токио	Чикаго	Сан-Франциско	Лондон	Монреаль
Каир	1	1/3	8	3	3	7
Токио	3	1	9	3	3	9
Чикаго	1/8	1/9	1	1/6	1/5	2
Сан-Франциско	1/3	1/3	6	1	1/3	6
Лондон	1/3	1/3	5	3	1	6
Монреаль	1/7	1/9	1/2	1/6	1/6	1

$\lambda_{\max} = 6,45$; ИС = 0,09; ОС = 0,07

Таблица 2.4 Нормализованный собственный вектор расстояний

Города	Расстояние до Филадельфии в милях	Нормализованное расстояние	Собственный вектор
Каир	5729	0,278	0,263
Токио	7449	0,361	0,397
Чикаго	660	0,032	0,033
Сан-Франциско	2732	0,132	0,116
Лондон	3658	0,177	0,164
Монреаль	400	0,019	0,027

В табл. 2.4 приведены фактические расстояния, их нормализованные величины и собственный вектор, полученный из матрицы суждений.

2.6. ТИПИЧНЫЕ ИЕРАРХИИ

Иллюстрациями двух различных иерархий являются рис. 2.1 и 2.2.

Первый уровень иерархии на рис. 2.1 имеет одну цель: общее благосостояние страны. Значение ее приоритета полагается равным единице. Второй уровень иерархии имеет три цели: сильная экономика, здравоохранение и национальная оборона. Приоритеты этих целей получаются из матрицы парных сравнений относительно цели первого уровня. Целями третьего уровня являются отрасли промышленности. Задача заключается в определении влияния отраслей промышленности на общее благосостояние страны через промежуточный второй уровень. Поэтому приоритеты отраслей промышленности относительно каждой цели второго уровня получаются из матриц попарных сравнений относительно этой цели, а полученные три вектора приоритетов затем взвешиваются вектором приоритетов второго уровня, что позволяет получить искомый составной вектор приоритетов отраслей промышленности.

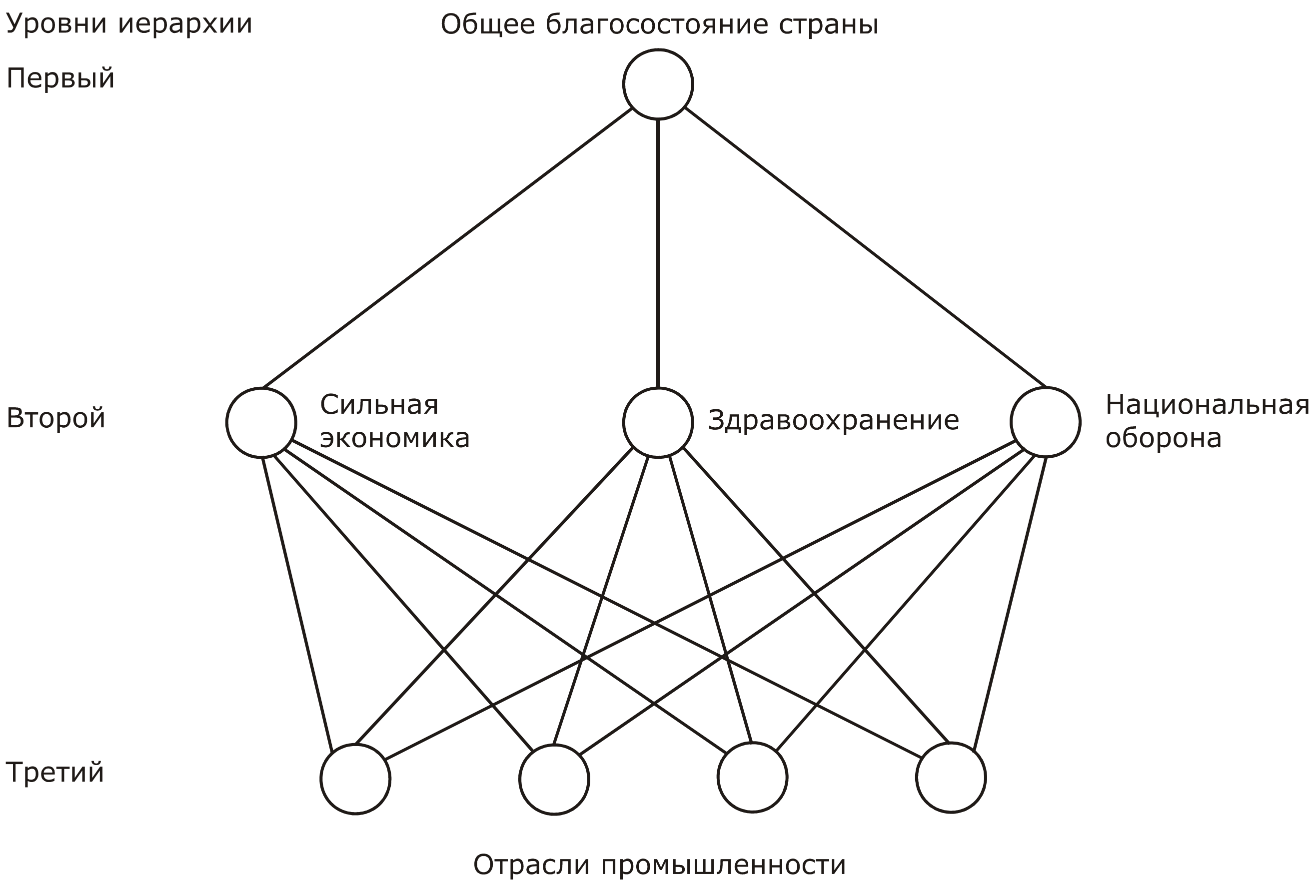


Рис. 2.1. Полная иерархия для приоритетов отраслей промышленности

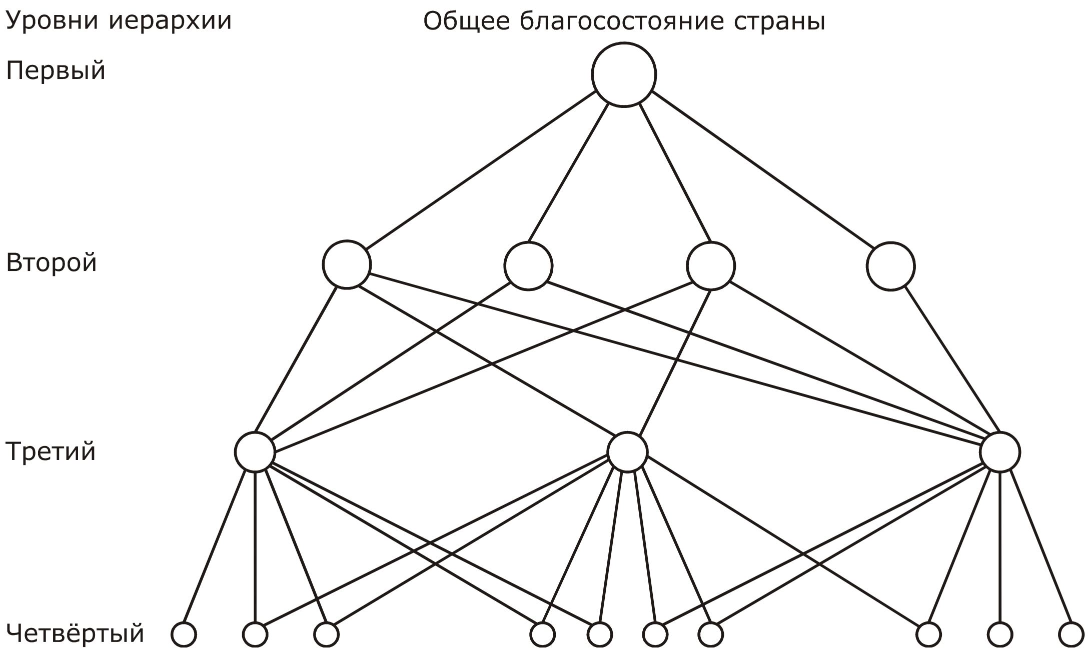


Рис. 2.2. Иерархия для приоритетов проектов развития транспорта в национальном планировании

На рис. 2.2 иерархия состоит из четырех уровней: первый является общим благосостоянием страны, второй – набором возможных будущих сценариев развития страны, третий включает регионы страны и четвертый – проекты развития транспорта, которые должны быть осуществлены в регионах. Отметим, что не каждый регион влияет на каждый сценарий, и не каждый проект влияет на каждый регион. Иерархия рис. 2.2 не является полной. Задачей является определение приоритетов проектов относительно их воздействия на общую цель. Здесь нужно взвесить приоритеты каждой сравниваемой группы отношением числа элементов в этой группе к общему числу элементов четвертого уровня. Это изредка делают, когда иерархия не является полной. Иногда неполную иерархию можно рассматривать как полную, но при использовании нулей для суждений и их обратных величин в соответствующем месте.

2.7. ПСИХОТЕРАПИЯ

Метод анализа иерархий может быть использован для проникновения в сущность психологических проблем следующим образом. Рассмотрим общее благополучие индивидуума в качестве единственного элемента высшего уровня иерархии. По-видимому, на этот уровень в основном влияют детские, юношеские и взрослые впечатления. Факторы развития и зрелости, отражающиеся в благополучии, могут включать как влияние отца и матери в отдельности, так и их совместное влияние как родителей, социо-экономический фон, отношение с братьями и сестрами, группу ровесников, школьное обучение, религиозный статус и т. д.

На перечисленные выше факторы, которые составляют второй уровень иерархии, влияют соответствующие критерии. Например, влияние отца может быть разбито на категории, включающие его темперамент, строгость, заботу и привязанность. Отношения с братьями и сестрами можно далее характеризовать их количеством, разницей в возрасте и полом; моделирование воздействия и роли ровесников обеспечивает более ясную картину влияния друзей, обучения в школе и учителей.

В качестве альтернативной основы описания для второго уровня можно включить чувство собственного достоинства, уверенность в будущем, адаптируемость к новым людям и новым обстоятельствам и т. д., влияющих или находящихся под влиянием расположенных выше элементов.

Более полная основа психологической предыстории может включать несколько сотен элементов на каждом уровне, выбранных экспертами и расположенных таким образом, чтобы получить максимальное понимание рассматриваемого индивидуума.

Здесь рассматривается весьма ограниченный вид общего случая, где испытуемый чувствует, что уверенность его в себе сильно подорвана и его социальная приспособляемость ослаблена запретами в детстве. Ему задают вопросы только о детских впечатлениях и просят попарно установить связь между следующими элементами на каждом уровне.

Уровень 1. Общее благополучие (ОБ).

Уровень 2. Чувство собственного достоинства (Д); чувство уверенности в будущем (У); способность адаптироваться к другим (А).

Уровень 3. Явная привязанность, проявленная по отношению к субъекту (П); идеи строгости, этики (Э); действительное наказание ребенка (Н); подчеркивание личной приспособляемости к другим (Л).

Уровень 4. Влияние матери (М); отца (О); обеих родителей (Р). Ответы в матричной форме были следующими:

ОБ

	Д	У	А
Д	1	6	4
У	1/6	1	3
А	1/4	1/3	1

$\lambda_{\max} = 3,26$; ИС = 0,07; ОС = 0,12

Д

	П	Э	Н	Л
П	1	6	6	3
Э	1/6	1	4	3
Н	1/6	1/4	1	1/2
Л	1/3	1/3	2	1

$\lambda_{\max} = 4,35$;
ИС = 0,12;
ОС = 0,13

У

	П	Э	Н	Л
П	1	6	6	3
Э	1/6	1	4	3
Н	1/6	1/4	1	1/2
Л	1/3	1/3	2	1

$\lambda_{\max} = 4,35$;
ИС = 0,12;
ОС = 0,13

А

	П	Э	Н	Л
П	1	1/5	1/3	1
Э	5	1	4	1/5
Н	3	1/4	1	1/4
Л	1	5	4	1

$\lambda_{\max} = 5,42$;
ИС = 0,47;
ОС = 0,52

П

	М	О	Р
М	1	9	4
О	1/9	1	8
Р	1/4	1/8	1

$\lambda_{\max} = 4,00$; ИС = 0,33; ОС = 0,57

Э

	М	О	Р
М	1	1	1
О	1	1	1
Р	1	1	1

$\lambda_{\max} = 3,00$; ИС = 0,0; ОС = 0,0

Н	М	О	Р
М	1	9	6
О	1/9	1	1/4
Р	1/6	4	1

$\lambda_{\max} = 3{,}11$; ИС = 0,06; ОС = 0,10

Л	М	О	Р
М	1	5	5
О	1/5	1	1/3
Р	1/5	3	1

$\lambda_{\max} = 3{,}14$; ИС = 0,07; ОС = 0,12

Собственный вектор первой матрицы *а*, получается:

	ОБ
Д	0,701
У	0,193
А	0,106

Матрица *b* собственных векторов второй строки матриц:

	Д	У	А
П	0,604	0,604	0,127
Э	0,213	0,213	0,281
Н	0,064	0,064	0,120
Л	0,119	0,119	0,463

Матрица *с* собственных векторов третьей группы матриц:

	П	Э	Н	Л
М	0,721	0,333	0,713	0,701
О	0,210	0,333	0,061	0,097
Р	0,069	0,333	0,176	0,202

Заключительный составной вектор влияния на благополучие, полученный произведением *cba*, будет:

Мать: 0,635; отец: 0,208; родители: 0,156.

Похоже, что терапию следует обусловливать как суждениями, так и несогласованностью в них. Индивидууму посоветовали больше общаться с отцом с целью уравновешивания влияния родителей.

2.8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ [137]

В этом примере найдем веса распределения энергии для нескольких крупных потребителей в соответствии с их общим вкладом в различные цели общества. Введем следующие условия.

Имеются три крупных потребителя энергии в США: C_1 – бытовое потребление, C_2 – транспорт и C_3 – промышленность. Они составляют третий, или низший уровень иерархии. Целями, по отношению к которым оцениваются потребители, являются: вклад в развитие экономики, вклад в качество окружающей среды и вклад в национальную безопасность. Цели составляют второй уровень иерархии. Построим матрицу парных сравнений трех целей в соответствии с их воздействием на общую цель – благоприятного социального и политического положения. Мы навязываем согласованность в этом случае, требуя уверенности в суждениях. Поэтому, заполнив первую строку, оставшиеся элементы получим исходя из требований, предъявляемых определением согласованности.

Благоприятное социальное и политическое положение	Развитие экономики	Окружающая среда	Национальная безопасность
Развитие экономики	1	5	3
Окружающая среда	1/5	1	3/5
Национальная безопасность	1/3	5/3	1

$\lambda_{max} = 3,0$; ИС = 0,0; ОС = 0,0

При сравнении экономики с окружающей средой и затем с национальной безопасностью, считается, что в соответствии с социально-политическим влиянием экономика имеет сильное превосходство в первом случае и слабое – во втором; следовательно, в первой строке будут стоять числа 5 и 3 соответственно. Национальной безопасности присваивается меньшее по сравнению с окружающей средой число 3, поскольку экономически слаборазвитые страны обычно с большой охотой закупают оружие, но не могут этого сделать, не располагая хотя бы минимальной экономической базой. Числа во второй и третьей строках получены требованием соблюдения согласованности для этого случая.

Следовательно, социально-политическое воздействие окружающей среды по сравнению с национальной безопасностью получается 3/5 и т. д. (в остальных матрицах этого примера мы не требуем согласованности). Вектор приоритетов, полученный из этой матрицы, представим в виде вектора-столбца, который из соображения экономии места пишем как вектор-строку: ω = (0,65; 0,13; 0,22). Следовательно, в соответствии со сравнением по социально-политическому влиянию, экономика получает приоритет 0,65, окружающая среда – 0,13 и национальная безопасность – 0,22. Так как приоритет первого уровня иерархии (общая социально-политическая цель), как обычно, равен 1, взвешенные величины этих приоритетов равны полученному выше вектору, умноженному на 1, что дает тот же самый вектор.

Теперь лицо, принимающее решение, после тщательного изучения проводит оценку относительной важности каждого потребителя с точки зрения экономики, окружающей среды и национальной безопасности (второй уровень иерархии). Матрицы, представляющие эти суждения, будут соответственно:

Экономика	C_1	C_2	C_3
C_1	1	3	5
C_2	1/3	1	2
C_3	1/5	1/2	1

$\lambda_{max} = 3,00$; ИС = 0,0; ОС = 0,0

Окружающая среда	C_1	C_2	C_3
C_1	1	2	7
C_2	1/2	1	5
C_3	1/7	1/5	1

$\lambda_{max} = 3,01$; ИС = 0,01; ОС = 0,02

Национальная безопасность	C_1	C_2	C_3
C_1	1	2	3
C_2	1/2	1	2
C_3	1/3	1/2	1

$\lambda_{max} = 3,01$; ИС = 0,01; ОС = 0,02

Как и выше, векторы приоритетов получаются из каждой матрицы. Они являются соответственно тремя столбцами следующей матрицы:

$$\begin{bmatrix} 0,65 & 0,59 & 0,54 \\ 0,23 & 0,33 & 0,30 \\ 0,12 & 0,08 & 0,16 \end{bmatrix}$$

Эта матрица умножается справа на вектор ω, чтобы взвесить вектор приоритетов, измеряющих каждое воздействие, приоритетом соответствующей цели. Таким образом, получаем искомый общий вектор приоритетов третьего уровня иерархии, представляющего потребителей энергии C_1, C_2 и C_3:

$$\begin{bmatrix} 0,62 \\ 0,26 \\ 0,12 \end{bmatrix}$$

Итак, общий приоритет C_1 есть 0,62, C_2 – 0,26, а C_3 – 0,12. Здесь мы провели ранжирование отдельных потребителей энергии по шкале отношений согласно их общему влиянию. Этот ответ может показаться простым, однако нужно показать, как мы его получаем, и подтвердить его значимость.

Замечание. Иногда, когда веса известны из измерений, например тонны загрязняющих веществ или стоимость автомобилей, появляется желание нормализовать веса и использовать их вместо построения матрицы суждений и вычисления собственного вектора. Этот процесс может привести к ошибке, особенно когда полезность относительных суждений эксперта не отражается в терминах отношений истинных весов. Например, для богатого человека нет разницы между одним и двумя долларами, в то время как их отношение показывает большую значимость.

ГЛАВА 3
ОСНОВЫ

3.1. ВВЕДЕНИЕ

Эта глава знакомит с некоторыми дальнейшими методологическими наблюдениями. Сначала разъясняется основная математическая аргументация метода. Естественно, возникает вопрос, почему выбрана шкала от 1 до 9, а не любая другая из возможных шкал. Показано, что данная шкала не хуже любой другой шкалы, но преимущество ее заключается в простоте, и поэтому совершенно естественна. В последней части главы исследуется процесс пересмотра суждений, проводятся численные расчеты всех собственных значений и левых, и правых собственных векторов для примера национальных богатств и обсуждается согласованность в методе Дельфи. Наконец, кратко обсуждаются сравнения троек, четвёрок и т. д.

3.2. ПРИОРИТЕТ КАК СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР: СВЯЗЬ С СОГЛАСОВАННОСТЬЮ

Рассмотрим элементы $C_1, \ldots, C_n$ некоторого уровня иерархии. Мы хотим определить веса $\omega_1, \ldots, \omega_n$ их влияния на некоторый элемент следующего уровня. Как описано в гл. 1, основным инструментом будет матрица чисел, представляющих суждения о парных сравнениях. Покажем, почему для представления приоритетов выбран собственный вектор, соответствующий наибольшему собственному значению.

Обозначим через a_{ij} число, соответствующее значимости элемента C_i по сравнению с C_j. Матрицу, состоящую из этих чисел, обозначим через A, т. е.

$$A = \left(a_{ij}\right).$$

Как отмечалось ранее, $a_{ij} = 1/a_{ji}$, т. е. матрица A – *обратно-симметричная**. Если наше суждение совершенно при всех сравнениях, то $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$ для всех i, j, k и матрицу A называем *согласованной.*

Очевидным для согласованной матрицы является случай, когда сравнения основаны на точных измерениях, т. е. веса $\omega_1, \ldots, \omega_n$ известны. Тогда

$$a_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}, \; i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{3.1}$$

и поэтому

$$a_{ij}a_{jk} = \frac{\omega_i}{\omega_j}\frac{\omega_j}{\omega_k} = \frac{\omega_i}{\omega_k} = a_{ik}.$$

Также, конечно,

$$a_{ji} = \omega_j/\omega_i = \frac{1}{\omega_i/\omega_j} = 1/a_{ij}.$$

* Термин обратно-симметричная матрица введен как наиболее адекватный перевод с английского термина reciprocal matrix. – Прим. перев.

Рассмотрим подробнее этот случай. Как показано в Приложении 1, матричное уравнение

$$A \cdot x = y,$$

где $x = (x_1,\ \dots,\ x_n)$ и $y = (y_1,\ \dots,\ y_n)$ соответствует краткой записи системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = y_i,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Теперь из (3.1) получаем

$$a_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} = 1,\ i, j = 1, 2, \dots, n,$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \omega_j \frac{1}{\omega_i} = n,\ i = 1, 2, \dots, n,$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \omega_j = n\omega_i,\ i = 1, 2, \dots, n,$$

что эквивалентно выражению

$$A\omega = n\omega \tag{3.2}$$

В теории матриц эта формула отражает то, что ω – собственный вектор матрицы A с собственным значением n. Уравнение (3.2), расписанное поэлементно, выглядит следующим образом:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \dots & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array} & \begin{bmatrix} \omega_1/\omega_1 & \omega_1/\omega_2 & \dots & \omega_1/\omega_n \\ \omega_2/\omega_1 & \omega_2/\omega_2 & \dots & \omega_2/\omega_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_n/\omega_1 & \omega_n/\omega_2 & \dots & \omega_n/\omega_n \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}.$$

Обратимся к конкретному случаю, в котором a_{ij} основаны не на точных измерениях, а на субъективных суждениях. В данном случае a_{ij} будет отклоняться от «идеальных» отношений ω_i / ω_j, и поэтому уравнение (3.2) более не будет иметь места. Полезными могут оказаться следующие два факта из теории матриц.

Первый факт: если $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n$ числа, удовлетворяющие уравнению

$$Ax = \lambda x,$$

т. е. являются собственными значениями A, и если $a_{ii} = 1$ для всех i, то

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n.$$

Поэтому, если имеет место (3.2), то все собственные значения — нули, за исключением одного, равного n. Ясно, что в случае согласованности n есть наибольшее собственное значение A.

Второй полезный факт заключается в том, что если элементы a_{ij} положительной обратно-симметричной матрицы A незначительно изменить, то собственные значения также изменятся незначительно.

Объединяя эти результаты, находим, что если диагональ матрицы A состоит из единиц ($a_{ii}=1$) и A – согласованная матрица, то при малых изменениях в a_{ij} наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}$ остается близким к n, а остальные собственные значения – близкими к нулю.

Поэтому можно сформулировать следующую задачу: если A – матрица значений парных сравнений, то для нахождения вектора приоритетов нужно найти вектор ω, который удовлетворяет

$$A\omega=\lambda_{\max}\omega .$$

Так как желательно иметь нормализованное решение, слегка изменим ω, полагая $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\omega_i$ и заменяя ω на $(1/\alpha)\omega$. Это обеспечивает единственность, а также то, что $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$.

Заметим, что так как малые изменения в a_{ij}, вызывают малое изменение $\lambda_{\max}$, отклонение последнего от n является мерой согласованности. Оно позволяет оценить близость полученной шкалы к основной шкале отношений, которую мы хотим оценить. Поэтому, как сказано в гл. 1, индекс согласованности

$$(\lambda_{\max}-n)/(n-1)$$

рассматривается как показатель «близости к согласованности». В общем случае, если это число $\leq 0{,}1$, мы можем быть удовлетворены суждениями.

Полезно повторить, что описанные суждения могут не только нарушить отношение согласованности, но и быть нетранзитивными, т. е. если относительная важность C_1 больше, чем C_2 и относительная важность C_2 больше, чем C_3, то относительная важность C_1 может не быть больше, чем C_3 – обычный случай в человеческих суждениях. Интересную иллюстрацию относительно несогласованности или отсутствия транзитивности предпочтений представляют различные турниры. Команда C_1 может проиграть команде C_2, которая проиграла команде C_3; однако C_1 может выиграть у C_3. Поэтому несогласованность в выступлениях команд – факт, с которым нужно считаться. Конечно, нашей модели присуще требование транзитивности, однако процедура «описания» может вызвать затруднения.

В [101] исследовано предположение, что нетранзитивность предпочтений может быть естественным явлением, а не следствием ошибки в суждениях или заблуждением. Сделано заключение, что в ряде случаев нетранзитивность является естественной и ее нельзя избежать.

В проведенном эксперименте 62 студента колледжа должны были сделать выбор одного из трех гипотетических брачных партнеров x, y и z. По интеллекту их ранжирование было xyz, по внешности – yzx, по имущественному положению – zxy. Структура эксперимента не объяснялась. Объекты сравнивались неодновременно и попарно случайным образом. В каждом случае x описывался как очень умный, некрасивый и с хорошим достатком; y — как умный, с очень приятной внешностью и бедный; z — с посредственным интеллектом, приятной внешностью и богатый. Все потенциальные партнеры описывались не столь бедными, некрасивыми или глупыми, чтобы быть автоматически исключенными из рассмотрения.

При определении групповых предпочтений большинством голосов обозначился круговой характер, так как x превзошел y с соотношением 39 к 23; y превзошел z с соотношением 57 к 5 и z превзошел x с соотношением 33 к 29.

Выборы были: $xyz-21$; $xyzx-17$; $yzx-12$; $yxz-7$; $zyx-4$; $xzy-1$; $zxy-0$; $xzyx-0$.

Нетранзитивный характер легко объясняется как результат выбора альтернативы, которая выше по двум из трех критериев. Упорядочения xyz и yzx, по-видимому, получились из-за придания большего веса интеллекту и внешности соответственно. Четверо студентов, которые сделали противоположный выбор по отношению к интеллекту (zyx), были мужчины и, возможно, выразили степень мужской боязни интеллектуальных женщин. Семерых студентов, которые сделали противоположный выбор по отношению к богатству (yxz), не следует считать людьми, бессмысленно пренебрегающими деньгами. Они могли отдать значительное предпочтение y перед x из-за большой несоразмерности во внешности, x перед z из-за большой несоразмерности в интеллекте и y перед z из-за сочетания внешности и интеллекта. Когда требовалось сранжировать все три альтернативы, те, чьи выборы носили нетранзитивный характер, дали разрозненные ответы, в большинстве выборов $yzx(9)$ и $yxz(4)$. Студенты, имевшие транзитивные упорядочения для бинарных выборов, в большинстве произвели очевидные упорядочения.

Во втором эксперименте, где летчиков просили сделать попарный выбор из огня, раскаленного металла и падения, наиболее распространенными выборами были: огонь предпочтительнее раскаленного металла; раскаленный металл предпочтительнее падения; падение предпочтительнее огня.

Первые два выбора, вероятно, можно объяснить убеждением, что пилот испытывает ужас от раскаленных предметов; этот страх сильнее, чем от огня, однако пилот привык к устойчивому состоянию и поэтому естественна реакция на падение. Тем не менее, это не объясняет третий выбор, который не кажется неразумным.

Такие эксперименты не доказывают, что выборы, которые делает человек, нетранзитивны. Однако они могут предлагать свои пути для составления планов таких экспериментов, которые используют либо цикличность, либо только транзитивность. В экспериментах, в которых оценки компонент противоречивы, предполагается возникновение цикличности. Тогда основной вопрос будет: При каких условиях транзитивность не имеет места? А не являются ли предпочтения транзитивными? Некоторые исследователи избегают этой проблемы, утверждая, что транзитивность является одной из составляющих определения рационального поведения.

Известная теорема К. Эрроу о невозможности утверждает, что нельзя найти такую функцию общественной полезности, которая удовлетворяла бы интересам как отдельных индивидуумов, так и всего общества в целом, и единственным способом выбора, приемлемым при всех обстоятельствах, является передача права выбора «диктатору». Действительно, трудно вообразить, что даже отдельная личность может иметь функцию полезности, которая удовлетворяет всем возможным ее выборам при всех обстоятельствах, с которыми она может столкнуться. В работе Эрроу [5] транзитивность предпочтений берется в качестве детерминистической (да, нет) основы согласованности и ее нарушение рассматривается как логическое противоречие.

Люди постоянно идут на компромиссы, которые нарушают транзитивность, однако в целом являются приемлемыми решениями, так как в них учитывается относительная важность имеющихся критериев. Ясно, что существуют моменты, когда индивидуум не может принять четкого решения из-за того, что компромиссный выбор из нескольких линий поведения равнозначен. Действительно, если критерии верно определены и оценены, у индивидуума нет причин предпочесть бездействие действию.

Хотя автор не особенно разделяет идею о необходимости рассмотрения функции благосостояния общества, кажется, что основные предпосылки, использованные для доказательства теоремы об общественной невозможности, требуют пересмотра. В теореме о невозможности функция общественной полезности не должна так сильно отличаться от функции полезности отдельного индивидуума. Индивидуум чувствует себя счастливым или несчастным в зависимости от того, насколько хорошо он определяет приоритеты для себя и находит компромиссы. Он может и часто имеет внутренние конфликты при любых выборах, которые делает даже при совершенной рациональности в выражении интенсивностей своих предпочтений.

3.3. СРАВНЕНИЕ ШКАЛ

Некоторые проблемы, изложенные в предыдущем разделе, независимы от шкалы сравнения, которую мы применяем, поскольку это – шкала отношений. (Шкалы разностей кратко рассматриваются во второй части книги.) Однако имеются все основания поставить вопрос: почему выбираются величины от 1 до 9? В этом разделе мы попытаемся показать читателю, что эта шкала действительно лучше всех других.

Начнем более подробное описание нашей шкалы (см. табл. 3.1).

Таблица 3.1

Степень важности	Определение	Объяснение
1	Одинаковая значимость	Два действия вносят одинаковый вклад в достижение цели
3	Некоторое преобладание значимости одного действия перед другим (слабая значимость)	Опыт и суждение дают лёгкое предпочтение одному действию перед другим
5	Существенная или сильная значимость	Опыт и суждение дают сильное предпочтение одному действию перед другим
7	Очень сильная или очевидная значимость	Предпочтение одного действия перед другим очень сильно. Его превосходство практически явно.
9	Абсолютная значимость	Свидетельство в пользу предпочтения одного действия другому в высшей степени предпочтительны
2, 4, 6, 8	Промежуточные значения между соседними значениями шкалы	Ситуация, когда необходимо компромиссное решение
Обратные величины приведённых выше чисел	Если действию *i* при сравнении с действием *j* приписывается одно из приведённых выше чисел, то действию *j* при сравнении с *i* приписывается обратное значение	Обоснованное предположение
Рациональные значение	Отношения, возникающие в заданной шкале	Если постулировать согласованность, то для получения матрицы требуется *n* числовых значений

Наибольший вклад в исследование вопроса стимулов и реакций внесли Э. Вебер (1795–1878), Г. Фехнер (1801–1887) и С. Стивенс (1906–1973).

В 1846 г. Вебер сформулировал закон, касающийся стимула измеримой величины s. Он обнаружил, например, что люди, держащие в руке предметы с различным весом, могут различать предметы весом 20 г от 21 г, однако не могут уловить разницу, если второй предмет весит 20,5 г. С другой стороны, в то время как они не могут различить предметы весом 40 г и 41 г, разница предметов весом 40 г и 42 г воспринимается, и т. д. для бóльших весов.

Нужно увеличить s на минимальную величину Δs, чтобы достичь состояния, при котором наше восприятие уже может различить s и $s + \Delta s$; Δs называется едва *заметным различием* (*езр*). Отношение $r = \Delta s / s$ не зависит от s. Закон Вебера утверждает, что изменение восприятия отмечается при увеличении стимула на постоянную долю самого стимула. Этот закон имеет место, когда Δs мало по сравнению с s, и практически перестает действовать, когда s или слишком мал, или слишком велик. Агрегирование или декомпозиция стимулов, что необходимо в кластерах или уровнях иерархии, является эффективным способом расширения применимости этого закона.

В 1860 г. Фехнер исследовал последовательность едва заметных увеличений стимулов. Обозначим первый стимул через s_0.

Следующий стимул с едва заметным различием (см. [7]) согласно закону Вебера

$$s_1 = s_0 + \Delta s_0 = s_0 + \frac{\Delta s_0}{s_0} s_0 = s_0 \left(1 + r\right).$$

Аналогично

$$s_2 = s_1 + \Delta s_1 = s_1 \left(1 + r\right) = s_0 \left(1 + r\right)^2 \equiv s_0 \alpha^2 .$$

В общем случае

$$s_n = s_{n-1} \alpha = s_0 \alpha^n \left(n = 0, 1, 2, \ldots\right).$$

Таким образом, стимулы с заметными различиями располагаются в геометрической прогрессии. В то же время Фехнер чувствовал, что соответствующие восприятия составляют арифметическую прогрессию в дискретных точках, где наблюдаются едва заметные различия. Последние получаются, если решить относительно n полученное уравнение. Имеем

$$n = \left(\log s_n - \log s_0\right) / \log \alpha ,$$

т. е. восприятие – линейная функция логарифма стимула. Поэтому если обозначить восприятие через M, а стимул через s, то психофизический закон Вебера–Фехнера запишется в виде

$$M = a \log s + b, \ a \neq 0 .$$

Предположим, что стимулы возникают при проведении парных сравнений относительно сравнимых действий. Нас интересуют реакции, численные значения которых даны в форме отношений. Итак, $b = 0$, из чего мы должны получить $\log s_0 = 0$ или $s_0 = 1$, что возможно, если проградуировать единичный стимул. Но это происходит при сравнении некоторого вида действия с самим собой.

Следующая заметная реакция соответствует стимулу

$$s_1 = s_0 \alpha = \alpha ,$$

который вызывает реакцию $\log a / \log a = 1$. Следующий стимул будет

$$s_2 = s_0 \alpha^2 ,$$

который вызовет реакцию – 2. Таким образом, получаем последовательность $1, 2, 3, \ldots$ Для согласованности мы помещаем действия в кластер, стимулы парных сравнений которого вызывают реакции, имеющие величины одного порядка. На практике качественные различия в реакциях на стимулы немногочисленны. Приблизительно их пять, как перечислено выше, с дополнительными, которые представляют собой компромиссы между соседними реакциями. Понятие компромисса особенно достойно внимания при осмысливании процесса суждения в противоположность чувствам. Это увеличивает число различий до девяти, что совместимо со сделанным ранее предположением о порядке величины.

Замечание. Степенной закон Стивенса распространяет идеи стимулов и реакций на широкие диапазоны (делает как бы поперечный срез различных иерархических уровней), оценивая реакцию как степень стимула, полученного подгонкой кривых по сильно распределенным данным. Может случиться, что степенной закон будет приближением к исходу, который получен в результате иерархической декомпозиции.

Почему обоснован верхний предел 9?

Имеется несколько причин для установления верхнего предела шкалы:

1. Качественные различия значимы на практике и обладают элементом точности, когда величина сравниваемых предметов одного порядка или предметы близки относительно свойства, использованного для сравнения.

2. Отметим, что способность человека производить качественные разграничения хорошо представлена пятью определениями: *равный, слабый, сильный, очень сильный и абсолютный*. Можно принять компромиссные определения между соседними определениями, когда нужна большая точность. В целом требуется девять значений, и они могут быть хорошо согласованы; получаемая в результате шкала подтверждается практикой.

3. Путем подкрепления (2) практический метод, часто используемый для оценки отдельных предметов, заключается в классификации стимулов в трихотомию зон: неприятия, безразличия, принятия. Для более тонкой классификации в каждую из этих зон заложен принцип трихотомии – деление на низкую, умеренную и высокую степени. Таким образом, получается девять оттенков значимых особенностей. Коллега автора И. Уинд указал, что исследования маркетинга, проведённые нашим общим коллегой П. Грином, показывают, что нет необходимости иметь больше семи значений шкалы для выделения стимулов. Поэтому мы и берем не больше 9 градаций.

4. Психологический предел 7 ± 2 предметов при одновременном сравнении подтверждает, что если взять 7 ± 2 отдельных предметов, удовлетворяющих описанию (1), и если все они слегка отличаются друг от друга, то понадобится 9 точек, чтобы различить их (см. [106]).

Отметим, что использование шкалы парных сравнений в диапазоне от 0 до ∞ может оказаться бесполезным, так как предполагает, что человеческое суждение каким-то образом способно оценить относительное превосходство любых двух объектов, что совсем не так. Как хорошо известно из опыта, наша способность различать находится в весьма ограниченном диапазоне и когда имеется значительная несоразмерность между сравниваемыми объектами или действиями, наши предположения тяготеют к тому, чтобы быть произвольными, и обычно оказываются далекими от действительности. Это подтверждает мысль о том, что наши шкалы должны иметь конечный диапазон. Действительно, пределы должны быть довольно близкими в диапазоне, который отражает нашу действительную возможность производить относительные сравнения. Так как единица является стандартом измерения, верхняя граница не должна быть слишком далека от нее, хотя и достаточно отдалена, чтобы представить наш диапазон способности различать.

Теперь рассмотрим ряд шкал, применяемых в отдельных задачах, для которых парные сравнения известны качественно: равный, слабый, сильный, очень сильный и абсолютный, вместе с промежуточными суждениями между каждой последовательной парой этих значений. Шкалы представлены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

№	Шкалы	Равенство	Промежуточное значение	Слабое превосходство	Промежуточное значение	Сильное превосходство	Промежуточное значение	Значительное превосходство	Промежуточное значение	Абсолютное превосходство
1	1–3	1	2	2	2	2	3	3	3	3
2	1–5	1	2	2	3	3	4	4	5	5
3	1–7	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4	1–9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	1–11	1	3	4	5	7	8	9	10	11
6	1–13	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7	1–15	1	3	5	7	8	9	11	13	15
8	1–17	1	3	5	7	9	11	13	15	17
9	1–18	1	4	6	8	10	12	14	16	18
10	1–26	1	5	8	11	14	17	20	23	26
11	1–90	1	20	30	40	50	60	70	80	90
12	0,9 x	1	0,9 x							
13	0,7 x	1	0,7 x							
14	0,5 x	1	0,5 x							
15	0,3 x	1	0,3 x							
16	0,1 x	1	0,1 x							
17	1+0, x	1	1+0, x							
18	2+0, x	1	2+0, x							
19	3+0, x	1	3+0, x	(x – соответствующее значение в шкале 1–9)						
20	4+0, x	1	4+0, x							
21	$\sqrt{x}$	1	$\sqrt{x}$							
22	x^2	1	x^2							
23	x^3	1	x^3							
24	x^4	1	x^4							
25	x^5	1	x^5							
26	$2^{n/2}$	$2^0=1$	$2^{0,5}=1,414$	$2^1=2$	$2^{1,5}=2,828$	$2^2=4$	$2^{2,5}=5,657$	$2^3=8$	$2^{3,5}=11,31$	$2^4=16$
27	$9^{x/8}$	1	$9^{1/8}$	$9^{2/8}$	$9^{3/8}$	$9^{4/8}$	$9^{5/8}$	$9^{6/8}$	$9^{7/8}$	9

Далее приведены результаты вычислений в этих шкалах для примеров освещения стульев, национальных богатств и расстояния воздушных полетов. Для всех примеров вначале идёт матрица с качественными значениями (табл. 3.3, 3.4, 3.5). Затем (табл. 3.3а, 3.4а, 3.5а) следует таблица с перечнем решений задачи о собст-

Таблица 3.3. Пример освещенности стульев

	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	E	$B(W-S)$	$B(S-D)$	D
C_2	—	E	W	$B(W-S)$
C_3	—	—	E	$B(E-W)$
C_4	—	—	—	E

Примечание. E – равенство. W – слабое превосходство, S – сильное превосходство, D – значительное превосходство. A – абсолютное превосходство, $B(.-.)$ – промежуточные значения между указанными в скобках. В симметричных позициях используются обратные величины (здесь не заполнены), когда свойства переводятся в численную шкалу.

Таблица 3.3а*

Собственный вектор для каждой шкалы					$\lambda_{\max}$	СКО	МАО
(1)	0.451	0.261	0.169	0.119	4.071	0.091	0.008
(2)	0.531	0.237	0.141	0.091	4.087	0.045	0.006
(3)	0.577	0.222	0.125	0.077	4.034	0.019	0.006
(4)	0.617	0.224	0.097	0.062	4.102	0.008	0.005
(5)	0.659	0.213	0.083	0.044	4.230	0.031	0.011
(6)	0.689	0.198	0.074	0.039	4.261	0.047	0.008
(7)	0.702	0.199	0.066	0.034	4.353	0.055	0.013
(8)	0.721	0.188	0.060	0.031	4.292	0.066	0.010
(9)	0.732	0.185	0.057	0.026	4.451	0.072	0.010
(10)	0.779	0.162	0.042	0.017	4.639	0.099	0.012
(11)	0.886	0.098	0.014	0.003	6.545	0.162	0.031
(12)	0.596	0.229	0.105	0.070	4.072	0.009	0.008
(13)	0.545	0.238	0.124	0.094	4.023	0.037	0.009
(14)	0.470	0.243	0.151	0.135	4.008	0.081	0.024
(15)	0.352	0.236	0.191	0.221	4.094	0.156	0.071
(16)	0.141	0.162	0.230	0.467	4.762	0.316	0.231
(17)	0.340	0.260	0.212	0.187	4.004	0.158	0.042
(18)	0.445	0.271	0.171	0.113	4.143	0.094	0.005
(19)	0.513	0.266	0.142	0.078	4.332	0.056	0.016
(20)	0.561	0.259	0.122	0.059	4.521	0.031	0.022
(21)	0.431	0.260	0.172	0.137	4.025	0.103	0.017
(22)	0.860	0.111	0.021	0.009	4.421	0.147	0.027
(23)	0.953	0.043	0.003	0.001	4.992	0.203	0.057
(24)	0.984	0.015	0.001	0.000	5.871	0.223	0.071
(25)	0.995	0.005	0.000	0.000	7.142	0.230	0.076
(26)	0.604	0.214	0.107	0.076	4.000	0.008	0.005
(27)	0.531	0.233	0.134	0.102	4.000	0.046	0.077
	0.608	0.219	0.111	0.062	Фактическое значение вектора (из закона обратного квадрата оптики)		

* Здесь и далее в табл. 3.4а, 3.5а, 3.6, 3.7. 3.8 применяется американская запись десятичных дробей, с точкой вместо запятой, разделяющей целые и дробные части. – *Прим. перев.*

венном векторе, соответствующих каждой шкале, к которому примыкает столбец соответствующих собственных значений. В двух последующих столбцах даны среднеквадратичное отклонение и медианное абсолютное отклонение от медианы. Они вычислены для отклонений соответствующего вектора-строки от действительного (известного) вектора решения, приведенного внизу таблицы. Из этих, а также из многих других, менее систематизированных примеров видно, что шкала 1–9 выделяется

Таблица 3.4. Пример национальных богатств

	США	СССР	Китай	Франция	Великобритания	Япония	ФРГ
США	E	$B(W-S)$	A	$B(S-D)$	$B(S-D)$	S	S
СССР	—	E	D	S	S	W	$B(W-S)$
Китай	—	—	E	—	—	—	—
Франция	—	—	S	E	E	—	—
Великобритания	—	—	S	E	E	—	—
Япония	—	—	D	W	W	E	$B(E-W)$
ФРГ	—	—	S	W	W	—	E

Таблица 3.4а

Собственный вектор для каждой шкалы								$\lambda_{\max}$	СКО	МАО
(1)	0.273	0.201	0.059	0.088	0.088	0.165	0.127	7.191	0.062	0.018
(2)	0.348	0.212	0.039	0.076	0.076	0.142	0.108	7.285	0.031	0.014
(3)	0.388	0.220	0.027	0.067	0.067	0.132	0.098	7.305	0.017	0.014
(4)	0.427	0.230	0.021	0.052	0.052	0.123	0.094	7.608	0.014	0.011
(5)	0.473	0.234	0.015	0.040	0.040	0.116	0.081	8.103	0.029	0.019
(6)	0.496	0.230	0.013	0.037	0.037	0.111	0.076	8.097	0.037	0.016
(7)	0.512	0.235	0.011	0.033	0.033	0.104	0.073	8.453	0.043	0.018
(8)	0.531	0.231	0.010	0.030	0.030	0.099	0.069	8.436	0.050	0.017
(9)	0.544	0.232	0.008	0.026	0.026	0.099	0.064	8.853	0.056	0.016
(10)	0.597	0.224	0.005	0.019	0.019	0.085	0.052	9.616	0.077	0.014
(11)	0.741	0.181	0.001	0.004	0.004	0.048	0.020	16.152	0.134	0.009
(12)	0.408	0.228	0.024	0.058	0.058	0.126	0.099	7.485	0.012	0.007
(13)	0.363	0.220	0.032	0.072	0.072	0.131	0.110	7.255	0.024	0.014
(14)	0.302	0.204	0.047	0.093	0.093	0.136	0.125	7.079	0.049	0.014
(15)	0.214	0.169	0.081	0.130	0.130	0.135	0.142	7.085	0.090	0.023
(16)	0.078	0.085	0.197	0.196	0.196	0.100	0.149	8.275	0.167	0.083
(17)	0.205	0.174	0.091	0.120	0.120	0.150	0.139	7.028	0.092	0.003
(18)	0.283	0.211	0.055	0.084	0.084	0.158	0.125	7.398	0.057	0.019
(19)	0.338	0.230	0.038	0.063	0.063	0.157	0.111	7.875	0.036	0.010
(20)	0.379	0.240	0.028	0.050	0.050	0.153	0.100	8.359	0.025	0.014
(21)	0.271	0.201	0.059	0.096	0.096	0.148	0.129	7.147	0.062	0.014
(22)	0.700	0.191	0.002	0.011	0.011	0.053	0.033	9.729	0.118	0.010
(23)	0.856	0.114	0.000	0.002	0.002	0.017	0.009	14.286	0.182	0.020
(24)	0.932	0.061	0.000	0.000	0.000	0.005	0.002	23.125	0.215	0.026
(25)	0.968	0.030	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	39.824	0.231	0.026
(26)	0.470	0.200	0.019	0.053	0.053	0.115	0.091	7.147	0.001	0.026
(27)	0.348	0.227	0.032	0.075	0.075	0.134	0.110	7.110	0.029	0.065
	0.413	0.225	0.043	0.069	0.055	0.104	0.091	Фактическое значение вектора (из закона о ВНП за 1972 г.)		

Таблица 3.5. Пример с расстояниями

	Каир	Токио	Чикаго	Сан-Франциско	Лондон	Монреаль
Каир	E		$B(D-A)$	W	W	D
Токио	W	E	A	W	W	A
Чикаго	—	—	E	—	—	$B(E-W)$
Сан-Франциско	—	—	$B(S-D)$	E	—	$B(S-D)$
Лондон	—	—	S	W	E	$B(S-D)$
Монреаль	—	—	—	—	—	E

Таблица 3.5а

Собственный вектор для каждой шкалы							$\lambda_{\max}$	СКО	МАО
(1)	0.234	0.296	0.083	0.150	0.175	0.062	6.258	0.043	0.039
(2)	0.247	0.320	0.058	0.150	0.180	0.045	6.224	0.027	0.015
(3)	0.253	0.334	0.045	0.151	0.183	0.035	6.190	0.019	0.008
(4)	0.262	0.397	0.033	0.116	0.164	0.027	6.454	0.019	0.010
(5)	0.265	0.437	0.027	0.098	0.154	0.019	6.870	0.036	0.011
(6)	0.267	0.443	0.024	0.099	0.152	0.016	6.848	0.038	0.011
(7)	0.265	0.483	0.020	0.080	0.138	0.014	7.074	0.057	0.017
(8)	0.266	0.482	0.017	0.082	0.140	0.012	7.106	0.056	0.015
(9)	0.264	0.506	0.016	0.073	0.131	0.010	7.494	0.067	0.019
(10)	0.259	0.550	0.011	0.058	0.116	0.007	8.109	0.088	0.024
(11)	0.210	0.707	0.002	0.019	0.061	0.001	13.727	0.159	0.048
(12)	0.259	0.380	0.037	0.124	0.169	0.030	6.354	0.013	0.010
(13)	0.251	0.340	0.047	0.143	0.178	0.042	6.171	0.018	0.013
(14)	0.236	0.286	0.062	0.168	0.187	0.062	6.042	0.044	0.019
(15)	0.202	0.210	0.091	0.201	0.190	0.107	6.092	0.086	0.042
(16)	0.113	0.084	0.156	0.227	0.154	0.266	7.261	0.178	0.144
(17)	0.203	0.227	0.117	0.165	0.178	0.110	6.022	0.082	0.070
(18)	0.233	0.321	0.085	0.131	0.172	0.065	6.349	0.039	0.044
(19)	0.247	0.371	0.066	0.110	0.163	0.045	6.779	0.024	0.024
(20)	0.253	0.414	0.053	0.094	0.153	0.033	7.214	0.032	0.023
(21)	0.229	0.282	0.083	0.153	0.181	0.073	6.111	0.049	0.040
(22)	0.254	0.591	0.004	0.048	0.101	0.003	7.993	0.106	0.030
(23)	0.198	0.736	0.000	0.015	0.050	0.000	11.180	0.172	0.049
(24)	0.138	0.837	0.000	0.004	0.022	0.000	17.124	0.219	0.061
(25)	0.089	0.901	0.000	0.001	0.009	0.000	27.862	0.250	0.075
(26)	0.257	0.385	0.029	0.138	0.166	0.025	6.156	0.015	0.009
(27)	0.248	0.342	0.044	0.151	0.175	0.039	6.097	0.019	0.029
	0.278	0.381	0.032	0.132	0.177	0.019	Фактическое значение вектора (фактическое расстояние)		

сама по себе. Это указывает на склонность человека приводить в соответствие оттенки чувств с числами 1–9. Некоторые даже предполагают, что это связано со свойствами мозга, которое некоторым образом связано с числом пальцев, хотя и неизвестно, что является каузальным фактором. При условии, что мозг может одновременно обработать 7±2 факторов, можно провести иерархическую декомпозицию больших матриц в кластеры такого размера, к которым шкала 1–9 еще может быть применена. Это указывает на возможную в общих ситуациях ее жизнеспособность, которую мы подтвердили только для малых кластеров.

Замечание. Последняя шкала – (27) в табл. 3.2 возникает из следующего соображения. Используя геометрическое среднее величины суждения, оцененного несколькими лицами (см. последний абзац этого раздела), можно заметить, что геометрическое среднее двух чисел: 2 и 8 есть 4, что на один интервал ближе к 2, чем к 8 (в отличие, например, от геометрического среднего 1/3 и 3, которое находится на расстоянии двух интервалов от каждого). Это склоняет нас к введению шкалы для обратно-симметричных матриц, сохраняющей отношение вида $x/y = y/z$ или $y^2 = xz$, из которого получаем $\log y - \log x = \log z - \log y$. Данное соотношение можно получить, если шкалу с девятью значениями и восемью интервалами разделить следующим образом: начать с единицы, затем (например) $9^{1/8}$, $9^{2/8}$ и т. д., применяя также и обратные величины. Этим можно улучшить согласованность, но, как показывают наши примеры, не обоснованность (надежность).

Вот один способ проверки качества согласованности, полученной при использовании различных шкал. Для матриц всех размеров до 15 создадим по 100 выборок и заполним случайным образом их элементы числами из шкал 1–5, 1–7, 1–9, 1–15, 1–20 и 1–90. Так, например, для шкалы 1-5 элементы главной диагонали будут, как всегда, единицы, а для любого элемента над диагональю выбираем случайно любое из целых чисел 1–5 или их обратные величины. Обратная величина этого элемента будет симметричным элементом. Ту же самую процедуру проведем и для других шкал. Усредним величину $(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$ для 100 матриц, соответствующих каждому значению n для каждой шкалы. Вычислим также дисперсии.

В результате имеем табл. 3.6, которая полезна для сравнения значения вычисленного отклонения от согласованности для отдельной задачи, со средним значением, полученным для использованной шкалы. В нашем случае существенными являются значения для шкалы 1–9. При этом сравнении можно требовать, чтобы отношение было малым, например, порядка 0,1. Мы оценили частотное распределение $\lambda_{\max}$, основанное еще на одной выборке из 500. Для $n = 2$ оно постоянно, $\lambda_{\max} = 2$; для $n = 3$ совокупное распределение есть распределение Вейбулла $1 - \exp\left[-\left(\lambda_{\max}/b\right)^2\right]^c$, где $b = 4{,}076$ и $c = 1{,}937$. Для $n \geq 4$ имеем усечённое нормальное распределение со следующими средними и дисперсиями выборки: $n = 4$, (6,650; 3,370); $n = 5$, (9,418; 4,424); $n = 6$, (12,313; 4,413); $n = 7$, (15,000; 4,123); $n = 8$, (17,952; 3,627); $n = 9$, (20,565; 3,327). На практике используются величины, приведенные в гл. 1 для сравнений случайной согласованности шкалы 1–9.

Таблица 3.6. Мера несогласованности μ*

Порядок матрицы	Среднее значение и дисперсии для шкал					
	1–5	1–7	1–9	1–15	1–20	1–90
3×3	0.190 0.024 545	0.254 0.193 822	0.382 0.266 743	0.194 0.026 226	0.120 0.006 869	0.720 0.213 737
4×4	0.520 0.086 061	0.592 0.109 430	0.946 0.433 014	0.920 0.726 465	0.934 0.385 499	1.490 0.858 485
5×5	0.454 0.026 549	0.814 0.087 479	1.220 0.278 788	2.018 1.024 723	2.352 2.157 268	11.690 84.438 283
6×6	0.612 0.016 420	0.892 0.075 895	1.032 0.180 380	2.594 0.530 469	3.484 0.837 721	16.670 29.536 466

* Эта таблица любезно предоставлена доктором Р. Уппулури из Национальной лаборатории г. Ок-Риджа.

7×7	0.582 0.036 440	1.004 0.077 964	1.468 0.120 986	2.428 0.473 147	3.566 0.867 923	18.230 19.694 040
8×8	0.620 0.016 970	1.030 0.036 667	1.402 0.073 935	2.578 0.227 794	3.654 0.448 368	17.280 8.435 959
9×9	0.640 0.014 949	1.002 0.031 915	1.350 0.047 980	2.714 0.180 408	3.816 0.338 731	18.060 8.551 918
10×10	0.668 0.010 279	1.090 0.019 697	1.464 0.028 590	2.822 0.138 905	3.970 0.254 848	19.670 5.172 827
11×11	0.688 0.010 360	1.082 0.022 703	1.576 0.046 691	2.830 0.100 505	3.822 0.209 208	19.670 4.425 352
12×12	0.704 0.007 257	1.096 0.029 075	1.476 0.317 410	2.785 0.097 923	3.948 0.187 572	19.730 2.724 343
13×13	0.712 0.009 552	1.136 0.022 933	1.564 0.030 610	2.852 0.070 400	4.038 0.104 904	19.790 2.955 453
14×14	0.710 0.003 535	1.150 0.017 273	1.568 0.021 996	2.896 0.054 125	4.034 0.102 671	19.990 2.818 083
15×15	0.720 0.004 444	1.150 0.010 808	1.586 0.021 216	2.942 0.050 339	4.096 0.113 923	19.980 2.534 949

Примечание. Верхняя цифра соответствует среднему значению, нижняя - дисперсии.

Исходя из этого результата, можно сделать другое интересное замечание. Известно, что если λ является любым собственным значением матрицы, то $\left|\lambda - a_{ii}\right| \le \sum_{j \ne i} \left|a_{ij}\right|$ для некоторого i, $i = 1, \ldots, n$.

Так как для положительной обратносимметричной матрицы $\lambda_{\max} \ge n$ и $a_{ii} = 1$, можно просто записать

$$\lambda_{\max} \le \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

При использовании шкалы 1–9 максимальное значение любого a_{ij} будет 9, поэтому $\lambda_{\max}$ самое большее равно $9(n-1)$. Отметим также, что $(\lambda_{\max} - n)(n-1) \le 8$ и поэтому ограничено сверху. Действительно, можно показать, что $\mu = (\lambda_{\max} - n)(n-1)$ удовлетворяет неравенству $0 \le 1 - \mu/3 \le 1$, которое близко к единице, когда имеется высокая согласованность — результат, подтверждённый нашим статистическим подходом. Для каждой шкалы (вместо, использования разностных методов) мы усреднили последние три значения, т. е. для n =13, 14, 15 в табл. 3.6, и использовали их в качестве аппроксимации предельного значения. Обозначив эту величину через L_s для шкалы s, вычислим новую таблицу, используя $C \equiv (L_s - \mu)/L_s$ для каждого n, и измерим согласованность, выраженную как индекс, заключенный между нулем и единицей. Это проиллюстрировано в табл. 3.7 и на соответствующем графике (рис. 3.1).

Таблица 3.7. $(L_s - \mu)/L_s$

Шкала / Порядок	1–5	1–7	1–9	1–15	1–20	1–90
3	0.733 9	0.778 2	0.757 1	0.933 0	0.970 4	0.963 9
4	0.271 7	0.483 1	0.398 5	0.716 9	0.769 7	0.925 2
5	0.364 1	0.289 3	0.224 2	0.303 3	0.402 1	0.413 2
6	0.142 9	0.221 2	0.343 8	0.104 5	0.141 0	0.163 2
7	0.184 9	0.123 4	0.066 6	0.161 8	0.120 8	0.084 8
8	0.131 7	0.100 7	0.108 5	0.110 0	0.099 1	0.132 5
9	0.103 6	0.125 1	0.141 6	0.063 1	0.059 2	0.093 4
10	0.064 4	0.048 3	0.069 1	0.025 8	0.021 2	0.012 6
11	0.036 4	0.055 3	−0.002 1	0.023 0	0.057 7	0.012 6
12	0.014 0	0.043 1	0.061 5	0.038 9	0.026 6	0.009 5
13	0.002 8	0.008 1	0.005 5	0.015 4	0.004 4	0.006 5
14	0.005 6	−0.004 1	0.003 0	0.000 2	0.005 4	−0.003 5
15	−0.008 4	−0.004 1	−0.008 5	−0.015 7	−0.009 9	−0.003 0

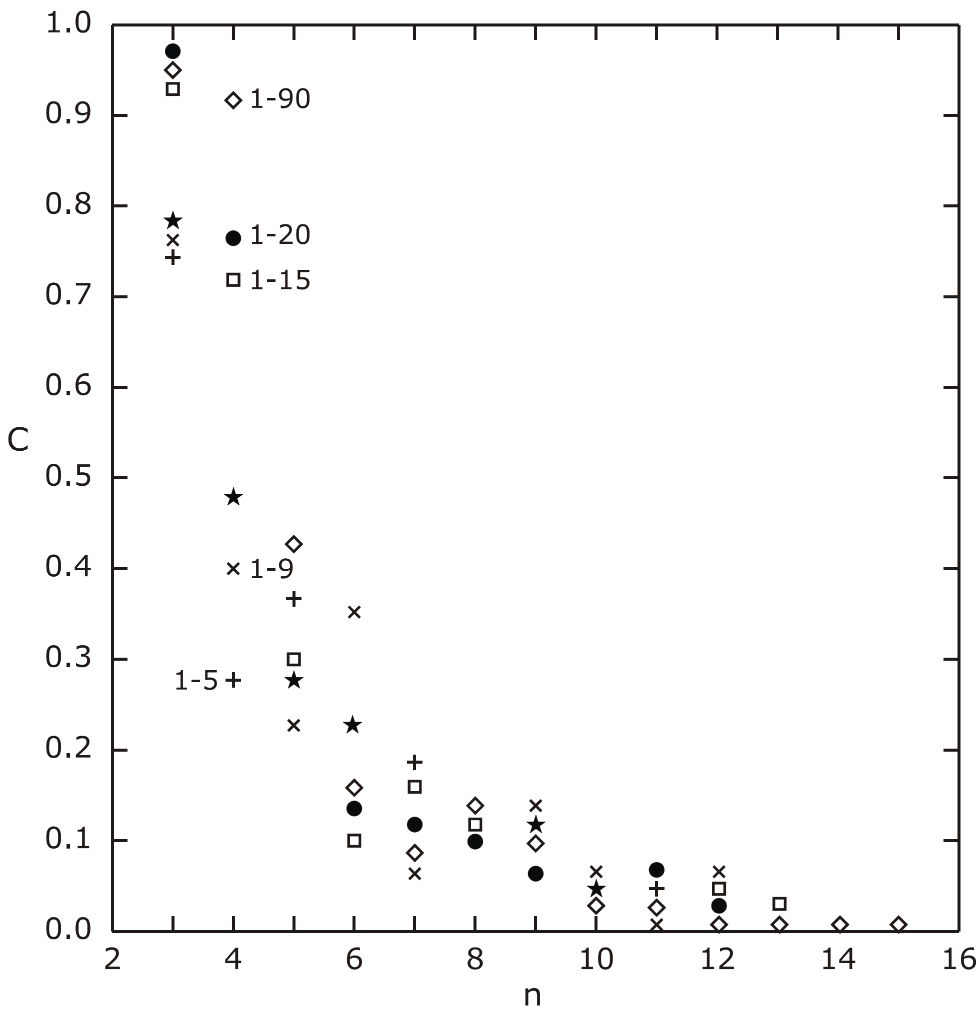


**Рис. 3.1. Нормированная согласованность
с использованием асимптотических значений**

Теперь это согласованность, измеренная для случайным образом заполненных матриц. В общем случае суждение знающего человека ведет к лучшей согласованности. Тем не менее все диаграммы показывают, что если число сравниваемых объектов превышает 5, то величина C меньше 10% и примерно одинакова для всех n.

Это, по-видимому, говорит о том, что среди большого количества случайных несогласованностей, которые встречаются при установлении связи между n объектами, мы должны обнаружить искомую согласованную структуру. Шансы на ее обнаружение тем меньше, чем больше число объектов, которые нужно связать логической структурой. Наши шансы будут тем больше, чем меньше n, однако n должно быть достаточно большим, чтобы не иметь автоматической согласованности, например для $n=2$. Для больших значений n нужно использовать некоторую избыточность информации для улучшения обоснованности, т. е. проверить, насколько хорошо наши результаты будут отражать действительность.

Закончим этот раздел двумя замечаниями. Во-первых, если необходимо провести очень тонкие различия при парных сравнениях, то можно подразделить шкалу 1-9, рассматривая каждую пару значений, скажем 3 и 4, при добавлении к нижнему значению 0,25 для слабой, 0,5 для умеренной и 0,75 для сильной степени. Однако наш опыт не показал, что это дает большую эффективность, кроме случая, когда сравниваются только два объекта. В последнем случае для получения более тонких оттенков различия используется шкала от 1 до 1,5.

Во-вторых, если суждения производят несколько человек, то предпочтительнее, как указано в гл. 1, использовать геометрическое, а не арифметическое среднее. Это особенно понятно, когда один человек присваивает величину a, а другой – величину $1/a$. Среднее должно быть 1, а не $(a+1/a)/2$. Поэтому в общем случае для n суждений нужно перемножить численные значения и извлечь n-й корень

3.4. СРАВНЕНИЕ МЕТОДА СОБСТВЕННОГО ВЕКТОРА С ДРУГИМИ МЕТОДАМИ

Для сравнения точности метода собственного вектора с другими методами при оценке реальной ситуации было проведено несколько экспериментов. В двух экспериментах, проведенных в Корнелльском университете летом 1976 г., группе людей предложили оценить величины непосредственно, найти наименьший элемент и придать ему значение, равное единице, а остальным элементам – кратные значения. Другой группе предложим использовать метод собственного значения со шкалой 1-9, а еще одна группа могла использовать любые желаемые значения, и задача о собственном значении решалась для этих чисел.

В отдельном эксперименте люди решали задачу о собственном значении со шкалой 1–9, и затем те же люди, что участвовали в получении опытных парных сравнений, провели прямые эксперименты. Вероятно, эксперт может оценить ситуацию непосредственно и не может получить лучший результат, используя подход, основанный на методе собственного значения со шкалой 1–9. В социальной области, где обычно не имеется ответов в виде отношений, подход, основанный на собственном значении, представляет собой суждения эксперта при парных сравнениях, которые полезно иметь. Кроме того, данный подход обеспечивает измерение согласованности, которого нет в прямых методах. Результаты сравнивались с действительным значением и вычислялись как СКО, так и МАО. Затем было вычислено среднее значение для обоих методов.

Из этих экспериментов следовало, что если люди не знают, о чем с ними говорят, то не существует шкалы, которая заставит их разобраться в проблеме лучше. Однако если люди понимают кое-что и им требуется некоторая мера, то не существует лучшего способа оценки ситуации по этим суждениям, чем систематическая процедура, которая облегчает сравнения, гармонирует с интуицией и человеческими чувствами, а также свободна от искусственности. Если человек уже знает ответ, то тогда у него нет нужды в какой-либо шкале, и как раз из-за того, что он знает ответ, он не может исходя из своих знаний выявить преимущества метода, примененного, чтобы помочь несведущим людям, которые нуждаются в стимулировании посредством определенного подхода для приведения их представлений в надлежащую форму. Тем не менее его экспертизу можно использовать для того, чтобы убедиться в том, действительно ли метод шкалирования воспроизводит известные результаты. Наши эксперименты не только сравнивали экспертов с несведущими, но также людей, которые были отчасти информированы и тщательны в применении метода, с людьми, которые были отчасти информированы, но менее пунктуальны при выдаче информации. Мы можем сказать, что для хорошо осведомленных людей и для всех людей, использующих здравый смысл для физических сравнений, подход, основанный на собственном значении для шкалирования отношений, выигрывает при сравнении с другими методами, которые рассматривались. Он также дает лучшие результаты для людей, которые частично информированы и пытаются взвесить свое суждение, полученное логически и просто из отношений между парами. Например, они могут начать с классификации предметов в порядковой шкале, а затем выбрать для сравнения отдельные предметы, в оценке которых они уверены. Среди этих предметов они могут начать с доминирующего предмета, а затем перейти к наименее важному, чтобы получить пределы диапазона своих мнений. Так, по крайней мере, тысяча людей участвовала в решении задач, включая приложения для властей и для промышленности. Некоторые использовали метод для своих личных проблем. Несколько приложений было из класса упражнений.

3.5. ПЕРЕСМОТР СУЖДЕНИЙ

Допустим, что индекс согласованности достаточно велик, чтобы служить оправданием пересмотра суждении. На каком этапе это следует сделать? Непосредственно можно представить два способа. Первый заключается в формировании матрицы отношений приоритетов ω_i/ω_j, рассмотрении матрицы абсолютных разностей $\left[\left|a_{ij}-\left(\omega_i/\omega_j\right)\right|\right]$ и попытке пересмотра суждения об элементе (элементах) или суммы строк с наибольшими разностями.

В противоположность этому более привлекательна мысль сформировать среднеквадратичное отношение с использованием строк a_{ij} и $\left(\omega_i/\omega_j\right)$ и пересмотреть суждения для строки с наибольшим значением. Оправданием этого служит то, что в общем случае человек имеет склонность к неопределенности при оценке отношения одного действия ко всем другим действиям, а не просто к одному конкретному. Процедура может затем повторяться, чтобы было заметно улучшение. Было бы желательно иметь сходящуюся итеративную процедуру, при которой a_{ij} приближалось бы к ω_i/ω_j. Процедура состоит из замены всех a_{ij} в строке, о которой идет речь, соответствующими ω_i/ω_j и пересчета вектора приоритета. Повторение этого процесса приводит к сходимости к согласованному случаю. Мы решали несколько примеров, используя строку с $\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}-\left(\omega_i/\omega_j\right)\right|$ (не нужно беспокоиться о том, что ω_i/ω_j может быть больше 9).

Матрица профессиональной подготовки в примере выбора школы имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 1/9 & 1 & 1/5 \\ 1/7 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

и ее вектор приоритетов есть $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0,77;\ 0,06;\ 0,17)$; $\lambda_{\max} = 3,21$ с индексом согласованности, равным 0,1. Образуем матрицу отношений приоритетов, соответствующих ω_i / ω_j. Наибольшая абсолютная разность – между a_{12} и ω_1 / ω_2. Поэтому, заменив a_{12} на $\omega_1 / \omega_2 = 14,15$ и пересчитав приоритеты, получим вектор $(0,81;\ 0,94;\ 0,15)$ с $\lambda_{\max} = 3,09$ и согласованностью 0,02. Отметим продолжающееся улучшение согласованности. Если снова заменим первую строку, которая дает наибольшие разности с ω_i / ω_j, то получим вектор $(0,76;\ 0,04;\ 0,20)$ и $\lambda_{\max} = 3,023$ с согласованностью 0,01. Заменив первую строку соответствующими отношениями, имеем вектор $(0,75;\ 0,04;\ 0,21)$ с $\lambda_{\max} = 3,003$ и индексом согласованности 0.00, указывающим на последовательное улучшение, согласованности. Как видно, можно принять и более длительную процедуру, в которой используется аппроксимация методом наименьших квадратов с помощью матрицы единичного ранга и затем вычисляется ее собственный вектор.

Другой и возможно более уместный способ пересмотра суждений относится к выбору наибольшего из отношений a_{ij} к ω_i / ω_j и проработке этой идеи (см. гл. 7 для доводов).

Следует избегать чрезмерного увлечения этим процессом навязывания величин суждений для улучшения согласованности. Он искажает ответ. Улучшить суждения скорее следует естественным образом, исходя из опыта.

3.6. ВСЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ: ПРИМЕР НАЦИОНАЛЬНЫХ БОГАТСТВ ИЗ ГЛ. 2

В табл. 3.8. для всех собственных значений представлены как левые (удовлетворяющие $\upsilon A = \lambda \upsilon$), так и правые (удовлетворяющие близкому по форме выражению $A\omega = \lambda\omega$) собственные векторы. Для $\lambda = \lambda_{max}$ левый собственный вектор – двойственный (т. е. обратный) правому собственному вектору, как и способ измерения противоположности влияния по отношению к свойству, которое нами использовалось при проведении сравнений. Когда имеется согласованность, эти два главные (левый и правый) собственные векторы точно взаимообратны. Это отношение имеет место между главными левым и правым собственными векторами всех обратносимметричных матриц размера 2×2 и 3×3.

Таблица 3.8. Пример национальных богатств

Собственные значения						
7.7451	0.1157+2.2985*i*	0.1157–2.2985*i*	–0.4464+0.5161*i*	–0.4464–0.5161*i*	–0.0419+0.3989*i*	–0.0419–0.3989*i*
Правые собственные векторы						
0.422	0.775–0.525*i*	0.775+0.525*i*	1.382+0.387*i*	1.382+0.387*i*	1.494–0.011*i*	1.494+0.011*i*
0.227	0.421+0.178*i*	0.421–0.178*i*	–0.266+0.757*i*	–0.266+0.757*i*	–0.821–0.374*i*	–0.821+0.374*i*
0.020	0.005–0.045*i*	0.005+0.045*i*	–0.070–0.032*i*	–0.070–0.032*i*	–0.095+0.038*i*	–0.095–0.038*i*
0.051	–0.069–0.011*i*	–0.069+0.011*i*	0.058+0.151*i*	0.058+0.151*i*	0.597–0.232*i*	0.597+0.232*i*
0.047	–0.093–0.011*i*	–0.093+0.011*i*	0.068+0.070*i*	0.068+0.070*i*	–0.123+0.258*i*	–0.123–0.258*i*
0.143	0.014+0.292*i*	0.014–0.292*i*	–0.198–0.217*i*	–0.198–0.217*i*	0.869+1.616*i*	0.869–1.616*i*
0.090	–0.042+0.123*i*	–0.042–0.123*i*	0.026–0.342*i*	0.026–0.342*i*	–0.920–1.295*i*	–0.920+1.295*i*

Левые собственные векторы						
0.022	−0.001−0.047i	−0.001+0.047i	−0.060−0.036i	−0.060+0.036i	−0.116−0.188i	−0.116+0.188i
0.039	−0.070−0.036i	−0.070+0.036i	0.026+0.125i	0.026−0.125i	−0.092+0.932i	−0.092−0.932i
0.450	0.847−0.509i	0.847+0.509i	1.364−0.222i	1.364+0.222i	0.468−0.680i	0.468+0.680i
0.155	0.145+0.128i	0.145−0.128i	0.160+0.174i	0.160−0.174i	8.108−6.549i	8.108+6.549i
0.186	0.235+0.304i	0.235−0.304i	−0.554+0.206i	−0.554−0.206i	−8.664+6.397i	−8.664−6.397i
0.061	−0.099+0.056i	−0.099−0.056i	0.076−0.096i	0.076+0.096i	−1.115−1.808i	−1.115+1.808i
0.087	−0.057+0.104i	−0.057−0.104i	−0.012−0.152i	−0.012+0.152i	2.412+1.895i	2.412−1.895i

3.7. КОНСЕНСУС И МЕТОД ДЕЛЬФИ

Важной особенностью, относящейся к высказыванию суждений несколькими лицами, является то, каким образом достигается консенсус из их суждений. Процесс достижения консенсуса может быть использован для убеждения людей в том, что их интересы принимаются во внимание. Поэтому для наших целей консенсус означает увеличение уверенности в значениях приоритетов посредством привлечения нескольких экспертов для приведения приоритетов в соответствие с предпочтениями большинства.

Есть несколько интересных работ, проведенных по проблеме достижения консенсуса: Кемени и Снэлл [81], чья работа была обобщена Богартом [14, 15], использовали аксиоматический подход для разработки метода достижения консенсуса в случае слабого упорядочения (предпочтительно – 1, равенство – 0, непредпочтительно – -1) множества объектов несколькими лицами. Они доказали, что существует единственная функция расстояния, удовлетворяющая всем аксиомам. Эта функция использована для получения матрицы консенсуса посредством поиска для каждого элемента величины, которая минимизирует сумму квадратов расстояний до каждого соответствующего элемента матриц суждений, построенных несколькими лицами. Результатом может быть не целое число; некоторые исследователи на практике округляют числа до ближайшего целого. Величина, полученная таким образом, называется средней. Функция расстояния также используется для получения матрицы медианных значений. Каждый элемент этой матрицы минимизирует сумму расстояний до соответствующих элементов матриц суждений. Хотя как среднее, так и медиана представляются разумными способами достижения консенсуса, среднее обеспечивает способ «приравнивания объектов», которые сравниваются, в то время как медиана предлагает способ «отбора среди экспертов», высказывающих суждение. В нашем случае применяется геометрическое среднее.

Богарт обобщил подход функции расстояния на все частичные упорядочения множества, распространив предыдущую работу на полуупорядочения и интервальные упорядочения и даже на нетранзитивные упорядочения. После доказательства единственности функции расстояния, удовлетворяющей разумному набору аксиом, среди прочих вещей он показал следующее:

1. Среднее набора упорядочений в множестве всех антисимметричных упорядочений удовлетворяет правилу решения (называемому правилом сильного большинства), согласно которому a предпочтительнее b, если число предпочитающих элемент a элементу b минус число предпочитающих b элементу a больше половины числа лиц, производящих суждение. Правило ведет к единственному среднему набора.
2. Упорядочение правилом большинства (при котором a предпочтительнее b, если это утверждает большинство людей, высказывающих суждение) для множества антисимметричных упорядочений является медианой множества. Эта медиана единственна, если число экспертов, предпочитающих элемент a элементу b, не равно числу экспертов, предпочитающих b элементу a.

В настоящей работе консенсус достигается по различным направлениям. Решающим является количество информации, имеющейся для произведения суждений.

При поиске консенсуса предпочтительно взаимодействие экспертов. Хорошо информированное лицо может существенно повлиять на мнение лица, обладающего меньшей информацией. Дискуссия может помочь сблизить суждения и обеспечить информацией самих экспертов для применения метода установления приоритетов.

Следовательно, наш подход к консенсусу заключается в применении метода нахождения приоритетов для нескольких лиц, вовлекаемых в соответствии с содержанием их суждения. Факторами, влияющими на суждение, могут быть: относительный интеллект (однако, измеренный), опыт, информированность, глубина знаний, опыт в смежных областях, личный интерес в исследуемом вопросе и т. д. Если к суждению этих людей мы относимся с большим доверием, то полученный приоритет используется для взвешивания окончательного результата, полученного из суждения каждого лица, и затем общий взвешенный приоритет определяется обычным путем. С другой стороны, если степень доверия к суждениям, произведенным экспертами, низка, то следует применять геометрическое среднее их индивидуальных суждений в каждой матрице сравнений.

В промежуточных ситуациях можно прибегнуть к комбинации этих двух процедур, однако подробно эту проблему мы не изучали. Другой областью исследования является сравнение результатов, полученных этим путем и в других работах.

Как представить групповое суждение удовлетворительным образом, когда опыт и суждения людей различаются? Чьи мнения должны быть более серьезно приняты во внимание и почему? – важные задачи социальных исследований и анализа конфликтов.

Представляется, что мысль, развитую и оцененную одной группой, следует передать другой группе для обсуждения и изменения суждения. Но конечный результат может все же еще сильно меняться. Поэтому переговоры и приход к соглашению должны быть внутренней процедурой группового согласия. Не следует выносить третейского решения по приоритетам, используя суждения привилегированной группы по сравнению с остальными. Другими словами, выявление удобной и пригодной для работы математической схемы для задачи не решает автоматически ее социальных сложностей. Тем не менее эта схема может упростить процесс выявления того, где должны быть достигнуты наиболее плодотворные компромиссы и соглашения. Если социальная задача требует арбитража, то посредник должен тщательно оценить потребности и влияния групп перед тем, как указать, где следует пойти на компромиссы. Возможно, наиболее многообещающим вкладом иерархического анализа является использование в структурировании задачи с самого начала взаимно конфликтующих групп, а не пассивных свидетелей, а затем приход к соглашению через численные входные данные.

Рассмотрим кратко еще один метод, который сильно зависит от концепции консенсуса, – метод Дельфи. Этот метод является хорошо известным процессом, который позволяет анализировать задачи, оценивать величины и прогнозировать перспективную пользу от управления. Ниже приведено общее описание процедуры как часть сравнения с иерархическим анализом.

Основные различия между методом Дельфи и иерархическим анализом следующие:

1. *Анонимное по сравнению с описанным групповое обсуждение.* В методе Дельфи каждый участник группы отвечает анонимное на заранее подготовленную анкету, чтобы избежать непропорционального влияния сильных личностей. В иерархическом анализе критерии и суждения устанавливаются в основном открытым групповым процессом.
2. *Корректировка представляет собой последовательность туров по сравнению с динамическим обсуждением.* В методе Дельфи должен быть дан обзор результатов анкетирования, а корректировку требуется провести вновь на анонимной основе. В иерархическом анализе при построении иерархии и произведении суждений используется динамическое обсуждение посредством взаимного

соглашения и пересмотра взглядов. Участники пытаются представить свои аргументы открыто.

3. *Анкета в качестве основы для суждений по сравнению с иерархической структурой.* В методе Дельфи вид анкеты предполагает выбор переменных, включенных лицом, создающим анкету. В иерархиях группа решает, какие переменные производят воздействие на требуемое суждение. Вначале все предложенные переменные принимаются. Позже в процедуре некоторыми из них можно пренебречь из-за низкого приоритета, приписанного им группой.
4. *Статистический и количественный анализ по сравнению с качественным анализом.* Метод Дельфи требует численных ответов, которые должны быть подвергнуты статистическому анализу в качестве основы для следующего тура. Для иерархий в суждения включены абсолютные числа от 1 до 9, отражающие качественные суждения о парном сравнении и используемые как часть получения точной оценки для основной шкалы отношений. Согласованность как необходимое условие, обосновывающее шкалирование реальности, является важным критерием.

В обоих случаях процесс анализа задачи улучшает качество суждений, однако метод иерархического анализа расчленяет суждение на элементарные компоненты и поэтому лучше подходит к познавательной манере человека. Другим важным итогом является определение группой множества важных переменных, что придает ей большую уверенность в релевантности своих суждений. Эта процедура полезна для уменьшения рассогласований открытым динамическим образом. Многие исследователи, пользующиеся ею на практике, рекомендовали ее использование при планировании и прогнозировании как краткую и простую процедуру, отражающую мнения участников с весьма эффективным результатом.

3.8. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Частое применение парных сравнений ведет к заинтересованности при сравнениях троек, четверок и т. д. Примером сравнения троек является мысль о нахождении между. Например, *B* между *A* и *C* требует представления всех трех элементов: *A*, *B* и *C*. Если нас интересует разработка шкалы для множества элементов из тройных сравнений или сравнение более высокого порядка, то необходим метод представления сравнений для получения шкалы. Простым способом представления такого n-арного отношения является использование вектора, численные входы которого указывают на взаимное положение n элементов в сравнении.

Известно, что с векторами пар можно ассоциировать числа следующим образом.

Достаточно показать, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством E^1 действительных чисел x, таких, что $0 < x \le 1$, и множеством E^2 точек на плоскости, определяемом как $E^2 = \{(x, y) | (0 < x \le 1) \text{ и } (0 < y \le 1)\}$. Теперь каждый элемент x в E^1 может быть представлен в форме $0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$. Этот массив может быть разделен на «блоки». Таким образом, число 0,740653001... имеет последовательные блоки 7, затем 4, затем 06, затем 5, затем 3, затем 001 и т. д. Каждый блок имеет разряд, отличный от нуля, и это последний разряд блока. Мы имеем упорядоченную пару $(0, x_1^1, x_2^1, \ldots, 0, x_1^2, x_2^2, \ldots)$ с $x_1^1 = 7$, $x_1^2 = 4$, $x_2^1 = 0{,}6$, $x_2^2 = 5$, $x_3^1 = 3$, $x_3^2 = 001$ и т. д., что дает (0,7063; 0,45001), в котором блоки приписаны попеременно к двум координатам точки в E^2. Этот обратимый процесс представляет взаимно однозначные соответствия между элементами в единичном интервале и точками в единичном квадрате с нулем (0,0).

Ясно, что процесс (хотя и неоднозначный) может быть распространен на 3-компонентный вектор, если взять первый вход вместе с числом в E^1, которое ассоциировано с вектором следующих двух входов, и затем, ассоциируя новое число в E^1 с полученной парой и т. д., можно распространить процесс для n-компонентных векторов. Таким образом (хотя и не единственным) можно концептуально ассоциировать числа векторами. Для определенной задачи необходим хороший способ, позволяющий сделать выбор.

Можно также распространить подход, основанный на собственных значениях для парных сравнений, на использование комплексных чисел. Процесс будет соответствовать сравнению объектов относительно двух независимых признаков одновременно. При согласованном случае остается $A\omega = n\omega$ с n, являющимся наибольшим собственным значением A, и отношение согласованности $a_{jk} = a_{ik} / a_{ij}$ также остается в силе. Малые возмущения в коэффициентах могут теперь произвести малое комплексное возмущение в n, в результате чего получим $\lambda_{\max}$ – комплексное число, и, конечно, решение в общем случае будет комплексным. Нормализация к единице прямым сложением больше не имеет смысла. Может стать необходимым применение евклидовой нормы $(a_1, a_2) = a_1 + ia_2$, которая будет $\left(a_1^2, a_2^2\right)^{1/2}$. Обобщение может быть проведено на кватернионы, т. е. числа вида

$$a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4,$$

и на октавы или октонионы, включающие восемь мнимых аргументов. Известно, что дальше этих чисел выйти невозможно, так как тождества вида

$$\left(a_1^2 + \ldots + a_8^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_8^2\right) = c_1^2 + \ldots + c_8^2$$

возможны только для сумм 1, 2, 4 и 8 квадратов [167].

ГЛАВА 4
ИЕРАРХИИ И ПРИОРИТЕТЫ: ФОРМАЛЬНЫЙ ПОДХОД

4.1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на отчасти абстрактное содержание данной главы, она включена в первую часть книги, поскольку имеет решающее значение для приложений. Иллюстративные примеры, представленные ранее, в достаточной степени продемонстрировали идею о композиции весов в иерархии. Читатель-неспециалист может пропустить начальные математические рассуждения главы и перейти к оставшимся разделам, в которых дано более глубокое обоснование важной роли, которую играют иерархии в человеческом мышлении.

Начинается глава с изложения формального определения иерархии и структуры приоритетов. Затем следует обсуждение группирования и его эффективности, стандартизации измерения и согласованности иерархии. Кроме того, представлена интерпретация концепции приоритетов, основанная на теории графов. Читателю, имеющему поверхностные знания по теории матриц и теории графов, советуем сперва ознакомиться с двумя приложениями по этим предметам.

4.2. ИЕРАРХИИ И ПРИОРИТЕТЫ

Как подтверждают примеры и графические представления иерархий, которые были даны в начале книги, иерархию можно рассматривать как специальный тип упорядоченных множеств или частный случай графа. Первая интерпретация выбрана в качестве основы нашего формального определения, а вторая – в качестве иллюстрации. Без сомнения, роли могут поменяться местами.

Определение 4.1. Упорядоченным множеством называют любое множество S с бинарным отношением $\leq$, которое удовлетворяет законам рефлексивности, антисимметричности и транзитивности:

Рефлексивность: для всех x, $x \leq x$.

Антисимметричность: если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$.

Транзитивность: если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$.

Для любого отношения $x \leq y$ (читается: x предшествует y) такого типа можно определить $x < y$, что означает $x \leq y$ и $x \neq y$. Говорят, что y покрывает (доминирует) x, если $x < y$ и если $x < t < y$ невозможно ни для какого t.

Упорядоченные множества с конечным числом элементов могут быть удобно представлены направленным графом. Каждый элемент системы представлен вершиной так, что дуга направлена от a к b, если $b < a$.

Определение 4.2. Просто или вполне упорядоченное множество (также называемое цепью) есть упорядоченное множество со следующим дополнительным свойством: если $x, y \in S$, то или $x \leq y$, или $y \leq x$.

Определение 4.3. Подмножество E упорядоченного множества S называют ограниченным сверху, если существует элемент $s \in S$ такой, что $x \leq s$ для любого $x \in E$. Элемент s называют *верхней границей* E. Говорят, что E имеет супремум или наименьшую верхнюю границу в S, если E имеет верхние границы и у множества верхних границ U имеется элемент u_1 такой, что $u_1 \leq u$ для всех $u \in U$. Элемент u_1 – единственный и называется супремумом E в S.

Символ $\sup$ используется для обозначения супремума. (Для конечных множеств наибольшие элементы и верхние границы одинаковы.)

Аналогичные определения могут быть даны для множеств, ограниченных снизу – *нижняя граница и инфимум*. Здесь используют символ $\inf$.

Существует много способов определения иерархии. Нашим целям наиболее соответствует следующий:

Воспользуемся обозначением $x^{-}=\{y \mid x \text{ покрывает } y\}$ и $x^{+}=\{y \mid y \text{ покрывает } x\}$ для любого элемента x в упорядоченном множестве.

Определение 4.4. Пусть H – конечное частично упорядоченное множество с наибольшим элементом b .

H есть *иерархия*, если выполняются следующие условия.

1. Существует разбиение H на подмножества $L_k, k=1,\dots,h$, где $L_1=\{b\}$.

2. Из $x\in L_k$ следует, что $x^{-}\subset L_{k+1}$, $k=1,\dots,h-1$.

3. Из $x\in L_k$ следует, что $x^{+}\subset L_{k-1}$, $k=2,\dots,h$.

Для каждого $x\in H$ существует такая весовая функция (сущность ее зависит от явления, для которого строится иерархия):

$$\omega_x : x^{-}\to[0,1], \text{ что } \sum_{y\in x^{-}}\omega_x(y)=1.$$

Множества L_i являются *уровнями* иерархии, а функция ω_x, есть функция *приоритета* элемента одного уровня относительно цели x. Заметим, что даже если $x^{-}\not\subset L_{k+1}$ (для некоторого уровня L_k), то ω_x может быть определена для всех L_k , если приравнять ее к нулю для всех элементов в L_{k+1} , не принадлежащих x^{-} .

Мы считаем, что весовая функция вносит важный вклад в применение метода анализа иерархии.

Определение 4.5. Иерархия называется полной, если для всех $x\in L_k$ множество $x^{+}=L_{k-1}$, при $k=2,\dots,h$.

Можно сформулировать главный вопрос:

Основная задача. Как определить для любого заданного элемента $x\in L_\alpha$, и подмножества $S\subset L_\beta$, $(\alpha<\beta)$ функцию $\omega_{x,S}:S\to[0,1]$, чтобы она отражала свойства функций приоритетов ω_x на уровнях L_k , $k=\alpha,\dots,\beta-1$. В частности, что это за функция $\omega_{x,L_h}:L_h\to[0,1]$?

Используя менее формальную терминологию, задачу можно переформулировать следующим образом.

Рассмотрим социальную (или экономическую) систему с главной целью b и множеством основных видов действий L_h . Пусть эту систему можно представить как иерархию с максимальным элементом b и нижним уровнем L_h . Каковы приоритеты элементов уровня L_h по отношению к b ?

С точки зрения оптимизации для распределения ресурсов между элементами необходимо учитывать также все взаимосвязи между ними. Аналитически взаимосвязь может принять вид отношений типа вход–выход, например, имеющих место при взаимном обмене продукцией между отраслями промышленности. Отрасль с более высоким приоритетом может зависеть от потока продукции, выпускаемой отраслью с более низким приоритетом. В рамках оптимизации приоритет элементов позволяет определить целевую функцию, которую затем следует максимизировать, а другие иерархии позволяют получить информацию, касающуюся связей, например отношений типа вход–выход.

Теперь изложим наш метод решения основной задачи. Предположим, что $Y=\{y_1,\ldots,y_{m_k}\}\subset L_k$ и $X=\{x_1,\ldots,x_{m_{k+1}}\}\subset L_{k+1}$. (Заметим, что в соответствии с замечанием, следующим за определением 4.4, можно предположить, что $Y=L_k$, $X=L_{k+1}$.) Пусть также существует элемент $z\in L_{k-1}$, такой, что $y\in z^-$. Рассмотрим теперь функции приоритетов

$$\omega_x : Y\to[0,1] \text{ и } \omega_j : X\to[0,1],\ j=1,\ldots,n_k .$$

Обозначив через ω, $\omega : X\to[0,1]$ «функцию приоритета элементов из X относительно z», зададим ее следующим образом:

$$\omega(x_i)=\sum_{j=1}^{n_k}\omega_{y_j}(x_i)\,\omega_z(y_j),\ i=1,\ldots,n_{k+1} .$$

Очевидно, что это не что иное, как процесс взвешивания показателя влияния элемента y_i на приоритет элемента x_i, путем умножения этого показателя на важность элемента y_i относительно z.

Соответствующие алгоритмы упростятся, если из $\omega_{y_i}(x_i)$ образовать матрицу B, положив $b_{ij}=\omega_{y_j}(x_i)$. Если обозначить далее $W_i=\omega(x_i)$ и $W_j^{'}=\omega_z(y_j)$, то приведенная выше формула примет вид

$$W_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}W_j^{'},\ i=1,\ldots,n_{k+1} .$$

Итак, можно говорить о *векторе приоритетов* ω и о *матрице приоритетов* B $(k+1)$-го уровня. В результате имеем окончательную формулу

$$W=BW^{'} .$$

Предыдущая композиция приоритетов включает взвешивание и суммирование. Это требует независимости критериев на каждом уровне, в противном случае один элемент может получить некоторый приоритет относительно некоторого признака и дополнительный приоритет, вызванный перекрыванием этого признака с другим признаком, что вызовет двойной учет. В простых терминах множество признаков или критериев называют независимым, если возможна взаимозаменяемость любой пары безотносительно влияния других. Иными словами, критерии независимы, если между ними нет взаимодействия. Существуют формальные определения независимости и тщательно разработанные методы ее тестирования, использующие суждения участников (см., например, [79]). Помимо неформальных обсуждений независимости существуют строгие и требующие больших затрат времени методы проверки независимости. На практике люди предпочитают полагаться на интуитивную интерпретацию отсутствия взаимодействия, чем производить серию тестов. При проведении теста с каждым признаком ассоциируется множество «уровней», например, при обучении имеются уровни оценок A, B, C, D и т. д. Проверяется предпочтение в суждениях между ними для определенного индивидуума, которое может быть порядковым или количественным. Если кроме обучения имеются другие признаки, то необходимо зафиксировать каждый на некотором базовом уровне, прежде чем проводить сравнение предпочтения A, B, C, D. Затем следует изменить уровень одного из других признаков и провести сравнение предпочтения между разными уровнями обучения A, B, C, D. Продолжать это нужно, меняя все уровни второго признака. Если предпочтение между A, B, C, D остается тем же, то говорят, что обучение условно независимо от второго признака. Условно оно потому, что другие признаки зафиксированы на определенном уровне. Если имеется несколько признаков, то процесс продолжается. Для аддитивности два вида деятельности должны быть независимыми и удовлетворять условию сокращаемости. Для трех каждая пара должна быть независима, а также должны быть удовлетворены другие условия, и т. д. Теперь повторим основную идею просто в рамках теории множеств и изложим принцип.

Принцип иерархической композиции: аддитивность взвешивания

Задано два конечных множества S и T. Пусть S – множество независимых свойств (примеры зависимости см. в гл. 8) и T – множество объектов, которые в качестве характеристик обладают этими свойствами. Предположим, что численный вес, приоритет, или индекс относительной важности, $\omega_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, ассоциируется с каждым $s_j \in S$, так что $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$. Пусть $\omega_{ij} > 0$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{m} \omega_{ij} = 1$, есть веса, ассоциируемые с $t_i \in T$, $i = 1, \ldots, m$, относительно s_j. Тогда выпуклая комбинация ω_{ij}, $j = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \omega_j, \; i = 1, \ldots, m$$

представляет собой численный приоритет или относительную важность t_i относительно S. Заметим, что принцип распространяется на цепь множеств. Аксиоматизация принципа иерархической композиции была бы полезной.

Замечание. «Иерархическое измерение» есть процесс взвешивания «линейных» переменных, ассоциирующий каждый уровень с нелинейными коэффициентами, которые являются произведениями и суммами переменных, связанных с верхними уровнями. Заметим, что линейность здесь просто означает прямое умножение чисел без возведения их в степени или образования функций от них. В действительности эта величина является сложной (нелинейной) мерой приоритета.

Далее следует первый шаг к подтверждению приведенного выше принципа, показывающий, что порядковые предпочтения сохраняются при композиции.

Определение 4.6. Предположим, что для каждой подцели или вида деятельности e_j в L_k существует порядковая шкала o_j над видами деятельности e_α $\left(\alpha = 1, \ldots, n_{k+1}\right)$ в L_{k+1}. Определим частичный порядок на множестве L_{k+1} следующим образом: $e_\alpha \geq e_\beta$ тогда и только тогда, если для $j = 1, \ldots, n_k$, $o_{\alpha_j} \geq o_{\beta_j}$.

Легко доказать следующую теорему:

Теорема 4.1. Пусть $\left(\omega_{1j}, \ldots, \omega_{n_{k+1}j}\right)$ – вектор приоритетов для L_{k+1} относительно e_j и предположим, что он сохраняет порядок o_{α_j}. Пусть $W_1, \ldots, W_{n_{k+1}}$ – (составной) вектор приоритетов для L_{k+1}. Тогда из $e_\alpha \geq e_\beta$ следует, что $W_\alpha \geq W_\beta$. Таким образом, иерархическая композиция сохраняет порядковое предпочтение.

Легко доказать следующую теорему.

Теорема 4.2. Пусть H – полная иерархия с наибольшим элементом b и h уровнями. Пусть далее B_k – матрица приоритетов k-го уровня, $k = 2, \ldots, h$. Если W' –

вектор приоритетов p-го уровня относительно некоторого элемента z в $(p-1)$-м уровне, то вектор приоритетов W q-го уровня $(p<q)$ относительно z определяется как

$$W = B_q B_{q-1} \dots B_{p+1} W' .$$

Таким образом, вектор приоритетов самого низкого уровня относительно элемента b

$$W = B_h B_{h-1} \dots B_2 W' .$$

Обычно L_1 состоит из единственного элемента, W' – просто скаляр; в противном случае W' – вектор.

Следующее наблюдение касается полной иерархии, однако его полезно иметь в виду и в общем случае. Приоритет элемента любого уровня равен сумме его приоритетов в каждом подмножестве сравнения, которым он принадлежит; иногда каждый из приоритетов взвешивается лишь частью элементов уровня, которые принадлежат данному подмножеству, и приоритетом подмножества. Получающееся множество приоритетов элементов этого уровня затем нормализуется посредством деления на сумму приоритетов элементов. Приоритет подмножества на уровне равен приоритету доминирующего элемента на следующем уровне.

Заметим, что композиции весов в иерархии представляют собой полилинейные выражения вида

$$\sum_{i_1,\dots,\, i_p} x_1^{i_1}\ x_2^{i_2}\ \dots x_p^{i_p} ,$$

где i_j обозначает j-й уровень иерархии, а x_j – приоритет элемента на этом уровне. По-видимому, имеется хорошая возможность исследовать связь композиции с ковариантными тензорами и их алгебраическими свойствами.

Более конкретно, имеем ковариантный тензор

$$\omega_i^h = \sum_{i_2,\dots,\, i_{h-1}}^{N_{h-1},\dots,\, N_i} \omega_{i_1 i_2}^h\ \omega_{i_2 i_3}^{h-1} \dots \omega_{i_{h-2} i_{h-1}}^2\ \omega_{i_{h-1} i_1}^1 \equiv i ,$$

для приоритета i-го элемента на h-м уровне иерархии. Составной вектор W^h для всего h-го уровня представлен ковариантным гипертензором (вектором с тензорными компонентами). Аналогично подход к иерархии, основанный на левом собственном векторе, обусловливает контравариантный гипертензор.

Классическая проблема, относящая пространство (геометрия) и время к субъективному мышлению (см. [121]), может быть исследована, если доказано, что функции математического анализа (и, следовательно, также и законы физики) могут быть получены как усеченные ряды приведенных выше тензоров посредством построения соответствующей иерархии. Это напоминает теорему из анализа размерностей, которая утверждает, что любая физическая переменная пропорциональна произведению степеней исходных переменных.

4.3. ДЕКОМПОЗИЦИЯ И АГРЕГИРОВАНИЕ (ПОСТРОЕНИЕ КЛАСТЕРОВ)

Существуют два фундаментальных подхода, в которых может быть использована идея иерархии.

Первый подход сейчас уже ясен: реальный мир следует моделировать иерархически.

Второй подход, вероятно, является более фундаментальным, чем первый, и свидетельствует о реальной силе иерархий в природе. Он заключается в расчленении рассматриваемых вещей на большие группы или кластеры, которые далее расчленяются на меньшие кластеры и т. д. Тогда целью будет получение приоритетов всех элементов посредством группирования. Это намного более эффективный процесс, чем обработка всех элементов совместно. Следовательно, несущественно, думаем ли мы, что иерархии внутренне присущи природе, как утверждают некоторые исследователи, либо мы просто используем их из-за ограниченной способности обрабатывать информацию. В любом случае они представляют собой очень эффективный способ исследования сложных проблем.

Полезным способом исследования большого числа элементов, попадающих на один из уровней иерархии, является группирование их в кластеры в соответствии с их относительной важностью. Таким образом, можно иметь кластер самых важных (самых подобных, или близких) элементов, другой кластер элементов умеренной важности, и третий – элементов с малой важностью. Затем сравниваются попарно относительное воздействие кластеров на соответствующий критерий из расположенного выше уровня. Группирование в кластеры может различаться от критерия к критерию. После анализа кластеров элементы в каждом кластере попарно сравниваются по их относительной важности в этом кластере. Если их слишком много, то они вновь могут быть сгруппированы в кластере. Таким образом, каждый элемент принадлежит нескольким кластерам и получает несколько весов из различных кластеров. Не существует альтернативы этому процессу группирования и декомпозиции, особенно, когда нужно сохранить высокую согласованность. Принимая это за факт, не следует пугаться размерности задачи, поскольку уже известно, как можно справиться с этой проблемой. Мы весьма успешно применяли этот процесс во многих примерах. Легко показать математически, что группировкой в кластеры можно получить те же самые результаты, что и при общем подходе.

Иерархия оценки расстояния

Теперь построим иерархическую структуру для примера оценки расстояний между городами. Если сгруппировать города в кластеры согласно критерию расположения на почти одинаковых расстояниях от Филадельфии, то будем иметь три класса, которые сравниваются в следующей матрице.

Филадельфия	Чикаго Монреаль	Лондон Сан-Франциско	Каир Токио	Собственный вектор
Чикаго Монреаль	1	1/7	1/9	0,056
Лондон Сан-Франциско	7	1	1/4	0,26
Каир Токио	9	4	1	0,68

$\lambda_{\max} = 3{,}15$; ИС = 0,08; ОС = 0,14

Если теперь сравнить города в каждом кластере отдельно в соответствии с их относительным расстоянием от Филадельфии, то при использовании для случая 2×2 шкалы $1 + \varepsilon$ получим:

Филадельфия	Чикаго	Монреаль	Собственныйвектор
Чикаго	1	2	0,67
Монреаль	1/2	1	0,33

$\lambda_{\max} = 2$; ИС = 0; ОС = 0

Филадельфия	Каир	Токио	Собственныйвектор
Каир	1	1/1,5	0,4
Токио	1,5	1	0,6

$\lambda_{\max} = 2$; ИС = 0; ОС = 0

Филадельфия	Сан-Франциско	Лондон	Собственныйвектор
Сан-Франциско	1	1/1,3	0,43
Лондон	1,3	1	0,57

$\lambda_{\max} = 2$; ИС = 0; ОС = 0

Теперь, чтобы получить общий вектор относительно расстояний, умножим первый собственный вектор на 0,056, второй – на 0,26 и третий – на 0,68. В результате имеем:

Каир	Токио	Чикаго	Сан-Франциско	Лондон	Монреаль
0,27	0,41	0,037	0,11	0,15	0,019
0,278	0,381	0,032	0,132	0,177	0,019

Веса во второй строке соответствуют полученным в примере в гл. 3 (см. табл. 3.5, а)

Пример национальных богатств как кластера

Сравнение богатств шести стран было проведено посредством сведения их в три группы: A =США, B = СССР и C = (Великобритания, Франция, Япония, ФРГ). Вначале сравнивались кластеры, и была получена матрица

	A	B	C	Собственный вектор
A	1	2	1	0,4
B	1/2	1	1/2	0,2
C	1	2	1	0,4

$\lambda_{\max} = 3$; ИС = 0,0; ОС = 0,0

Элементы *C* сравнивались между собой в следующей матрице

	Великобри-тания	Франция	Япония	ФРГ	Собственный вектор
Великобритания	1	1	1/3	1/2	0,14
Франция	1	1	1/3	1/2	0,14
Япония	3	3	1	2	0,45
ФРГ	2	2	1/2	1	0,26
$\lambda_{\max} = 4{,}01$; ИС = 0,003; ОС = 0,01					

Оценка относительных национальных богатств, полученная таким образом, была:

США	СССР	Великобри-тания	Франция	Япония	ФРГ
0,4	0,2	0,056	0,056	0,18	0,10

Предположим, что имеется множество из n элементов. Если мы хотим попарно сравнить элементы для получения оценок в шкале отношений, то необходимо провести $\left(n^2 - n\right)/2$ суждений, чтобы решить задачу о собственном значении. Допустим теперь, что 7 – максимальное число элементов, которые могут быть сравнены с какой-либо достаточно разумной (психологически) уверенностью в согласованности. Тогда n должно быть, во-первых, разделено на эквивалентные классы, каждый из которых содержит не более чем семь кластеров или подмножеств. В свою очередь, каждый из них должен быть разделен на семь новых кластеров и т. д., образовывая уровни иерархии до тех пор, пока не получится окончательная декомпозиция, при которой каждое из множеств будет иметь не более, чем семь образующих элементов. Пусть $\{x\}$ обозначает наименьшее целое число, большее или равное x.

Теорема 4.3. Максимальное число сравнений после декомпозиции множества $n > 1$ элементов в иерархию кластеров (при условии, что одновременно сравнивается не более семи элементов) ограничено величиной $(7/2)\left(7^{\{\log n/\log 7\}} - 1\right)$, и это точная граница.

Доказательство. Для максимального *числа сравнений* на каждом уровне мы должны иметь на h-м или последнем уровне по крайней мере семь элементов в каждом кластере

1 $\quad 0$,

2 $\quad \left(7^2 - 7\right)/2$,

3 $\quad 7 \times \left(7^2 - 7\right)/2$

$\vdots$

$n \quad 7^{h-2} \times \left(7^2 - 7\right)/2$

где $7^{h-2} \times 7 = n$, $h = \{\log n/\log 7\} + 1$, $h > 2$. Сумма этих отношений

$$21 \times \left(7^{h-1} - 1\right)/(7-1) = 7/2 \times \left(7^{\{\log n/\log 7\}} - 1\right).$$

Чтобы показать, что это – точная граница, достаточно положить $n = 7^m$.

Эффективность иерархии может быть определена как отношение числа прямых парных сравнений, требуемых для всего множества n элементов, входящих в иерархию, к числу парных сравнений, которые необходимо провести после группирования в кластеры.

Теорема 4.4. Эффективность иерархии имеет порядок $n/7$.

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно сравнить $\left(n^2-n\right)/2$ с $7/2\times\left(7^{\{\log n/\log 7\}}-1\right)$.

Пусть $n=7^{m+\varepsilon}$, $0\le\varepsilon<1$. Тогда ясно, что имеем

$$7^{2m+2\varepsilon}-7^{m+\varepsilon}/7\times\left(7^{m}-1\right)\ge 7^{m+\varepsilon}/7=n/7$$

Следовательно, $n/7$ равно эффективности.

Естественно, может возникнуть вопрос, почему не использовать 2 вместо 7 для большей эффективности. Заметим, что, применяя иерархию, ,мы стремимся как к согласованности, так и к большему соответствию реальности. Чем меньше размеры каждой матрицы, тем больше согласованности, в то же время соответствие реальности тем больше, чем больше размеры матрицы, так как используется дополнительная информация. Поэтому здесь нужен компромисс. Действительно, используя индекс согласованности, мы показали, что число 7 является хорошей практической границей для n, поскольку позволяет учесть согласованность.

Допустим, имеется множество из 98 элементов, которым мы хотим приписать приоритеты. Проведем декомпозицию задачи на семь множеств, каждое из которых состоит в среднем из 14 элементов. Мы не можем сравнить 14 элементов, поэтому каждое из этих множеств разделим на два, в каждом из которых не более семи элементов. Затем мы сравниваем элементы друг с другом.

При более внимательном рассмотрении эффективности этого процесса можно заметить, что для сравнения 98 элементов друг с другом потребовалось бы $\left[(98)^2-98\right]/2=4753$ сравнения. С другой стороны, если разделить их на семь кластеров с 14 элементами для каждого, а затем провести парные сравнения семи кластеров, то понадобится $\left(7^2-7\right)/2=21$ сравнение. Каждый кластер теперь может быть разделен на два кластера, в каждом из которых будет семь элементов. Суждение о двух кластерах, каждый из которых попадает в 14-элементный кластер, требует одного сравнения, но таких пар семь, и поэтому на этом уровне требуются семь сравнений; затем нужно $14\times 21=294$ сравнения на самом нижнем уровне. Общее число сравнений этой иерархической декомпозиции будет $21+7+294=322$ против 4753 сравнений в случае, когда группирования в кластеры нет. Действительно, теорема удовлетворяется, так как $322\ll 4753/7$.

Придание иерархической формы сложной задаче посредством группировки в кластеры имеет два преимущества:

1. Большая эффективность при проведении парных сравнений.
2. Большая согласованность при условии ограниченной способности мозга сравнивать больше, чем 7 ± 2 элементов одновременно.

Эффективность иерархии проиллюстрировал Г. Саймон [149] на примере двух людей, собирающих часы. Один из них создает модули или составные части из элементарных частей, использует их для создания более сложных частей и т. д.; второй собирает часы от начала до конца подетально. Если первый человек прервет работу, то он возобновит сборку, только начиная с некоторого модуля, в то время как второму придется все начинать заново. Если часы состоят из 1000 компонентов, а компоненты на каждом уровне составляют 10 частей, то первый человек, конечно, должен будет сделать компоненты и затем из них собрать узлы всего за 111 операций. Если p – вероятность прерывания работы в момент, когда часть добавляется к неполному узлу, то вероятность того, что первый человек завершит изделие без прерывания, равна $(1-p)^{10}$, для второго же вероятность равна $(1-p)^{1000}$. Для первого человека прерывание отнимет время, необходимое для сборки пяти частей. Для второго человека, в среднем, это будет время, необходимое для сборки $1/p$ частей, что примерно равно ожидаемому числу частей при работе без прерывания. Если $p=0,01$ (один шанс из ста, что человек прервет работу при добавлении какой-либо части), потеря времени для первого человека будет равна 5, а для второго – 100. Первый человек соберет 111 компонентов, в то время как второй изготовит только один. Тем не менее первый человек завершит сборку за $(1-0,01)^{-10}=10/9$ попыток, в то время как второй человек завершит сборку за $\exp 10=(1-0,01)^{-1000}+1/44\times 10^{6}$ попыток. Поэтому эффективность работы первого человека по отношению ко второму получается равной

$$\frac{100/0,99^{1000}}{111\left\{\left[\left(1/0,99^{10}\right)-1\right]5+10\right\}}=2000.$$

В системах, создаваемых человеком, задача управления сложным предприятием в общем случае значительно упрощается, если она разбита на подсистемы или уровни, которые в отдельности легче поддаются обработке, т. е. у менеджера ограничена сфера управления. Этапы решения задачи большой размерности упрощаются и эффективно выполняются, когда они модулированы, например, предпочтительнее оперировать n множествами m переменных, чем одновременно mn переменными.

4.4. СТАНДАРТИЗАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ БОЛЬШОГО КЛАССА

Элементы сначала упорядочиваются согласно их относительной сравнимости и группируются в классы. В каждом классе величина меры элементов – одного порядка. Если два класса различаются более, чем на один порядок, то делается попытка расчленения или декомпозиции элементов класса, получившего более высокое измерение, на более легкие элементы. В противном случае элементы меньшего класса агрегируются, образуя один большой элемент из более высокого класса. Если ни одна из этих альтернатив невозможна для перехода из одного класса в другой, то в процессе сравнения вводятся промежуточные между двумя классами дополнительные элементы.

Для стандартизации измерения между классами используется наибольший элемент в классе элементов с меньшим весом и наименьший элемент в следующем большем классе. Для повышения точности можно также взять наименьший элемент следующего класса в качестве наибольшего элемента в классе элементов с меньшими весами. Таким образом, вес элемента в обоих классах может быть применен для стандартизации весов обоих классов. При этом образуется один класс со всеми соответствующим образом взвешенными элементами. Процедура затем проводится по всем классам, и таким образом мы получаем меру, определенную на большом числе элементов в множестве.

4.5. СОГЛАСОВАННОСТЬ ИЕРАРХИИ

Обобщим измерение согласованности на всю иерархию. Процесс заключается в том, что индекс согласованности, полученный из матрицы парных сравнений, умножается на приоритет свойства, относительно которого проведено сравнение, и к этому числу добавляются аналогичные результаты для всей иерархии. Затем данная величина сравнивается с соответствующим индексом, который получен как сумма случайно сформированных индексов, взвешенных посредством соответствующих приоритетов. Отношение должно находиться в окрестности 0,10, чтобы не появилось сомнений в усовершенствовании фактического функционирования и в суждениях.

Для иллюстрации приводятся два примера.

Применяя индексы для примера выбора школы, имеем:

Вектор приоритета первого уровня: $(0{,}32;\ 0{,}14;\ 0{,}03;\ 0{,}13;\ 0{,}23;\ 0{,}14)$.

Индекс согласованности первого уровня: $ИС = (7{,}49-6)/5 = 0{,}298$

Вектор ИС второго уровня: $(0{,}025;\ 0;\ 0;\ 0{,}105;\ 0;\ 0{,}025)$.

Следовательно,

$$M = 0{,}298 + (0{,}32;\ 0{,}14;\ 0{,}03;\ 0{,}13;\ 0{,}23;\ 0{,}14)\begin{bmatrix} 0{,}025 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}105 \\ 0{,}0 \\ 0{,}025 \end{bmatrix} = 0{,}323$$

и, используя соответствующие случайные индексы (СИ), имеем

$$\bar{M} = 1{,}24 + (0{,}32;\ 0{,}14;\ 0{,}03;\ 0{,}13;\ 0{,}23;\ 0{,}14)\begin{bmatrix} 0{,}58 \\ 0{,}58 \\ 0{,}58 \\ 0{,}58 \\ 0{,}58 \\ 0{,}58 \end{bmatrix} = 1{,}82 .$$

Поэтому отношение согласованности иерархии (ОСИ) будет $M/\bar{M} = 0{,}18$, что не очень хорошо, так как здесь отражается большая несогласованность, появляющаяся из $\lambda_{\max} = 7{,}49$ для $n = 6$.

Для другого примера имеем следующие числа:

Вектор приоритета первого уровня: (0,16; 0,19; 0,19; 0,05; 0,12; 0,30).

ИС первого уровня: 0,07.

Вектор ИС второго уровня для (3×3)-матриц: (0,01; 0,01; 0,28; 0,025; 0; 0,105).

Следовательно,

$$M = 0{,}07 + \left(0{,}16;\ 0{,}19;\ 0{,}19;\ 0{,}05;\ 0{,}12;\ 0{,}30\right)\begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}01 \\ 0{,}28 \\ 0{,}025 \\ 0{,}0 \\ 0{,}105 \end{bmatrix} = 0{,}159$$

и $\bar{M} = 1{,}24 + 0{,}58 = 1{,}82$.

Отношение согласованности иерархии будет $M / \bar{M} = 0{,}09$, и более приемлемо, чем в предыдущем примере.

4.6. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРИОРИТЕТОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Следующая интерпретация использует теорию графов, придавая геометрический смысл разнообразным отношениям между видами деятельности или целями уровня иерархии (см. дополнение 2 для краткого введения в теорию графов).

На чем основывается наша уверенность в том, что «более предпочтительный» вид деятельности в матрице парных сравнений получит большее значение приоритета? Хотя мы изучаем этот процесс в алгебраическом аспекте, в нем также можно разобраться с помощью теории графов.

Определение 4.7. Обозначим узлы направленного графа G через $1, 2, \ldots, n$. С каждой направленной дугой x_{ij} от узла i до узла j мы ассоциируем неотрицательное число, $0 < q_{ij} < 1$, называемое *интенсивностью* дуги. (Петли и кратные дуги разрешены.)

Определение 4.8. Маршрут в направленном графе есть чередующаяся последовательность узлов и дуг, при которой каждый узел является концом дуги, находящейся в последовательности непосредственно перед ним, и источником последующей за ним дуги. Обе концевые точки каждой дуги находятся в последовательности. *Длина* маршрута есть число дуг в последовательности. Маршрут длины k назовем «k-маршрутом».

Определение 4.9. *Интенсивность маршрута* длины k от узла i до узла j есть произведение интенсивностей дуг в маршруте.

Определение 4.10. *Общая интенсивность* всех k-маршрутов от узла i до узла j есть сумма интенсивностей маршрутов.

Замечание. Отметим, что для общей интенсивности 1-маршрутов берется сумма интенсивностей всех 1-маршрутов от i до j. Это просто дуги, соединяющие i и j. Все интенсивности вдоль дуги i, j считаются равными. Поэтому общая интенсивность от i до j получается равной $t_{ij} = p_{ij} q_{ij}$, где p_{ij} – число дуг от i до j, а q_{ij} – интенсивность каждой дуги.

Определение 4.11. Для заданного направленного графа D *матрица интенсивности-инцидентности* $U = \left(u_{ij}\right)$ определяется как матрица, элементами которой являются $u_{ij} = t_{ij}$ для всех i и j.

Для пояснения приведенных выше понятий представлен следующий пример. На рис. 4.1 число рядом с каждой дугой показывает ее интенсивность.

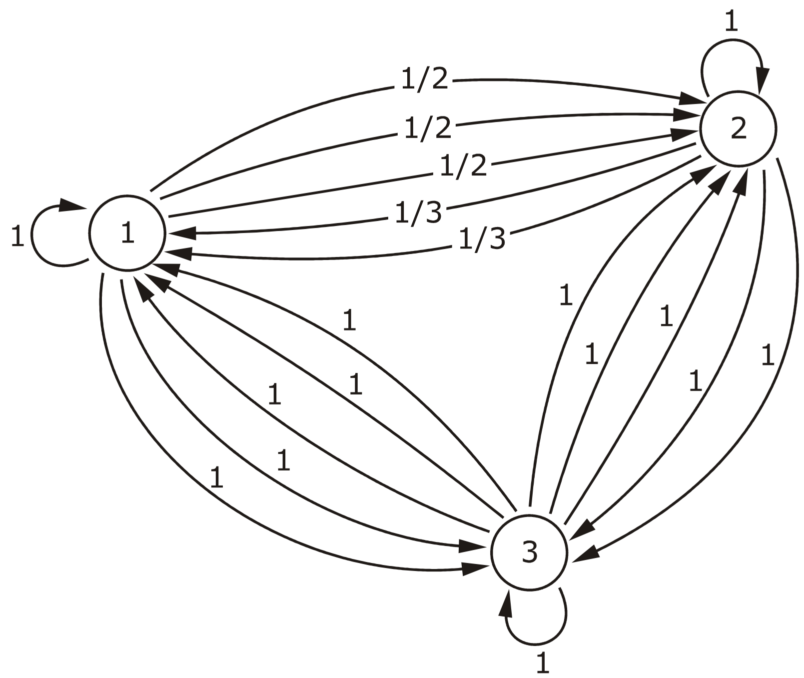


Рис. 4.1

Матрица интенсивности-инцидентности U, ассоциируемая с этим графом, будет

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 2/3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Общая интенсивность 1-маршрутов от i до j представлена (i, j)-м элементом этой матрицы. Например, общая интенсивность маршрута длины 2 от узла 1 до узла 3 равна сумме следующих трех величин вместе с соответствующим маршрутом, изображённым справа. (Отметим, что каждая дуга между первыми двумя узлами берется по одному разу с каждой дугой между двумя узлами.)

$$3\left[(1/2\times1)+(1/2\times1)+(1/2\times1)\right]:1,\quad x_{12},2,\quad x_{23},3$$
$$x_{11},1,\quad x_{13},3$$
$$x_{13},3,\quad x_{33},3$$

Сумма этих величин равна 17/2. Это есть элемент (1,3) матрицы U^2. Таким образом можно показать, что для всех i и j общая интенсивность 2-маршрутов от узла i до узла j будет (i, j)-м элементом матрицы

$$U^2 = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 17/2 \\ 31/3 & 8 & 22/3 \\ 22/3 & 17/2 & 13 \end{bmatrix}$$

Этот результат может быть обобщен согласно следующей легко доказываемой теореме.

Теорема 4.5. $u_{ij}(k)$ – (i,j)-й элемент матрицы U^k является общей интенсивностью k-маршрутов от узла i до узла j.

Следствие. Если $q_{ij}=1$ для всех i и j, то (i,j)-й элемент в U^k является числом k-маршрутов от i до j.

Понятие превосходства относительно свойства: обратная задача.

В предыдущем обсуждении для изучения идеи об интенсивности k-маршрутов мы перешли от графа к соответствующей матрице. Для рассматриваемой проблемы важна обратная задача интерпретации степеней матрицы для подсчета интенсивности маршрутов.

Будем ассоциировать с каждым из n видов деятельности нашей процедуры парных сравнений узел направленного графа D. В этом случае матрица интенсивности-инцидентности U есть не что иное, как матрица суждений, о которой говорилось в гл. 1. Числитель p_{ij} (i,j)-го элемента такой матрицы (полагая, что он дан в сравнительно простой дробной форме) представляет собой число дуг, направленных от вершины i к вершине j. Интенсивность каждой дуги от i до j одна и та же и равна обратной величине q_{ij} знаменателя элемента. Это естественный способ определения соответствующего графа, так как для $q_{ij}=1$ он сводится к обычной матрице вершин, k-я степень которой дает число маршрутов длины k.

Интерпретировать (i,j)-й элемент матрицы A можно как прямое превосходство, или интенсивность важности вида деятельности i относительно вида деятельности j. Он выражает относительный вклад, который вид деятельности i вносит в достижение определенной цели по сравнению с вкладом, вносимым видом деятельности j. Нормализованные суммы строк матрицы A представляют собой уровень вклада соответствующих видов деятельности относительно всех других видов деятельности, а матрицы A^2 – индекс относительной влажности превосходства с учетом всех 2-маршрутов. Последний обеспечивает косвенное сравнение пар через одну промежуточную вершину. Следовательно, уровень важности вида деятельности повышается или снижается в соответствии с его взаимосвязью с другими видами деятельности. В общем случае эффект превосходства между видами деятельности можно получить, вычисляя предельное значение суммы строк A^k матрицы A k-й степени. Каждое число, нормализованное посредством суммы этих величин, служит общим индексом относительного превосходства, или приоритетом, среди видов деятельности.

Формально понятие относительного превосходства вида деятельности i над видом деятельности j за k-шагов можно сейчас разъяснить в терминах общей интенсивности всех k-маршрутов от узла i до узла j. Относительное превосходство вида деятельности i над другим видом деятельности j прямо и косвенно, через промежуточные виды деятельности, за k-шагов представлен (i,j)-м элементом матрицы A^k. Из-за наличия петли на каждой вершине получается, что каждый вход матрицы A^k является суммой всех маршрутов длины, меньшей или равной k. Сколько раз включен каждый маршрут зависит от его длины и от числа перестановок его петель при получении искомой длины маршрута. Петля сама по себе придает единичную интенсивность маршруту. Следовательно, общая интенсивность маршрута не меняется при прохождении вдоль петли несколько раз. Важно отметить, что предельный результат совпадает с результатом, который был получен ранее.

Теорема 4.6. Пусть $A=\left(a_{ij}\right)$ – $n\times n$-матрица сравнений; $a_{ij}\left(k\right)$ – $\left(i,j\right)$-й элемент матрицы A^k представляет собой *относительное превосходство (или важность) вида деятельности* i *над видом деятельности* j *за* k*-шагов.*

Доказательство следует непосредственно из приведенного выше соответствия и последней теоремы.

Определение 4.12. Индекс превосходства $\omega_i\left(k\right)$ вида деятельности i над всеми другими видами деятельности за k-шагов определяется как

$$\omega_i\left(k\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(k\right)/\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(k\right).$$

Таким образом, $\omega_i\left(k\right)$ – сумма i-й строки A^k, делённая на сумму строк.

Определение 4.13. *Общий индекс превосходства* ω_i вида деятельности i над всеми другими видами деятельности определяется как

$$\omega_i=\lim_{k\to\infty}\omega_i\left(k\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(k\right)}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(k\right)}.$$

Определение 4.14. Индекс приоритета, ассоциируемый с видом деятельности i, является общим индексом его превосходства ω_i.

ЧАСТЬ II
ПРИЛОЖЕНИЯ

Маргинальные приоритеты – Динамические приоритеты – Взаимозависимость вход-выход – Размещение ресурсов – Планирование: общественный и частный секторы – Разрешение конфликтов – Энергетика.

Наша цель – довести до сведения лиц, принимающих решения, во-первых, описание МАИ, затем показать его обширные приложения и, наконец, предоставить ученым и математикам некоторые основы теории. В данной части иногда будут повторы, иллюстрирующие сферы применения, несмотря на то, что метод остается тем же. Тем не менее приложения в основном предназначены для раскрытия возможностей использования МАИ как простого и надежного метода, связанного с решением реальных проблем, наряду с некоторыми существующими методами или зачастую вместо них. Тема, к которой следует возвратиться: если декомпозиция и синтез – фундаментальные процессы, характерные для мозга, которые имеют место в смысле, раскрываемом в данной книге, то могут возникнуть некоторые социальные, научные и даже математические задачи, которые помогут понять их формализацию.

В наших приложениях вырабатываются приоритеты для видов деятельности, служащих для удовлетворения определенных целей, которые, в свою очередь, должны подчиняться другим ограничениям, как более высоким целям иерархии. Мы занимались сравнительной формой оптимизации (без использования метрики). Этот тип исследований продолжается. В гл. 5 рассматриваются формально представленные приложения, в то время как в гл. 6 приложения охватывают ряд ситуаций из реальной жизни, а также представлена формальная основа двухточечного граничного процесса планирования и разрешения конфликтов.

ГЛАВА 5

ПРОГНОЗ, ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРИОРИТЕТЫ, ВЗАИМОЗАВИСИМОСТЬ ВХОД–ВЫХОД И РАЗМЕЩЕНИЕ РЕСУРСОВ

5.1. ВВЕДЕНИЕ

Как это бывает с любой новой идеей, наш метод и лежащая в его основе теория имеют много ответвлений, которые еще не полностью развиты. В данной главе представлены несколько других аспектов метода собственного вектора (всего пять), которые имеют практическую и теоретическую ценность, хотя многое в них еще должно быть исследовано.

Первой из этих сфер является вычисление ожидаемых величин в задаче прогнозирования. Второй аспект – использование маргинальных приоритетов; третий – динамические приоритеты, где сами суждения – функции времени, а собственный вектор вплоть до случая 4×4 вычисляется в явном виде через коэффициенты. Набросок доказательства того, что в случае 3×3 левый собственный вектор является обратным к правому собственному вектору приводится к гл. 7. Затем идеи иллюстрируются. Эта процедура может быть обобщена на иерархию, разделенную на кластеры и элементы, число которых на каждом уровне не превышает четырех. Теоретической трудности в подобной декомпозиции иерархии нет. Четвертая тема, которая обсуждается, – вычисление коэффициентов матрицы прямых затрат в модели «вход–выход» на уровне страны. Поэтому будет проиллюстрирован способ получения приоритетов, когда между видами действия существует взаимосвязь. Для сравнения представлена таблица, полученная экспертами в результате применения сложной эконометрической техники. Будет показано, что результаты близки и наш подход может быть использован для проведения первой оценки таблиц «вход–выход». Последнее полезное приложение относится к размещению ресурсов, в котором используется иерархия эффективности и иерархия стоимости, а также даны другие примеры, иллюстрирующие эффективность МАИ в этой важной области приложений. Наконец, попутно упоминаются некоторые результаты исследований, проведенных по вероятностным суждениям, и их интерпретации. Это может оказаться полезным при проведении статистического анализа суждений, полученных от многих лиц.

5.2. ОЖИДАЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ПОЛУЧАЕМЫЕ МЕТОДОМ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЯ: ПРОГНОЗ

Приведенный ниже пример используется в качестве иллюстрации, а не убедительного доказательства того, что суждения людей приводят к результатам, находящимся в тесном согласии с научными прогнозами экспертов, которые опираются на множество факторов.

В иерархическом подходе к оценке размера семьи участвовали две группы людей. (Одна группа изучала вопрос за период со второй мировой войны до начала семидесятых, а другая – охватила и восьмидесятые годы.) Первая группа разработала следующую иерархию уровней и факторов на каждом уровне.

Уровень 1. Средняя численность детей в американской семье.

Уровень 2. Образование, доход, размер существующей семьи, религия и интенсивность работы матери.

Уровень 3. Высокий, средний и низкий для каждого фактора на уровне 2.

Уровень 4. Ожидаемая численность детей (от 1 до 5) в семье.

В результате были получены пять факторов, доминирующих в соответствии с приоритетами их вклада в размер семьи между второй мировой войной и началом семидесятых. Это были: малое количество лет, связанных с образованием; низкий доход; высокий доход; среднее количество лет на образование и степень религиозности. Их приоритеты затем нормализовались.

Заметим теперь, что фактор с высоким приоритетом, влияющий на размер семьи, такой как высокий доход, не может встречаться у населения с такой же частотой, как средний доход или сильная религиозность. Поэтому мы должны оценить относительную частоту появления этих факторов у населения, используя парные сравнения, получить собственный вектор и умножить соответствующие компоненты двух собственных векторов – первоначального и ориентированного на общую численность населения, затем нормализовать по факторам новый вектор для получения чистого относительного приоритета для каждого фактора с высоким приоритетом в соответствии с его распределением среди населения. Наконец, собственные векторы преобладания численности детей в соответствии с каждым из пяти факторов были взвешены каждой соответствующей компонентой повторно нормализованного вектора. Был получен следующий результат:

Численность детей	1	2	3	4	5
Приоритет	0,087	0,191	0,282	0,292	0,150

Ожидаемая численность детей будет

$$0,087\times 1+0,181\times 2+0,282\times 3+0,292\times 4+0,150\times 5=3,23$$

Позднее было установлено, что прогноз демографов о средней рождаемости детей женщинами, родившимися в период 1923–27 гг., был 3,10, а родившимися в 1928–32 гг. – 3,14; женщины обеих групп рожали детей в период после второй мировой войны.

Вторая группа людей использовала следующие факторы: наличие контроля над рождаемостью и абортами; работа матери; позднее материнство; образование матери; стоимость воспитания детей и влияние общества. Собственные векторы этих факторов не потребовали демографического сглаживания; их сочли равномерно распределенными. Не были рассмотрены также высокие, средние и низкие значения факторов. Следующий собственный вектор был получен в качестве приоритетов численности детей относительно этих пяти факторов:

Численность детей	1	2	3	4	5
Приоритет	0,028	0,174	0,495	0,239	0,064

Отсюда ожидаемая численность детей получается 2,14, что сравнимо с величиной 2,11, которая получена демографами для восьмидесятых годов.

При применении метода для оценки роста товарооборота несмотря на воздействие инфляции, спада и повышения стоимости энергии, во-первых, были получены приоритеты трех критериев. Затем рост товарооборота был разбит на диапазоны $(0-5)\%$, $(6-10)\%$, $(11-15)\%$ и $(15-20)\%$. Эти четыре диапазона использовались как сравниваемые элементы в отдельных матрицах в соответствии с вероятностью их реализации по каждому из трех критериев. Средняя степень роста была вычислена так же, как и в случае с размером семьи. Среднее значение может быть использовано для вычисления дисперсии.

5.3. МАРГИНАЛЬНЫЕ ПРИОРИТЕТЫ

До сих пор в исследовании по установлению приоритетов сравнивались виды действий относительно критериев, в предположении, что критерий мыслится в некотором усредненном виде. Например, при сравнении школ в соответствии с наличием друзей не учитывалась возможность того, что число друзей может быть малым или большим, из-за чего желательность школ может оказаться различной.

Есть два способа разрешения этой проблемы. Первый заключается в параметризации количества друзей относительно некоторых пределов, которые как раз указаны, например, нет друзей, немного друзей, больше, чем немного, много и т. д. Однако с этим подходом связана определенная нечеткость, так как количество, по-видимому, не имеет прямого отношения, например, к степени дружелюбия, и к тому, какое количество этого свойства может быть шкалировано. Один индивидуум может обладать большей или меньшей способностью быть другом, чем другой.

Более пригодным подходом может стать сравнение школ в соответствии с их желательностью при увеличении или уменьшении количества друзей на еще одного (единица !) друга. Маргинальный анализ такого типа проводится в несколько итераций. Результатом будет множество собственных векторов, которые позволят получить закон для изменения желательности каждой школы относительно количества друзей, или относительно степени дружелюбия, которую также можно попытаться определить. Для многих проблем это более точно представляет динамику задачи, поскольку в зависимости от уровня насыщения маргинальное увеличение в свойстве может различным образом влиять на критерии (аналогично производной функции, величина которой, в общем, различна от точки к точке). Подход может быть обобщен на всю иерархию, однако вычисления будут долгими и утомительными.

Метод собственного значения может быть использован для определения величины собственного вектора при маргинальных изменениях в рассматриваемых свойствах. Он, конечно, не должен совпадать с собственным вектором, который представляет влияние свойств. Следующий пример можно взять в качестве иллюстрации, а не точного представления проблемы. Во-первых, проведем обычный анализ матрицы превосходства с собственным вектором, а затем займемся матрицей маргинального анализа со своим собственным вектором.

В качестве примера имеем строителя шоссейных дорог, который был безработным и только что нашел работу. Его предпочтения иллюстрируются следующими характеристиками: A – деньги; B – участие в совместной бригадной работе; C – хорошие условия труда; D – укороченный рабочий день; E – разнообразие заданий; F – автономия.

	A	B	C	D	E	F
A	1	6	5	3	7	9
B	0,17	1	0,25	0,2	4	3
C	0,2	4	1	0,33	3	4
D	0,33	5	3	1	6	7
E	0,14	0,25	0,33	0,17	1	0,2
F	0,11	0,33	0,25	0,14	5	1

$\lambda_{\max} = 6{,}79$; ИС = 0,16; ОС = 0,13

Наибольшее собственное значение этой матрицы равно 6,79. Собственный вектор будет (0,448; 0,076; 0,135; 0,257; 0,031; 0,052). Это указывает на то, что деньги являются характеристикой работы, намного превосходящей другие, затем следуют укороченный рабочий день, хорошие условия труда и т. д.

Элементы следующей маргинальной матрицы сравнений оцениваются ответами на вопрос: «Насколько больше человек предпочитает малое изменение одной характеристики по сравнению с малым изменением другой при получении работы?»

	A	B	C	D	E	F
A	1	0,15	0,2	0,333	3	6
B	7	1	3	3	5	7
C	5	0,333	1	3	3	3
D	3	0,333	0,333	1	5	5
E	0,333	0,2	0,333	0,2	1	4
F	0,17	0,14	0,333	0,2	0,25	1
$\lambda_{\max} = 6{,}87$; ИС = 0,7; ОС = 0,14						

Наибольшее собственное значение этой матрицы равно 6,87. Собственный вектор – (0,093; 0,409; 0,236: 0,166; 0,062; 0,034). В этом случае предпочтение отдается маргинальному улучшению условий для совместной бригадной работы, за которым следует хорошие условия труда, затем укороченный рабочий день и т. д.

Анализ подобного рода позволяет взглянуть на работу с точки зрения не только ее начальных достоинств, но и потенциальных возможностей управления, чтобы провести тот тип маргинальных усовершенствований, который оценивается наиболее высоко.

5.4. ДИНАМИЧЕСКИЕ СУЖДЕНИЯ И УРАВНЕНИЕ: $A(t)\omega(t) = \lambda_{\max}(t)\omega(t)$

В отношении использования метода анализа иерархий часто возникает вопрос: «Что следует делать, если суждения меняются?» Естественный ответ на этот вопрос может быть таким: «Следует решить новую задачу». Но это не то, что обычно люди имеют в виду. Возможно то, что им хочется, есть параметризованное решение задачи о собственном векторе как функции времени для обеспечения совместимости не только того, что думают люди сейчас, но и того, что они, вероятнее всего, будут думать позднее. Поэтому желательно аналитическое решение задачи о собственном значении $A(t)\omega(t) = \lambda_{\max}(t)\omega(t)$.

Можно сказать, что по своей природе суждения меняются в соответствии с различными ситуациями. Если они следуют известной тенденции, соответствующей определенному параметру, то можно было бы устроить так, чтобы суждения следовали изменениям параметра. Например, у военного летчика может быть некоторое количество стратегий для выбора в зависимости от скорости его самолета, расстояния до вражеского самолета или от количества топлива в баках. Важность одной стратегии по сравнению с другой будет функцией скорости, или расстояния, или запаса топлива. Одним из способов решения этой задачи будет неоднократная фиксация величин временного параметра и затем шкалирование подгонки кривых для различных величин, полученных для каждой компоненты собственного вектора.

Элегантным подходом могло бы стать разложение иерархии на кластеры, число которых не превышает четырех в кластерах сравнений, получение описания $\lambda_{\max}$

как функции коэффициентов путем решения при необходимости квадратного, кубического уравнения, или четвертой степени, и далее решение задачи о собственном значении в явном виде через коэффициенты, а также через $\lambda_{\max}$. Затем можно применить принцип иерархической композиции для получения общих весов как функции времени.

Согласно теории Галуа наибольший порядок матрицы, для которой с помощью простой квадратуры можно получить $\lambda_{\max}$ в явной форме, равен четырём. Как было отмечено ранее, при необходимости использования матрицы более высокого порядка следует внести статические численные суждения, полученные для различных периодов времени, и решить соответствующую задачу.

Для суждений о парных сравнениях можно попытаться подогнать одну из функций, представленных в табл. 5.1, к изменяющимся суждениям. Эти функции представлены в параметрическом виде так, что параметр можно установить для определенного сравнения в надежде на сохранение границ шкалы 1–9, которую мы применяем в дискретном случае в качестве предела диапазона значений (или любой другой удобной шкалы, используемой в дискретном случае). Эти функции отражают наши интуитивные чувства об изменении в тренде: постоянном, линейном, логарифмическом и экспоненциальном, возрастающем до максимума и убывающем, или

Таблица 5.1. Динамические суждения

Интенсивность важности, зависимой от времени	Описание	Объяснение
α	Постоянное для всех t целое число, $1 \le \alpha \le 9$	Относительный вес не изменяется
$a_1(t)+a_2$	Линейное отношение по t, увеличивающееся или уменьшающееся до некоторой точки. Отметим, что обратная величина – гипербола	Постоянное увеличение одного вида деятельности по сравнению с другим
$b_1\log(t+1)+b_2$	Логарифмический рост до определённой точки, а затем постоянство	Быстрое увеличение (уменьшение), за которым следует медленное увеличение (уменьшение)
$c_1e^{c_2t}+c_3$	Экспоненциальный рост (или убывание, если c_2 – отрицательно) до определённой точки и затем постоянство (отметим, что обратная величина в случае, если c_2 отрицательно – логистическая S-образная кривая)	Медленное увеличение (уменьшение), за которым следует быстрое увеличение (уменьшение)
$d_1t^2+d_2t+d_3$	Парабола с максимумом или минимумом в зависимости от того, отрицательно или положительно d_1 и затем постоянство (может быть модифицирована для асимметричности вправо или влево)	Увеличение (уменьшение) до максимума (минимума) и затем уменьшение (увеличение)
$e_1t^n\sin(t+e_2)+e_3$	Колебания	Колебание с увеличивающейся (уменьшающейся) амплитудой в зависимости от $n>0$ $(n\le 0)$
Катастрофы	Указываются разрывы	Чрезвычайно сильные изменения в интенсивности

опускающемся до минимума и возрастающем, колебательном и, наконец, допускающем катастрофическое изменение.

Матрица 2×2

Для этого случая $\lambda_{\max}(t)=2$ и наша зависимая от времени задача о собственном значении представляется в виде

$$\begin{bmatrix} 1 & a(t) \\ 1/a(t) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix},$$

откуда имеем

$$\omega_1(t)+a(t)\omega_2(t)=2\omega_1(t),$$
$$\omega_1(t)/a(t)+\omega_2(t)=2\omega_2(t).$$

Из первого уравнения получаем

$$\omega_1(t)=a(t)\omega_2(t),$$

что также может быть получено из второго уравнения. Эти два уравнения не могут быть независимыми, в противном случае детерминат $A(t)$ не был бы равен нулю и мы не имели бы ненулевого решения. Поэтому можно зафиксировать $\omega_2(t)$ произвольным образом, например положить $\omega_2(t)=1$, отсюда получим $\omega_1(t)=a(t)$. Нормализованный правый собственный вектор имеет вид $\left\{a(t)/\left[a(t)+1\right],1/\left[a(t)+1\right]\right\}$. Нормализованный левый собственный вектор будет обратным элементом, т. е.

$$\left\{1/a(t)\left[a(t)+1\right],\ 1/\left[a(t)+1\right]\right\}$$

Матрица 3×3

Моррис [109], решая кубическое уравнение, достаточно просто показал, что $\lambda_{\max}$ для случая 3×3 при $a_{ij}=1/a_{ji}$ представляется в виде

$$\lambda_{\max}=\left(a_{13}/a_{12}a_{23}\right)^{1/3}+\left(a_{12}a_{23}/a_{13}\right)^{1/3}+1$$

Заметим, что $\lambda_{\max}$ всегда ≥ 3 (мы доказали, что в общем случае $\lambda_{\max}\geq n$).

Система уравнений, соответствующая этому случаю, представляется следующим образом:

$$\omega_1(t)+a_{12}\omega_2(t)+a_{13}\omega_3(t)=\lambda_{\max}(t)\omega_1(t),$$
$$\omega_1(t)/a_{12}+\omega_2(t)+a_{23}\omega_3(t)=\lambda_{\max}(t)\omega_2(t),$$
$$\omega_1(t)/a_{13}+\omega_2(t)/a_{23}+\omega_3(t)=\lambda_{\max}(t)\omega_3(t).$$

Положим $\omega_1=1$. Первое уравнение будет

$$a_{12}\omega_2(t)+a_{13}\omega_3(t)=-(1-\lambda),$$

а второе –

$$(1-\lambda)\omega_2+a_{23}\omega_3=-1/a_{12}.$$

Решим их теперь относительно ω_2 и ω_3. Получим

$$\omega_2 = \frac{(\lambda-1)a_{23} + (a_{13}/a_{12})}{\Delta},$$

$$\omega_3 = \frac{-1+(1-\lambda)^2}{\Delta},$$

где $\Delta = a_{12}a_{23} + a_{13}(\lambda-1)$.

Чтобы нормализовать компоненты, образуем

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \frac{a_{12}a_{23} + a_{13}(\lambda-1)a_{23} + (a_{13}/a_{12}) - 1 + (1-\lambda)^2}{\Delta} \equiv \frac{D}{\Delta}.$$

Следовательно,

$$\omega_1 = \Delta / D,$$

$$\omega_2 = \frac{(\lambda-1)a_{23} + (a_{13}/a_{12})}{D},$$

$$\omega_3 = \frac{-1+(1-\lambda)^2}{D}.$$

Для левого собственного вектора, который является поэлементно обратным, имеем:

$$\upsilon_1 = \frac{-1+(1-\lambda)^2}{E}$$

$$\upsilon_2 = \frac{a_{12}(\lambda-1) + (a_{13}/a_{23})}{E},$$

$$\upsilon_3 = \Delta / E,$$

где

$$E = -1 + (1-\lambda)^2 + a_{12}(\lambda-1) + (a_{13}/a_{23}) + a_{12}a_{23} + a_{13}(\lambda-1).$$

Матрица 4×4

Рассмотрим обратносимметричную матрицу 4×4 с элементами, являющимися функциями времени

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 1/a & 1 & d & e \\ 1/b & 1/d & 1 & f \\ 1/c & 1/e & 1/f & 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что все коэффициенты могут быть функциями параметра t. Характеристическое уравнение этой матрицы

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 - (B-8)\lambda + (B+C-5) = 0,$$

где

$$B = \left(\frac{df}{e} + \frac{e}{df}\right) + \left(\frac{ae}{c} + \frac{c}{ae}\right) + \left(\frac{ad}{b} + \frac{b}{ad}\right) + \left(\frac{bf}{c} + \frac{c}{bf}\right),$$

$$C = 3 - \left(\frac{adf}{c} + \frac{c}{adf}\right) - \left(\frac{ae}{bf} + \frac{bf}{ae}\right) - \left(\frac{cd}{ae}\right) - \left(\frac{cd}{be} + \frac{be}{cd}\right).$$

Рассмотрим редукцию уравнения четвертой степени следующим образом:

$$\left(\lambda^2-2\lambda\right)=\left(B-8\right)\lambda-\left(B+C-5\right)+4\lambda^2.$$

Добавляя

$$\left(\lambda^2-2\lambda\right)r+\frac{1}{4}r^2$$

(r – параметр) к обеим частям уравнения, получаем

$$\left(\lambda^2-2\lambda+\frac{1}{2}r\right)^2=\left(r+4\right)\lambda^2+\left(B-8-2r\right)\lambda+\frac{1}{4}r^2-\left(B+C-5\right).$$

Правая часть является полным квадратом линейной функции по λ в том и только в том случае, если ее детерминант равен нулю, т. е.

$$\Delta=\left[\left(B-8\right)-2r\right]^2-4\left[\frac{1}{4}r^2-\left(B+C-5\right)\right]\left(r+4\right)=$$

$$=-r^3+4\left(c+3\right)r+\left(-16+B^2+16C\right)=0,$$

и называется кубической резольвентой уравнения четвёртой степени. Если r – корень этого уравнения, то $\Delta=0$. Имеем

$$\left(\lambda^2-2\lambda+\frac{1}{2}r\right)^2=\left(r+4\right)\left[\lambda+\frac{B-2\left(r+4\right)}{2\left(r+4\right)}\right]^2=\left(r+4\right)\left[\lambda-1+\frac{B}{2\left(r+4\right)}\right]^2,$$

откуда при использовании наибольшего значения r получим

$$\lambda_{\max}=\frac{2+\sqrt{r+4}}{2}+\sqrt{\frac{8-r}{4}+\frac{B}{2\sqrt{r+4}}}.$$

Теперь посмотрим, как решается кубическое уравнение.

Кубическую резольвенту можно представить в виде

$$r^3+pr+q=0,$$

где $p=-4\left(C+3\right)$, $q=16-B^2-16C$.

Используя преобразование

$$r=z-\frac{p}{3z},$$

запишем резольвенту в виде

$$z^3-\frac{p^3}{27z^3}+q=0$$

или

$$z^6+qz^3-\frac{p^3}{27}=0,$$

а это – квадратное уравнение по z^3.

Таким образом, решения будут

$$z^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{R},$$

где $R=\left(p/3\right)^3+\left(q/2\right)^2$. Пусть

$$T_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}},\ T_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}}.$$

Кубические корни из единицы будут

$$1,\ \omega^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\ ,\ \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3i}\ .$$

Получаем следующие шесть решений

$$T_1,\ \omega^1 T_1,\ \omega^2 T_1,\ T_2,\ \omega^1 T_2,\ \omega^2 T_2$$

уравнения

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0\ .$$

Известно, что корни приведённого кубического уравнения $r^3 + pr + q = 0$ представляются в виде

$$r_1 = T_1 + T_2\ ,$$
$$r_2 = \omega^1 T_1 + \omega^2 T_2\ ,$$
$$r_3 = \omega^2 T_1 + \omega^1 T_2\ .$$

Поэтому

$$r_1 = \left[\left(-8 + \frac{B^2}{2} + 8C\right) + \sqrt{\left[-\frac{4}{3}(C+3)\right]^3 + \left(8 - \frac{B^2}{2} - 8C\right)^2}\ \right]^{1/3} +$$
$$+\left[\left(-8 + \frac{B^2}{2} + 8C\right) - \sqrt{\left[-\frac{4}{3}(C+3)\right]^3 + \left(8 - \frac{B^2}{2} - 8C\right)^2}\ \right]^{1/3},$$

$$r_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)T_1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)T_2 =$$
$$r_2 = -\frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(T_1 - T_2)i\ ,$$
$$r_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)T_1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)T_2 =$$
$$r_2 = -\frac{1}{2}(T_1 + T_2) - \frac{\sqrt{3}}{2}(T_1 - T_2)i\ .$$

Если $T_1 = T_2$, $R = 0$ и корни $r_2 = r_3 = (-q/2)^{1/3}$. действительны; $r_1 = 2(-q/2)^{1/3}$. Кроме того, поскольку корни комплексно-сопряжённые, r_1 всегда является действительным корнем кубической резольвенты. Это следует из того факта, что $p \geq 0$. Чтобы понять это, отметим, что C имеет три члена вида $x + 1/x$. Минимальное значение такого члена равно 2, т. е. $C \leq -3$ и $p = -4(C+3) \geq 0$. Поэтому $r = r_1$ всегда действителен. К тому же $r \geq 0$, так как $q \leq 0$. Это следует из

$$B^2 + 16C \geq 16\ ,$$
$$B^2 \geq 16(1 - C).$$

Минимум $16(1-C)$ есть 64.

Аналогично минимальное значение B^2 есть 64. Поэтому $q \leq 0$. Итак, первый член из выражения для r_1 положителен и, кроме того, всегда превосходит второй.

Поэтому $r = r_1 \geq 0$ является корнем, который используется выше в выражении для $\lambda_{\max}$.

Решение системы $A\omega = \lambda_{\max}\omega$, которое в развернутой форме имеет вид

$$(1-\lambda)\omega_1 + a\omega_2 + b\omega_3 + c\omega_4 = 0,$$

$$\frac{1}{a}\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2 + d\omega_3 + e\omega_4 = 0,$$

$$\frac{1}{b}\omega_1 + \frac{1}{d}\omega_2 + (1-\lambda)\omega_3 + f\omega_4 = 0,$$

$$\frac{1}{c}\omega_1 + \frac{1}{e}\omega_2 + \frac{1}{f}\omega_3 + (1-\lambda)\omega_4 = 0,$$

после нормализации будет:

$$\omega_1 = \omega_1^0 / Q, \ \omega_2 = \omega_2^0 / Q, \ \omega_3 = \omega_3^0 / Q, \ \omega_4 = \omega_4^0 / Q,$$

где

$$Q = (\lambda-1)^3 + (c+f+e)(\lambda-1)^2 + \left[(ae-3)+(b+d)f + \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)c + \frac{e}{d}\right](\lambda-1) +$$

$$\left[(adf - a - e - f) + \left(\frac{be}{d} + \frac{bf}{ba}\right) + \frac{cd+ae}{b}\frac{c-b}{ad}\right],$$

$$\omega_1^0 = c(\lambda-1)^2 + (ae+bf)(\lambda-1) + \left(adf + \frac{be}{d} - c\right),$$

$$\omega_2^0 = e(\lambda-1)^2 + \left(df + \frac{c}{a}\right)(\lambda-1) + \left(\frac{bf}{a} + \frac{cd}{b} - e\right),$$

$$\omega_3^0 = f(\lambda-1)^2 + \left(\frac{e}{d} + \frac{c}{b}\right)(\lambda-1) + \left(\frac{c}{ad} + \frac{ae}{b} - f\right),$$

$$\omega_4^0 = (\lambda-1)^2 - 3(\lambda-1) - \left(\frac{ad}{b} + \frac{b}{ad}\right).$$

Замечание. Из полученного решения видно, что если любой коэффициент увеличивается (уменьшается) в данной строке матрицы парных сравнений, то величина компоненты собственного вектора, соответствующей этой строке, увеличивается (уменьшается) относительно остальных компонент. Это свойство присуще и общему случаю для обратносимметричной матрицы.

В завершении этого раздела рассмотрим простой случай семьи, состоящей из отца (О), матери (М) и ребенка (Р). Очевидно, что время, которое ребенок проводит дома, зависъ г от его возраста. Ребенок будет находиться дома то же время, что и мать, а затем, взрослея, он будет проводить дома все меньше времени по сравнению с тем временем, которое проводит дома мать. Предполагается, что мать не ходит на работу.

Если сравнить время, проводимое дома матерью и ребенком, и составить диаграмму этого отношения как функцию времени, то получим кривую, показанную на рис. 5.1.

Кривая начинается с одинакового времени, которое проводит дома мать и ребенок, затем отношение времени матери к времени ребенка растет, пока кривая не станет горизонтальной. Это произойдет ко времени, когда ребенок достигло 15–16 лет.

Сравнение времени, проводимого дома отцом и ребенком, дает отношение, которое является зеркальным отражением верхней кривой. Это отношение показано на рис. 5.2. Относительная величина времени, проводимая дома отцом и матерью, не будет меняться слишком сильно и можно предположить, что она более или менее постоянна.

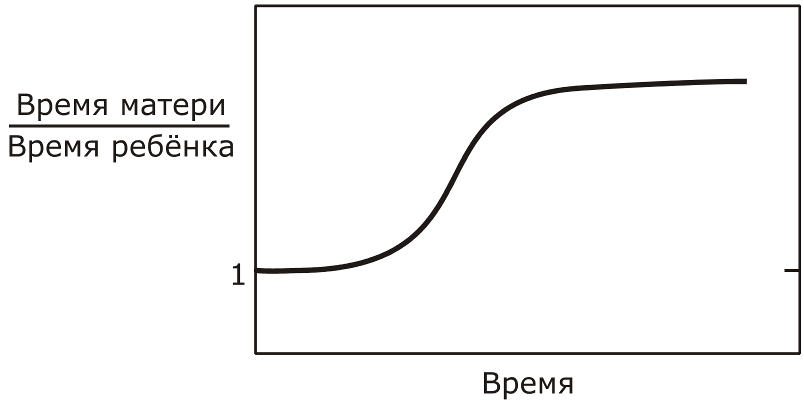


Рис. 5.1

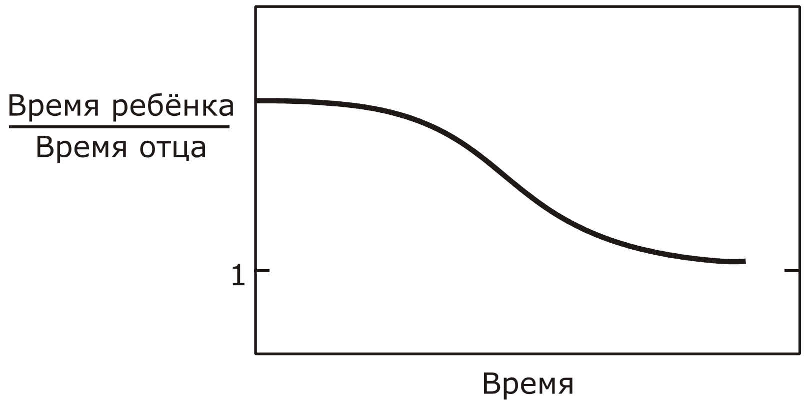


Рис. 5.2

Если требуется провести парные сравнения различных промежутков времени, проводимых дома различными членами семьи, то нужно получить последовательность матриц сравнения, каждая из которых соответствовала бы определенному периоду времени.

Рассмотрим период времени, соответствующий возрасту ребёнка до четырех лет. Если исключить, скажем, восемь часов ночью, то можно ожидать, что мать и ребёнок проводят примерно в 2–3 раза больше времени дома, чем отец. Конечно, мать и ребёнок проводят дома одно и то же время.

Это дает следующую матрицу:

$$\begin{array}{c} \\ O \\ M \\ P \end{array} \begin{bmatrix} O & M & P \\ 1 & 1/2{,}5 & 1/2{,}5 \\ 2{,}5 & 1 & 1 \\ 2{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{\max} = 3{,}0$; ИС = 0,0; ОС = 0,0

Отсюда получаем следующий собственный вектор для их относительного времени пребывания дома

$$O : 0{,}167;\ M : 0{,}417;\ P : 0{,}417,$$

который разумно отражает соответствующие пропорции времени.

Примерно в четыре года ребенок начинает ходить в детский сад, так что происходит разное изменение в относительных пропорциях времени, проводимом дома матерью с ребенком и отцом с ребенком.

Изменяющиеся пропорции в одной матрице можно записать, используя зависящее от времени выражение для этих пропорций

$$\begin{array}{c|ccc} & O & M & P \\ \hline O & 1 & 1/2 & 1/\left(3-1nt/2\right) \\ M & 2 & 1 & 0,4+1nt/2 \\ P & 3-1nt/2 & 1/\left(0,4+1nt/2\right) & 1 \end{array}$$

где t – возрастной период от 4 до 16 лет.

Эта матрица, наряду с предыдущей, приводит к кривым на рис. 5.3–5.5, которые изображают соответствующие парные сравнения при изменении возраста от нуля до 16 лет.

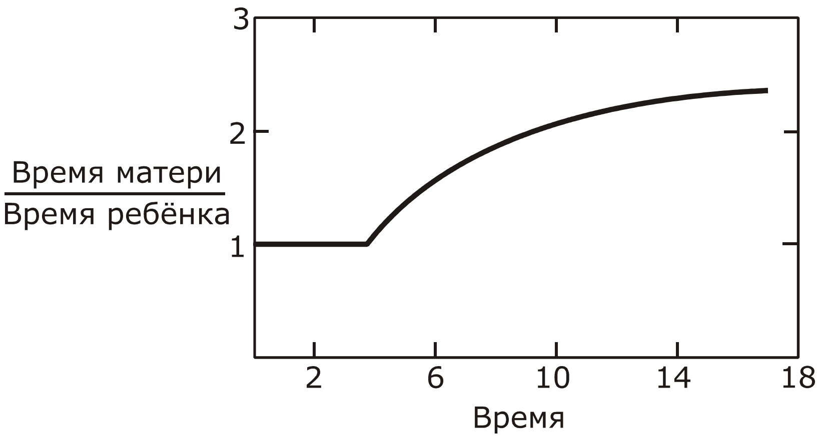


Рис. 5.3. Мать и ребёнок: возраст от 0 до 16 лет

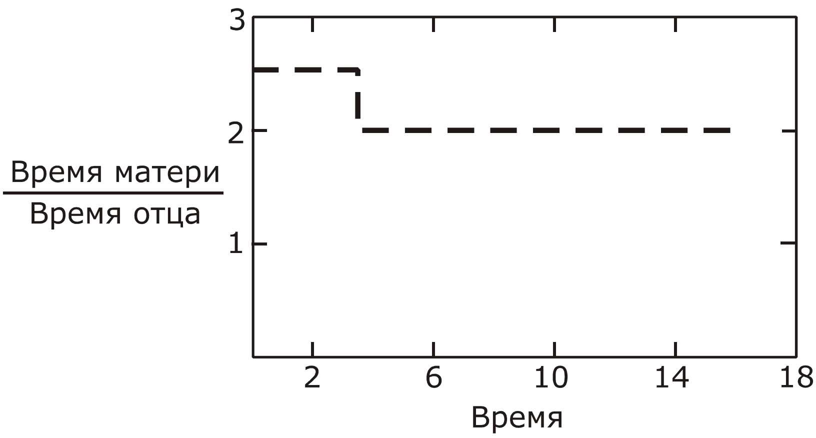


Рис. 5.4. Отец и мать: возраст от 0 до 16 лет

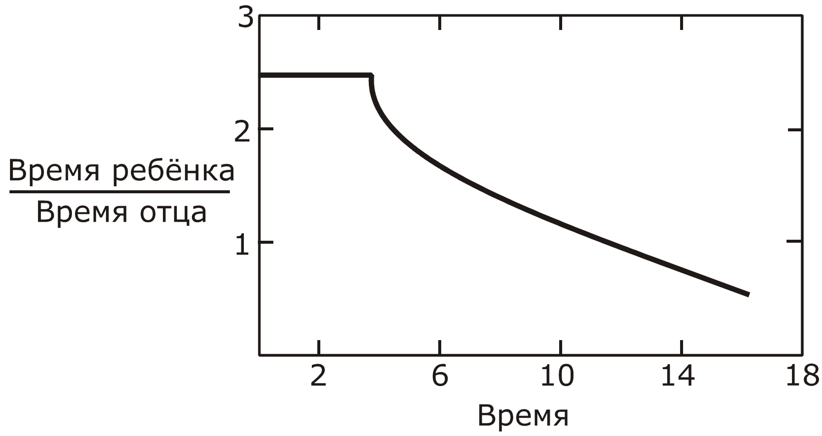


Рис. 5.5. Отец и ребёнок: возраст от 0 до 16 лет

Решение задачи о максимальном собственном значении, соответствующем этим кривым парных сравнений для $(4 \le t \le 16)$, будет

$$\lambda = \left[\frac{2}{(3-1nt/2)(0,4+1nt/2)}\right]^{1/3} + \left[\frac{(3-1nt/2)(0,4+1nt/2)}{2}\right]^{1/3}.$$

Соответствующий собственный вектор получается в виде Δ/D,

$$\left[(\lambda-1)(0,4+1nt/2)+\frac{2}{3-1nt/2}\right]/D,$$

$$\left[-1+(1-\lambda)^2\right]/D,$$

где

$$\Delta = 0,5(0,4+1nt/2)+\frac{\lambda-1}{3-1nt/2},$$

$$D = (\lambda-0,5)(0,4+1nt/2)+\frac{\lambda+1}{3-1nt/2}-1+(1-\lambda)^2.$$

По окончании школы ребенок проводит дома меньше времени, чем отец. Пропорции еще раз становятся довольно постоянными и отражаются в следующей согласованной матрице парных сравнений:

$$\begin{array}{c} \\ O \\ M \\ P \end{array}\begin{bmatrix} O & M & P \\ 1 & 0,5 & 1,25 \\ 2 & 1 & 2,5 \\ 0,8 & 0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{\max} = 3,0$; ИС = 0,0; ОС = 0,0

Собственный вектор будет

$$O: 0,263;\ M: 0,526;\ P: 0,211.$$

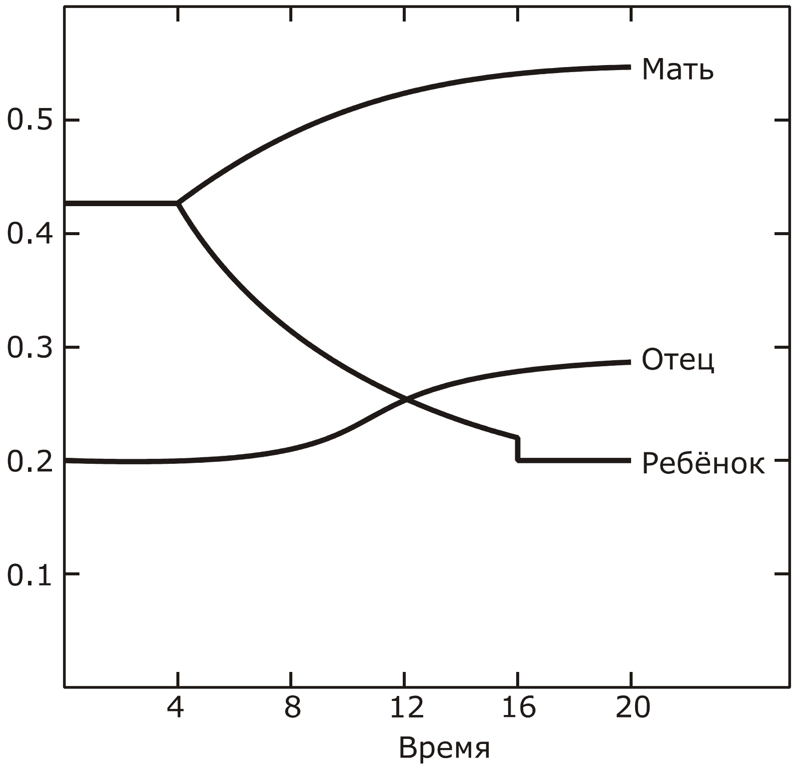


Рис. 5.6. Сравнительное время, проводимое дома

Построение результирующих диаграмм для $0 \le t \le 4$, $4 \le t \le 16$ и $16 \le t$ реалистически воспроизводит сравнительное время, по отношению ко всем остальным членам семьи, которое каждый член семьи проводит дома (рис. 5.6).

5.5. ИЗМЕРЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МЕЖДУ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ СПОСОБАМИ: ВХОД–ВЫХОД; ПРИЛОЖЕНИЕ К СУДАНУ

При изучении взаимосвязей особое внимание уделим отношениям типа «вход–выход». Матрицы модели «вход–выход» в экономике получаются в общем виде следующим образом.

Пусть даны N секторов экономики $A_1, A_2, \ldots, A_N$ и матрица S; элемент матрицы s_{ij} обозначает выход сектора i, который становится входом сектора j (это промежуточная продукция сектора i. необходимая сектору j). Выход из сектора i к потребителю (конечная продукция) обозначим через Y_i. Имеем

$\sum_{j=1}^{N} s_{ij} = S_i$ – общая промежуточная продукция сектора i (внутренние потребности других секторов)

$S_i + Y_i = O_i$ – общая (валовая) продукция сектора i

Коэффициенты прямых затрат* получаются следующим образом:

$\dfrac{s_{ij}}{S_i + Y_i} - \omega_{ij}$ – (вклад сектора i в производство единицы общей продукции j

* Называются также технологическими коэффициентами. – *Прим. перев.*

$$\frac{s_{ij}}{S_i + Y_i} = \frac{s_{ij}}{S_{ii}} \frac{S_i}{S_i + Y_i} = \frac{s_{ij} S_i}{S_i O_i}$$

Для получения матрицы прямых затрат посредством МАИ нужно оценить s_{ij} / S_i и S_i / O_i. Посмотрим, что они представляют из себя. $S_i / \left(S_i + Y_i\right)$ – доля общей продукции сектора i, распределяемой для собственного потребления. Общая промежуточная продукция оценивается для $i = 1, 2, \ldots, N$ посредством МАИ после ответа на следующий вопрос: насколько один сектор важнее по сравнению с другим при распределении выходной продукции на собственные нужды? Если на этот вопрос нельзя ответить прямо, то внутренние потребности могут быть иерархически разделены на производство, спрос, людские ресурсы, капитал и стоимость, и секторы получают приоритеты отдельно относительно каждого критерия. После определения приоритетов этих критериев по отношению к их влиянию на производство используется композиция для получения общей меры важности для секторов. Обозначим оценки S_i / O_i через x_i.

Вновь s_{ij} / S_i представляет собой долю общей промежуточной продукции сектора i. распределенную в секторе j. Имеем

$$\sum_{j=1}^{N} s_{ij} / S_i = 1$$

Построим матрицу парных сравнений между секторами по отношению к сектору i. Ответим на следующий вопрос: насколько сильна зависимость одного сектора по сравнению с другим для получения выходной продукции из сектора i? В результате имеем матрицу парных сравнений, из которой получаем собственный вектор-столбец весов. Когда это проделано для каждого сектора, получаем матрицу W, столбцами которой будут собственные векторы.

Наконец, для получения оценок коэффициентов прямых затрат, т. е. матрицы «вход–выход», поэлементно умножим каждый столбец матрицы W на вектор-столбец $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right)$.

Самым важным фактором, который следует принять во внимание при оценке матрицы прямых затрат, используя иерархический подход, является доля промежуточной продукции в каждом секторе относительно всей продукции. Оценка этой доли была проведена в предлагаемом примере после тщательного изучения существующей литературы по экономике Судана [139]. Рассматривались следующие шесть секторов:

1. Сельское хозяйство (СХ).
2. Коммунальное хозяйство (КХ).
3. Промышленность и добыча полезных ископаемых (ПД).
4. Транспорт и доставка товаров (ТД).
5. Строительство (СТ).
6. Сервис (СЕ).

Судан рассматривается в основном как аграрная страна. К тому времени, когда разрабатывались эконометрические модели (1972 г.) и проводился анализ «вход–выход», использовались данные за 1961 г. Основной проблемой в Судане было отсутствие достаточно эффективной транспортной системы. Для получения одинакового порядка величин оценок секторов, сравниваемых с сельским хозяйством и транспортом (другим крупным видом деятельности), остальные секторы были сгруппированы в одно целое – агрегат. Таким образом, имеем:

Агрегат (АГ)	Коммунальное хозяйство Промышленность и добыча полезных ископаемых Строительство Сервис

Для образования матриц парных сравнений нужно задать следующий вопрос: какой из двух секторов i и j распределяет большую часть своей продукции для удовлетворения внутренних потребностей (общую промежуточную продукцию)? Сначала сравним элементы агрегата, затем отдельно – агрегат с сельским хозяйством и транспортом и используем итоговый вес агрегата для составления соответствующих весов четырех секторов самого агрегата. Для экономии места не выписаны обоснования суждений, которые имеются в конкретном исследовании.

Удовлетворение внутренних потребностей	КХ	ПД	СТ	СЕ	Собственный вектор
АГ: КХ	1	1/2	1/2	1/3	0,1272
ПД	2	1	1	1	0,2804
СТ	2	1	1	1	0,2804
СЕ	3	1	1	1	0,3120

$\lambda_{\max} = 4,02$; ИС = 0,007; ОС = 0,007

Удовлетворение внутренних потребностей	СХ	ТД	АГ	Собственный вектор
СХ	1	1/2	2	0,3108
ТД	2	1	2	0,4934
АГ	1/2	1/2	1	0,1948

$\lambda_{\max} = 3,05$; ИС = 0,025; ОС = 0,04

Для относительной важности секторов получаем:

Секторы	Окончательные веса $S_i/(S_i+Y_i)$	Оценки $Y_i/(S_i+Y_i)$
1	0,3108	0,6892
2	0,0248	0,9752
3	0,0546	0,9454
4	0,4934	0,5066
5	0,0546	0,9454
6	0,0608	0,9392

Теперь определим взаимоотношения между секторами. Они представлены строками табл. 5.2.

Для заданного определенного сектора i мы спрашиваем: в каком из двух секторов, h и k, распределяется больше продукции сектора i? Приведенные ниже матрицы дают ответ на этот вопрос для каждого сектора.

Таблица 5.2

Вход-выход	СХ	КХ	ПД	ТД	СТ	СЕ
СХ	Х		Х	Х	Х	
КХ	Х		Х	Х		Х
ПД	Х			Х	Х	Х
ТД	Х	Х	Х		Х	Х
СТ						Х
СЕ		Х	Х	Х	Х	Х

Сельское хозяйство

Основной сельскохозяйственной культурой в Судане является хлопок. Хлопок экспортируется, а также потребляется промышленностью. Поэтому сельское хозяйство, транспорт и строительство не получают большого количества продукции сельского хозяйства. Образуем новый агрегат. (Заметим, что только четыре сектора рассматриваются в связи с сельским хозяйством.)

Агрегат (АГ)	Коммунальное хозяйство Промышленность и добыча полезных ископаемых Транспорт и доставка товаров Строительство

Как уже отмечалось, основная проблема Судана – нехватка транспорта. Мы объединили два сектора, которые не потребляют существенного количества сельскохозяйственной продукции, само сельское хозяйство, транспорт и доставку товаров, из-за того, что хотя второй основной культурой после хлопка является пшеница, сельскохозяйственный сектор размещает большую часть своей продукции (например, дерево) в строительстве. Транспорт развивается посредством займов, получаемых от арабских стран, имеющих нефть, и Всемирного банка. Это еще одна причина объединения сельского хозяйства и транспорта в один подагрегат.

	Вход из сельского хозяйства	СХ	ТД	Собственный вектор
Подагрегат (ПАГ)	СХ	1	9	0,9000
	ТД	1/9	1	0,1000

$\lambda_{\max} = 2{,}0$; ИС = 0,0; ОС = 0,0

	Вход из сельского хозяйства	ПАГ	СТ	Собственный вектор
Агрегат (АГ)	ПАГ	1	1/9	0,1000
	СТ	9	1	0,9000

$\lambda_{\max} = 2{,}0$; ИС = 0,0; ОС = 0,0

	Вход из сельского хозяйства	АГ	ПД	Собственный вектор
	АГ	1	1/3	0,25
	ПД	3	1	0,75

$\lambda_{\max} = 2{,}0$; ИС = 0,0; ОС = 0,0

Секторы	1	2	3	4	5	6
Окончательные веса	0,0225	0,0000	0,7500	0,0025	0,2250	0,0000

Замечание. Веса СХ и ТД получены следующим образом:

$$\begin{array}{c} \mathit{СХ} \\ \mathit{ТД} \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}1 \end{bmatrix} \times \left(0{,}1\right) \times \left(0{,}25\right) = \begin{bmatrix} 0{,}0225 \\ 0{,}0025 \end{bmatrix}$$

Вес строительства получен в результате умножения (0,9) на (0,25) и равен 0,225.

Коммунальное хозяйство

Вход их КХ	СХ	ПД	ТД	СЕ	Собственный вектор
СХ	1	1/9	1/7	1/5	0,0410
ПД	9	1	2	5	0,5242
ТД	7	1/2	1	3	0,3030
СЕ	5	1/5	1/3	1	0,1318

$\lambda_{\max} = 4{,}12$; ИС = 0,04; ОС = 0,04

Промышленность и добыча полезных ископаемых

Вход их ПД	СХ	ТД	СТ	СЕ	Собственный вектор
СХ	1	1/2	1/9	1	0,0758
ТД	2	1	1/5	3	0,1628
СТ	9	5	1	9	0,6941
СЕ	1	1/3	1/9	1	0,0681

$\lambda_{\max} = 4{,}03$; ИС = 0,01; ОС = 0,01

Транспорт и доставка товаров

Вход их ТД	СХ	КХ	ПД	СТ	СЕ	Собственный вектор
СХ	1	1/3	1/2	1/2	7	0,1400
КХ	3	1	1	2	9	0,3434
ПД	2	1	1	1	7	0,2596
СТ	2	1/2	1	1	7	0,2260
СЕ	1/7	1/9	1/7	1/7	1	0,0310

$\lambda_{\max} = 5{,}11$; ИС = 0,03; ОС = 0,03

Строительство

Строительство предоставляет свою продукцию только в сервис. Поэтому ассоциируем с сервисом величину 1.

Сервис в Судане находится на очень низком уровне. Мы считаем, что распределение выходной продукции этого сектора на сервис и строительство настолько незначительно, что его можно агрегировать. Имеем:

$$\begin{matrix} \text{Агрегат} \\ \text{(АГ)} \end{matrix} \begin{cases} \text{Строительство} \\ \text{Сервис} \end{cases}$$

Вход из СЕ		СТ	СЕ	Собственный вектор
АГ:	ПАГ	1	9	0,9000
	СТ	1/9	1	0,1000

$\lambda_{\max} = 2{,}0$; ИС = 0,0; ОС = 0,0

Сервис

Вход их сервиса	КХ	ПД	ТД	АГ	Собственный вектор
КХ	1	1/2	1/2	3	0,1930
ПД	2	1	1	5	0,3680
ТД	2	1	1	5	0,3680
АГ	1/3	1/5	1/5	1	0,0704

$\lambda_{\max} = 4{,}004$; ИС = 0,001; ОС = 0,001

Веса для строительства и сервиса получаются в результате умножения веса агрегата – 0,0704 на 0,9 и 0,1 соответственно

Секторы	1	2	3	4	5	6
Окончательные веса	0,0000	0,1930	0,3680	0,3680	0,0634	0,0070

Матрица, строками которой являются полученные выше собственные векторы, дает распределение обшей промежуточной продукции секторов. Она представлена в табл. 5.3.

Напомним, что вначале мы определили, какова доля промежуточной продукции в общей продукции каждого сектора. Вектор весов был таков:

$$\begin{array}{c} CX \\ KX \\ ПД \\ ТД \\ CT \\ CE \end{array} \begin{bmatrix} 0,3108 \\ 0,0248 \\ 0,0546 \\ 0,4934 \\ 0,0534 \\ 0,0608 \end{bmatrix}$$

Умножив каждый столбец матрицы из табл. 5.3 на этот вектор (покомпонентное умножение), например, для первого столбца получим

$$\begin{bmatrix} 0,0225 \times 0,3108 \\ 0,0410 \times 0,0248 \\ 0,0750 \times 0,0546 \\ 0,1400 \times 0,4934 \\ 0 \times 0,0546 \\ 0 \times 0,0608 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0070 \\ 0,0009 \\ 0,0041 \\ 0,0691 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таблица 5.3

	Производители ↓	СХ	КХ	ПД	ТД	СТ	СЕ
Доля общих промежуточных выходов →	СХ	0,0225	0	0,7500	0,0025	0,2250	0
	КХ	0,0410	0	0,5242	0,3030	0	0,1318
	ПД	0,0750	0	0	0,1628	0,6841	0,0681
	ТД	0,1400	0,3434	0,2596	0	0,2260	0,0310
	СТ	0	0	0	0	0	1
	СЕ	0	0,1930	0,3683	0,3683	0,0634	0,0070

Таблица 5.4

	СХ	КХ	ПД	ТД	СТ	СЕ
СХ	0,0070	0	0,2331	0,0008	0,0699	0
КХ	0,0009	0	0,0130	0,0075	0	0,0033
ПД	0,0041	0	0	0,0089	0,0379	0,0037
ТД	0,0691	0,1694	0,1281	0	0,1115	0,0153
СТ	0	0	0	0	0	0,0546
СЕ	0	0,0117	0,0224	0,0224	0,0039	0,0004

Таблица 5.5

	СХ	КХ	ПД	ТД	СТ	СЕ
СХ	0,00737	0	0,21953	0,00042	0,06721	0
КХ	0,00024	0	0,01159	0,00618	0	0,00283
ПД	0,00393	0	0	0,00857	0,04216	0,00322
ТД	0,06993	0,14536	0,12574	0	0,09879	0,00641
СТ	0	0	0	0	0	0,05402
СЕ	0	0,01030	0,02549	0,02422	0,00520	0,00021

Взвешенная матрица представлена в табл. 5.4. Если сравнить матрицу табл. 5.4 с матрицей прямых затрат, которая получена традиционными методами (табл. 5.5), то можно убедиться, что они незначительно отличаются друг от друга.

Факторы, включенные в эту проблему, были чисто экономическими. Это наводит на мысль о распространении анализа подобного типа на изучение социальных систем и, в частности, на введение социальных факторов в задачу распределения ресурсов (задачу, кратко упомянутую В. Леонтьевым, основоположником анализа «вход–выход»), когда виды деятельности взаимосвязаны. Что касается нас, то разрабатывается проект проведения такого исследования в социальной сфере.

Для введения понятия приоритета при взаимозависимости в виде некоторого числа, во-первых, отметим, что виды деятельности могут быть взаимозависимыми только в смысле части характеристик, представленных в иерархии. Например, в производстве виды деятельности могут зависеть друг от друга через поток физических материалов между ними, но не от «чистого» вклада каждого из них в экономику, оборону или благосостояние. Число приоритетов при взаимозависимости вычисляются следующим образом. Каждая строка матрицы «вход–выход» вновь взвешивается поэлементно посредством весов независимости соответствующего вида деятельности – реципиента. Причина этого состоит в том, что если бы мы суммировали каждую строку для получения величины материальных потоков от одного вида деятельности ко всем другим в качестве показателя их зависимости от него, то мы должны были бы взвесить полученное количество, используя приоритет реципиента. В противном случае вид деятельности с низким приоритетом, поставляющий большое количество продукции другому виду деятельности с низким приоритетом, получил бы высокий приоритет. Конечно, получатель может, в свою очередь, поставлять продукцию реципиенту с высоким приоритетом. Чтобы принять во внимание все такие взаимодействия второго и более высоких порядков, необходимо возводить результирующую матрицу во все более высокие степени и для вычисления приоритетов нужна нормализованная сумма строк предельной матрицы. Однако мы знаем, что этот результат можно получить при решении задачи наибольшего собственного значения, предусмотрев возможность работы при необходимости неприводимыми примитивными подматрицами исходной матрицы.

Применяя вышеупомянутое к матрице «вход–выход» Судана, поэлементно умножая ее строки на приоритеты независимое и вычисляя главный собственный вектор, получим (0,14; 0,10; 0,11; 0,33; 0,06; 0,26) для приоритета взаимозависимости секторов, с львиной долей транспорта (поскольку все секторы зависят от него) и следующего за ним по значимости сервиса. Сельское хозяйство и транспорт являются конечными потребителями сервиса. Вектор взаимозависимости следует сравнить с независимым вектором приоритетов (0,31; 0,03; 0,06; 0,49; 0,05; 0,06), который значительно от него отличается. Эти два вектора имеют различный смысл для принятия решений. Можно было бы взять нормированные суммы строк взвешенной матрицы «вход–выход» в качестве оценок приоритетов взаимозависимости. Это представлено вектором (0,16; 0,07; 0,05; 0,50; 0,11; 0,12), который нельзя считать удовлетворительной оценкой.

5.6. РАЗМЕЩЕНИЕ РЕСУРСОВ

В общих выражениях, размещение ресурсов – это трансформация системы из одного состояния в другое. Например, построение моста преобразует состояние транспортных перевозок. Ресурс может принять форму материалов, энергии, времени, человеческих усилий, или их комбинаций. Деньги обычно используются для оценки различных величин, характеризующих каждый из этих видов ресурсов. По законам физики мы не можем получить что-нибудь из ничего, т. е. для изменения состояния системы необходимо приложить усилие. Ресурс должен быть найден.

Чтобы разместить ресурсы, нужно внимательнее рассмотреть потребности и то, как эти ресурсы следует распределить. Простым случаем будет распределение ресурсов по нескольким альтернативам. Для осуществления этого необходимо определить приоритеты альтернатив согласно их эффективности и стоимости. Поэтому нужно рассмотреть альтернативы в отношении целей, реализации которых они способствуют, а также оценить, во что обойдется их принятие. Может оказаться, что у двух альтернатив вместе окажется большее отношение эффективности к стоимости, чем у одной альтернативы.

Для вычисления эффективности альтернатив необходимо рассмотреть иерархию целей и характеристик альтернатив, а также сами альтернативы, чтобы иметь суждение о том, насколько велик вклад каждой альтернативы в достижение целей. Обычно имеется неопределенность в оценке воздействия альтернатив. Поэтому необходим уровень в иерархии, воспроизводящий неопределенность. За этим уровнем должно следовать представление известных и неизвестных технологических факторов. Таким образом можно получить оценку приоритетов альтернатив при неопределенности.

Следующим этапом является рассмотрение иерархии для издержек реализации альтернатив. Здесь вопрос, который должен быть задан, таков: какую задачу вероятнее всего поставит каждая альтернатива и что нужно сделать для решения такой задачи? Оценка задачи и того, что требуется для ее решения, часто находится в царстве неопределенности. Иногда необходимо предварительное исследование осуществимости для определения как издержек, так и эффективности решения задачи до построения иерархии.

Имеется несколько видов задач размещения, которым следуют на практике. Первый вид задачи: следует ли распределять ресурсы для данного проекта или нет? Здесь альтернативы, по которым создается или не создается проект, сравниваются на самых нижних уровнях иерархий стоимости и эффективности. Сравнение отношений эффективности к стоимости определит линию поведения.

Если есть сомнения в целесообразности реализации проекта, то стоит исследовать ресурсы. Рассматриваемыми альтернативами в иерархиях стоимости и эффективности будут: проект как одна альтернатива, производство и сохранение ресурса для будущих нужд как другая альтернатива. Могут быть несколько альтернатив, для которых должны быть установлены приоритеты, и задача может заключаться в распределении не особенно большого количества ресурса пропорционально эффективности альтернатив. Это обычный случай в исследовательских проектах, которые требуют непрерывного потока ресурсов в течение длительного периода. Вопрос об иерархии подобного типа таков: какая область исследования наиболее вероятно будет связана с серьезными трудностями реализации основных «достоинств», представленных в иерархии (в условиях неопределенности)? В другие моменты будет желательно распределить ресурсы среди проектов так, чтобы максимизировать отношения эффективности к стоимости. Могут быть также случаи, когда приоритеты служат индикаторами того, на какой из проектов следует выделить капитал, а на какой не следует. В большинстве случаев, где такие ресурсы, как деньги, недостаточны, финансовая стоимость альтернативы используется для представления приоритета издержек. Приложение такого рода использовалось в исследовании суданского транспорта. Еще более сложный тип распределения включает взаимозависимость между видами деятельности, поэтому распределение должно быть проведено при ограничивающих условиях взаимозависимости. При таком типе распределения стараются не ставить в невыгодное положение вид деятельности с высоким приоритетом из-за возможной недодачи ресурсов виду деятельности с низким приоритетом, от которого, однако, зависит последующий, более важный вид деятельности.

Имеются три типа задач размещения ресурсов общим количеством X.

1. *Полное вложение капитала.* Если начинают новые проекты, которые должны быть завершены за период размещения, то нужно произвести расчет эффективности b_i и стоимости c_i, перенумеровать проекты так, чтобы идентифицировать их согласно отношению

$$b_1 / c_1 \geq b_2 / c_2 \geq \ldots \geq b_n / c_n$$

и распределить ресурсы в порядке убывания этих соотношений, пока они не исчерпаются.

2. *Частичное вложение капитала.* В случае, когда требуется начать и следить за выполнением нескольких проектов, а распределение ресурсов производится в течение отдельных периодов времени, решается задача

$$\sum_{i=1}^{n} \left(b_i / c_i\right) x_i = \max$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = X, \; 0 \leq x_i \leq R_i / X,$$

где R_i – требуемое количество ресурса вида деятельности i. Поэтому не поддерживается проект, в результате реализации которого можно получить меньше, чем сравнительное значение стоимости по отношению к общему наличному ресурсу.

3. Для проектов, которые уже выполняются, можно проводить распределение согласно отношению оставшегося (маргинального) приоритета к издержкам.

Замечание. Ясно, что в некоторых случаях отношение эффективности к стоимости не то, которое хотелось бы иметь, так как некоторые малоэффективные вещи реализуются с очень низкими издержками. Поэтому до проведения анализа «стоимость–эффективность» должны быть определены требования к альтернативам.

Пример 5.1. Эффективность и стоимость переправы через реку

Правительственное агентство (например, Управление порта Нью-Йорка), обладающее полномочиями на строительство мостов, туннелей и т. д. в определенном районе, должно решить, строить или не строить туннель и/или мост через реку, которую в настоящее время обслуживает частный паром.

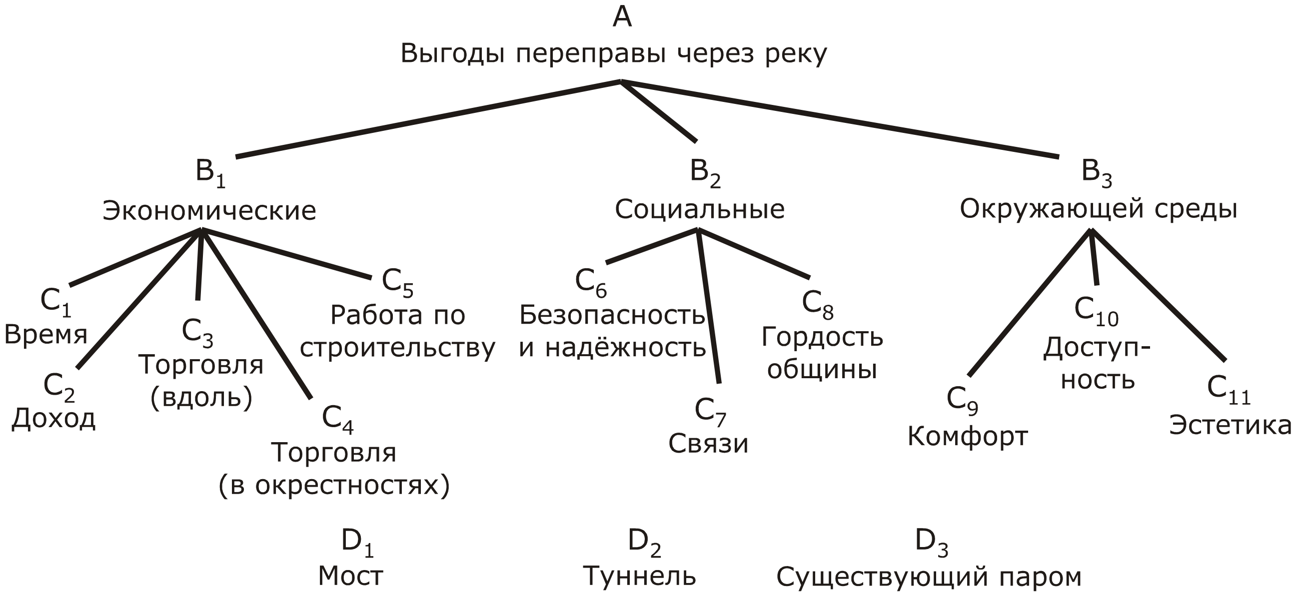


рис. 5.7

Факторы, влияющие на эффективность и стоимость переправы через реку, представлены двумя иерархиями на рис. 5.7 и 5.8. Они относятся к трем категориям: экономической, социальной и окружающей среды. Решение принимается в зависимости от отношения эффективности к стоимости.

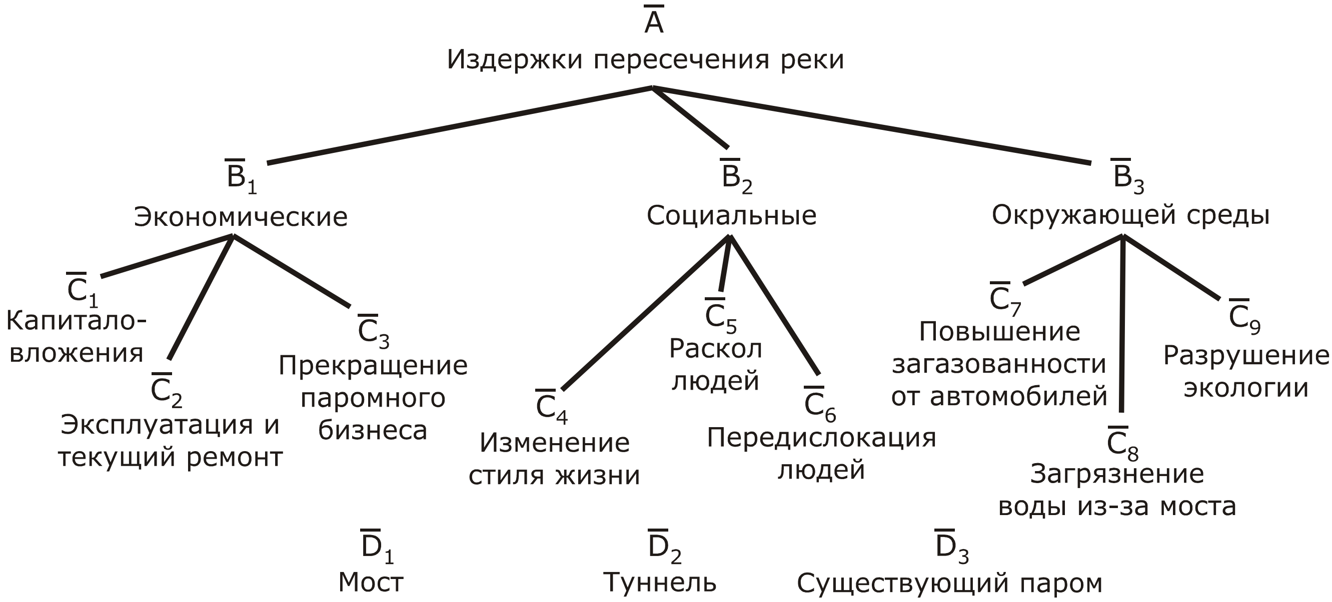


рис. 5.8

Эффективность (выгоды). Экономические факторы, которые влияют на выбор, определяются выгодой, получаемой в результате экономии времени от пользования новым мостом или туннелем по сравнению с паромом. Увеличение притока транспорта из-за пределов района может предоставить возможность ввести пошлину, которая добавляется к общему доходу местных властей. Оживление торговли, вызванное увеличением интенсивности транспорта, также выгодно общине в целом. К тому же движение транспорта будет способствовать сопутствующей торговле (например, бензозаправочные станции, рестораны и т. д.). Имеется также экономическая выгода от строительных работ. Если бы надо было учитывать только эти факторы, то большинство из них можно было бы оценивать количественно. Соответствующие издержки также можно рассчитать, и для принятия решения мы могли бы использовать отношение эффективности к стоимости. Однако нужно принять во внимание социальные факторы и факторы окружающей среды, которые не переводятся каким-либо разумным способом в доллары.

Социальные выгоды проекта рассматриваются как такие, какие общество в целом получит от наличия моста или туннеля. Они включают обеспечение большей безопасности и надежности, чем паром. Мост или туннель позволяют совершать большее число поездок через реку для посещения родственников, друзей, музеев и т. д. Наконец, они могут стать предметом гордости общины, которая не достигает той же степени при использовании парома.

Факторы окружающей среды рассматриваются с точки зрения их вклада в персональные выгоды. Персональные выгоды отличаются от выгод общества в целом тем, что они менее абстрактны. Факторами окружающей среды, которые представляют интерес для индивидуума, являются удобство пользования мостом, туннелем или паромом, доступность одного по сравнению с другим и эстетика, влияющие на выбор альтернативы переправы через реку.

Издержки. Так же, как и выгоды, издержки от переправы через реку включают факторы экономические, социальные и окружающей среды. Были приняты во внимание экономические расходы трех видов: капитальные вложения на альтернативы, расходы, связанные с эксплуатацией и текущим ремонтом для всех трех проектов, и экономическое следствие закрытия паромного бизнеса.

Социальные издержки представляют собой затраты общества. Важной представляется мысль о том, насколько изменится стиль жизни в зависимости от принятой альтернативы. Перегруженность движения зависит от разумных способов переправы и также считается важной частью издержек. Последней компонентой социальных издержек может быть влияние на общество перемещения людей в соответствии с выбранной альтернативой.

Издержки, порожденные окружающей средой, отличаются от выгод тем, что они представляют возможный вред, причиняемый экосистеме различными альтернативами. Различные способы переправы через реку могут увеличить загазованность в районе. Кроме того, вносят свой вклад в издержки, обусловленные окружающей средой, загрязнение воды и общее разрушение экологии.

Результаты. При вычислении выгод и издержек экономические факторы перевесили другие. Выгоды от торговли вдоль моста, дополнительная безопасность и надежность, а также быстрота переправы через реку – все это получило высокие приоритеты.

Общие выгоды и издержки следующие:

	Мост	Туннель	Паром
Выгоды (b_i)	0,57	0,36	0,07
Издержки (c_i)	0,36	0,58	0,05

Критерий, использованный в анализе «стоимость–эффективность», следующий: найти $\max_i b_i / c_i$, т. е. выбрать проект с наибольшим отношением выгоды к издержкам.

Для этого примера имеем:

Мост	Туннель	Паром
$b_1 / c_1 = 1,58$	$b_2 / c_2 = 0,62$	$b_3 / c_3 = 1,28$

Критерий отдает предпочтение строительству моста через реку. Отметим, что здесь приняты во внимание основные требования. Используя маргинальный анализ с издержками $0{,}05 \le 0{,}36 \le 0{,}58$ и эффективностями $0{,}07;\ 0{,}57;\ 0{,}36$, получаем $0{,}07/0{,}05;\ 0{,}5/0{,}3$ и вновь оказывается, что предпочтительнее всего мост.

Матрицы суждений для выгод

A	B_1	B_2	B_3	Собственный вектор
B_1	1	3	6	0,67
B_2	1/3	1	2	0,22
B_3	1/6	1/2	1	0,11

ИС=0

B_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Собственный вектор
C_1	1	1/3	1/7	1/5	1/6	0,04
C_2	3	1	1/4	1/2	1/2	0,09
C_3	7	4	1	7	5	0,54
C_4	5	2	1/7	1	1/5	0,11
C_5	6	2	1/5	5	1	0,23

ИС=0,14

B_2	C_6	C_7	C_8	Собственный вектор
C_6	1	6	9	0,76
C_7	1/6	1	4	0,18
C_8	1/9	1/4	1	0,06

ИС=0,05

B_3	C_9	C_{10}	C_{11}	Собственный вектор
C_9	1	1/4	6	0,25
C_{10}	4	1	8	0,69
C_{11}	1/6	1/8	1	0,06

ИС=0,07

C_1	D_1	D_2	D_3	Собственный вектор
D_1	1	2	7	0,58
D_2	1/2	1	6	0,35
D_3	1/7	1/6	1	0,07

ИС=0,02

C_2	D_1	D_2	D_3	Собственный вектор
D_1	1	1/2	8	0,36
D_2	2	1	9	0,59
D_3	1/8	1/9	1	0,05

ИС=0,02

C_3	D_1	D_2	D_3	Собственный вектор
D_1	1	4	8	0,69
D_2	1/4	1	6	0,25
D_3	1/8	1/6	1	0,06

ИС=0,07

C_4	D_1	D_2	D_3	Собственный вектор
D_1	1	1	6	0,46
D_2	1	1	6	0,46
D_3	1/6	1/6	1	0,08

ИС=0

C_5	D_1	D_2	D_3	Собственный вектор
D_1	1	1/4	9	0,28
D_2	4	1	9	0,66
D_3	1/9	1/9	1	0,05

ИС=0,11

C_6	D_1	D_2	D_3	Собственный вектор
D_1	1	4	7	0,68
D_2	1/4	1	6	0,26
D_3	1/7	1/6	1	0,06

ИС=0,09

C_7	D_1	D_2	D_3	Собственный вектор
D_1	1	1	5	0,46
D_2	1	1	5	0,46
D_3	1/5	1/5	1	0,09

ИС=0

C_8	D_1	D_2	D_3	Собственный вектор
D_1	1	5	3	0,64
D_2	1/5	1	1/3	0,11
D_3	1/3	3	1	0,26

ИС=0,02

C_9	D_1	D_2	D_3	Собственный вектор
D_1	1	5	9	0,73
D_2	1/5	1	5	0,21
D_3	1/8	1/5	1	0,06

ИС=0,07

C_{10}	D_1	D_2	D_3	Собственный вектор
D_1	1	3	7	0,64
D_2	1/3	1	6	0,29
D_3	1/7	1/6	1	0,07

ИС=0,05

C_{11}	D_1	D_2	D_3	Собственный вектор
D_1	1	6	1/5	0,27
D_2	1/6	1	1/3	0,10
D_3	5	3	1	0,63

ИС=0,31

Отношение согласованности для всей иерархии выгод меньше 0,1 (хороший результат). Слабая согласованность в последней матрице не влияет на окончательный результат из-за низкого приоритета C_{11}.

A^0	B_1^0	B_2^0	B_3^0	Собственный вектор
B_1	1	5	7	0,74
B_2	1/5	1	2	0,17
B_3	1/7	1/2	1	0,09

ИС=0,01

B_1^0	C_1^0	C_2^0	C_3^0	Собственный вектор
C_1^0	1	7	9	0,77
C_2^0	1/7	1	5	0,17
C_3^0	1/9	1/5	1	0,06

ИС=0,1

B_2^0	C_4^0	C_5^0	C_6^0	Собственный вектор
C_4^0	1	1/3	1/5	0,11
C_5^0	3	1	1/5	0,26
C_6^0	5	5	1	0,64

ИС=0,02

B_3^0	C_7^0	C_8^0	C_9^0	Собственный вектор
C_7^0	1	3	4	0,62
C_8^0	1/3	1	1/3	0,13
C_9^0	1/4	3	1	0,25

ИС=0,11

C_1^0	D_1^0	D_2^0	D_3^0	Собственный вектор
D_1^0	1	1/3	8	0,30
D_2^0	3	1	9	0,65
D_3^0	1/8	1/9	1	0,05

ИС=0,05

C_2^0	D_1^0	D_2^0	D_3^0	Собственный вектор
D_1^0	1	1/3	8	0,30
D_2^0	3	1	9	0,65
D_3^0	1/8	1/9	1	0,05

ИС=0,05

C_3^0	D_1^0	D_2^0	D_3^0	Собственный вектор
D_1^0	1	1	9	0,47
D_2^0	1	1	9	0,47
D_3^0	1/9	1/9	1	0,05

ИС=0

C_4^0	D_1^0	D_2^0	D_3^0	Собственный вектор
D_1^0	1	4	9	0,69
D_2^0	1/4	1	8	0,26
D_3^0	1/9	1/8	1	0,05

ИС=0,09

C_5^0	D_1^0	D_2^0	D_3^0	Собственный вектор
D_1^0	1	1	9	0,47
D_2^0	1	1	9	0,47
D_3^0	1/9	1/9	1	0,05

ИС=0

C_6^0	D_1^0	D_2^0	D_3^0	Собственный вектор
D_1^0	1	1	9	0,47
D_2^0	1	1	9	0,47
D_3^0	1/9	1/9	1	0,05

ИС=0

C_7^0	D_1^0	D_2^0	D_3^0	Собственный вектор
D_1^0	1	3	8	0,69
D_2^0	1/3	1	6	0,29
D_3^0	1/8	1/6	1	0,05

ИС=0,04

C_8^0	D_1^0	D_2^0	D_3^0	Собственный вектор
D_1^0	1	3	7	0,65
D_2^0	1/3	1	5	0,28
D_3^0	1/7	1/5	1	0,07

ИС=0,03

C_9^0	D_1^0	D_2^0	D_3^0	Собственный вектор
D_1^0	1	1/6	7	0,21
D_2^0	6	1	8	0,73
D_3^0	1/7	1/8	1	0,05

ИС=0,16

Отношение согласованности для всей иерархии издержек меньше 0,1 (хороший результат).

Пример 5.2. Реализация и отсрочка проекта

Допустим, что с помощью процедуры определения приоритетов для группы проектов получен следующий вектор приоритетов (второй столбец), основанный на иерархическом анализе воздействий, и что стоимость реализации этих проектов соответствует данным третьего столбца.

Проекты	Приоритеты	Стоимость в долларах	Отношение приоритета к стоимости	Приоритеты реализации
A	0,21	10000	$0{,}21 \times 10^{-4}$	3
B	0,07	100	7×10^{-4}	1
C	0,42	70000	$0{,}06 \times 10^{-4}$	4
D	0,30	6000	$0{,}50 \times 10^{-4}$	2

В четвертом столбце даны отношения приоритетов к издержкам, а в пятом указан предлагаемый порядок приоритета реализации, соответствующий этому отношению в случае, когда ресурсы ограничены и желательно развивать проекты по-новому. Отметим, что проект B с низшим приоритетом имеет наивысший показатель, однако проект D со сравнительно высоким приоритетом имеет второй по порядку показатель. Для этого распределения не нужно принимать во внимание наличие ограничений, если эти ограничения можно включить в процесс установления приоритетов для проектов. Если ресурсы ограничены, например величиной 72000 долларов, и частичная реализация проекта не является успешным предприятием, то распределение ресурсов может быть критичным. При невозможности занять деньги на проект C с высоким приоритетом, он может быть отсрочен до тех пор, пока не будет получена соответствующая отдача от других проектов.

Пример 5.3. Размещение при ограничениях

Какова рациональная основа распределения топлива для удовлетворения спроса на энергию при условии ограниченной подачи энергии? Это задача, которой мы собираемся сейчас заняться.

Ясно, что если дефицит невелик, соответствующее малое сокращение поставки топлива потребителям может быть сделано, в общем, без неблагоприятных последствий. Следовательно, незначительные сокращения не вызовут больших трудностей.

Теперь предположим, что дефицит достаточно велик, так что соответствующая нехватка причинит вред потребителю. Например, определенным видам производства требуются пороговое количество энергии, ниже которого они не будут работать. В этом случае промышленность должна или перестроиться и снизить производственную активность, если это возможно, или вынуждена прекратить работу. Альтернативным может быть распределение топлива с учетом того, что некоторые виды деятельности существенны для общества и им следует выделить требуемую долю топлива, в то время как другим придется прекратить работу. Следовательно, задача состоит в решении вопросов назначения приоритетов и взаимозависимости. Изучение приоритетов необходимо для решения того, какие виды деятельности должны быть первоочередными. Учет взаимозависимости необходим для обеспечения видов деятельности с наивысшими приоритетами требуемым количеством продукции некоторых видов деятельности с низким приоритетом, поскольку, если последние не поставят необходимую продукцию из-за нехватки топлива, то это нанесет косвенный удар видам деятельности с высоким приоритетом.

Наша задача – определить целевую функцию, коэффициентами которой являются приоритеты рассматриваемых видов деятельности, а переменными – объемы топлива, которые нужно распределить по соответствующим видам деятельности. Затем максимизировать эту целевую функцию при ограничениях типа «вход–выход», которые позволяют учитывать взаимозависимость между видами деятельности.

Таким образом, общая модель распределения требует максимизации производительности в соответствии с приоритетом (где целевая функция имеет коэффициенты в виде приоритетов, а не издержек) при ограниченных ресурсах и ограничениях типа «вход – выход». Эта модель имеет вид: найти такие $x_i \geq 0$, чтобы максимизировать

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i \,,$$

и при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i x_i \leq R \,, \tag{5.1}$$

$$\gamma_i x_i \leq R_i \,,\ \left(i = 1, 2, \ldots, m\right), \tag{5.2}$$

и

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + y_i \leq x_i \,,\ \left(i = 1, 2, \ldots, m\right), \tag{5.3}$$

где все переменные и коэффициенты неотрицательны; x_i – общая продукция вида деятельности i (соответственно выражается в Деньгах); y_i – конечная продукция i-го вида деятельности (т. е. не потребляемая другими отраслями для дальнейшего производства); a_{ij} – промежуточная продукция (в долларах) вида деятельности i, требуемая для выпуска единицы (в денежных измерениях) продукции вида деятельности j; ω_i – приоритет i-го вида деятельности, R – общее количество имеющихся ресурсов, R_i – количество ресурса, необходимое для i-го вида деятельности $\left(\Sigma R_i \geq R\right)$ и γ_i – количество ресурса, необходимое для единицы выходной продукции i-го вида деятельности.

Отметим, что ограничения (5.1) и (5.2) связаны с распределением ресурсов. Дополнительные ограничения (5.3) показывают структурную взаимозависимость видов деятельности. Используя параметрическое программирование, пространство приоритетов ω_i складывается в мозаику выпуклых ячеек. С каждой ячейкой ассоциируется вершина многогранника ограничений, соответствующая решению задачи. Интересно отметить, что двойственная задача включает минимизацию целевой функции, коэффициентами которой являются y_i (конечная продукция). Отсюда следует, что изменения в ω_i, позволяют исследовать это воздействие на продукцию потребления y_i. В частности, определить более реальное решение, соответствующее изменениям в приоритетах. Поэтому приоритеты не надо считать сами собой разумеющимися.

Пусть для задачи распределения энергии приоритеты трех отраслей промышленности C_1, C_2, C_3 в соответствии с их вкладом в экономику, национальную оборону и защиту окружающей среды, равны $\omega_1 = 0{,}55$; $\omega_2 = 0{,}24$; $\omega_3 = 0{,}21$. Допустим, что задана следующая гипотетическая матрица взаимозависимости:

$$\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1{,}09730 & 0{,}22680 & 0{,}19020 \\ 0{,}07990 & 1{,}06570 & 0{,}06010 \\ 0{,}03950 & 0{,}33210 & 1{,}20719 \end{bmatrix} \end{array}$$

В этом примере непосредственно не использованы ограничения типа «вход–выход». Вместо этого умножим коэффициент в позиции (i, j) верхней матрицы на ω_i и ω_j (ω_i – приоритет производящей отрасли C_i, а ω_j – приоритет потребляющей отрасли C_j) и получим новую матрицу коэффициентов, каждый из которых взвешен в соответствии с приоритетами производителя и потребителя. Затем берём сумму по каждой строке и, таким образом, получаем вектор

$$\beta = \begin{bmatrix} 0{,}38659 \\ 0{,}07280 \\ 0{,}07523 \end{bmatrix}.$$

Допустим, что имеется следующая потребность в энергии R_i (в триллионах БТЕ*) трех потребителей:

Отрасль C_i	Потребность в энергии R_i	R_i / R^0
C_1	4616	0,30893
C_2	7029	0,47042
C_3	3297	0,22065
Общая потребность	$R^0 = 14942$	

Допустим также, что имеется дефицит энергии, общее количество которой $R = 12000$ БТЕ. Имеем следующую задачу линейного программирования:

максимизировать

$$z = 0{,}38659 z_1 + 0{,}0728 z_2 + 0{,}07523 z_3$$

(здесь коэффициенты – соответствующие элементы вектора β), при ограничениях

$$0 \le z_1 \le 0{,}38467,$$

$$0 \le z_2 \le 0{,}58575,$$

$$0 \le z_3 \le 0{,}27475,$$

в которых величины в правых частях неравенств соответственно равны $R_i / R(i = 1, 2, 3)$. Кроме того,

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1$$

Оптимальное распределение будет:

$$z_1 = 0{,}38467,$$

$$z_2 = 0{,}34058,$$

$$z_3 = 0{,}27475,$$

* БТЕ– британская тепловая единица, равная 0,252 большой калории.– *Прим. перев.*

Следовательно, только C_2 не получает полной потребности, так как 0,58575 > 0,34058.

Лицо, принимающее решение, может использовать это распределение только как индикатор, показывающий, какую из отраслей нужно нормировать, и сравнить его с другой информацией, используемой для распределения.

Идеи этого примера были заложены в реальную задачу нормирования электроэнергии, показывающую дефицит электроэнергии (частичный или полный) для некоторых видов деятельности (см. [137]).

5.7. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СУЖДЕНИЯ

Анализ задачи нахождения собственного вектора проведен при допусках в суждениях вероятностных оценок. Получается, что гамма-распределение – удобный способ воспроизводства этих оценок в суждениях. Как результат при решении в согласованном случае компоненты собственного вектора при ограничениях нормализации имеют распределение Дирихле. Распределение для общего случая обратносимметричных матриц определить трудно. Однако имеются результаты для матрицы третьего порядка.

ГЛАВА 6

ПЛАНИРОВАНИЕ, РАЗРЕШЕНИЕ КОНФЛИКТОВ И ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе представлены некоторые приложения. Часть этих приложений взята из реальных ситуаций по принятию решений. Другие даны для иллюстрации разнообразия, в частности, чтобы показать, как можно применить метод при сильно расходящихся целях. Все примеры сильно сокращены ради экономии места и увеличения их числа. Исследование только по Судану состоит из 1700 страниц.

В целях экономии места элементы каждой иерархии не определялись подробно. Тем не менее, примеры достаточно ясны для того, чтобы читатель понял сущность задачи и полученное иерархическое представление. Кроме того, включена только часть матриц для иллюстрации идеи или обеспечения возможности сравнения своих суждений с некоторыми примерами и включения в процесс.

При анализе большинства этих приложений могут возникнуть различные непредвиденные обстоятельства, каждое с некоторой долей риска. Поэтому при оценке вероятных исходов полезно на втором уровне иерархии составить перечень различных непредвиденных случаев, чтобы получить сбалансированную оценку наиболее вероятного будущего. Для многих задач использование сценариев планирования на втором уровне является одним из способов учета непредвиденных обстоятельств при планировании. Так мы поступили в приложении, осуществленном при построении транспортной системы Судана в 1985 г.

Глава начинается с двух приложений. Первое связано с определением приоритетов ресурсов, второе – с влиянием в мире. Затем обсуждаются планирование и разрешение конфликтов, иллюстрирующие систематическое использование МАИ в этих сферах.

6.2. ИНТЕГРИРОВАННОЕ НАХОЖДЕНИЕ ПРИОРИТЕТОВ РЕСУРСОВ ДЛЯ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ СТРАНЫ

Метод анализа иерархий был применен для общей оценки приоритетов как семи наиболее важных полезных ископаемых, обнаруженных в развивающейся стране, так и шести критериев, связанных с ними. Это было проделано с тем, чтобы и существующий и будущий потенциалы могли быть приняты во внимание при формировании стратегии добычи полезных ископаемых.

Иерархия имеет структуру, изображенную на рис. 6.1. Критерии определяются следующим образом. *Величина ресурса* – это потенциальные затраты (в денежном выражении) на разработку в стране отдельного полезного ископаемого, соразмерные с проектируемыми для целого региона континента. В пределах этого региона существуют зоны, для которых возможность добычи полезных ископаемых подтверждается документально. Вычисление потенциала в стране основано на этих материалах. Временное запаздывание добычи залежей по сравнению со сводками данных обосновывает то, что обнаруженные руды и их извлечение могут быть большими. *Стоимость добычи* – это оценочная стоимость добычи полезных ископаемых наземными и подземными службами, включая бурение, лабораторный анализ и побочные расходы. *Риск* – это мера потенциального успеха обнаружения залежей полезных ископаемых в предполагаемом количестве. Риск мал при повышении цены и спроса. *Спрос* – мера предполагаемого спроса и предложения. Широко ли потребляется полезное ископаемое при низком спросе или оно мало распространено и на него есть спрос? *Стратегические соображения* – выбор этого критерия основан на двух факторах.

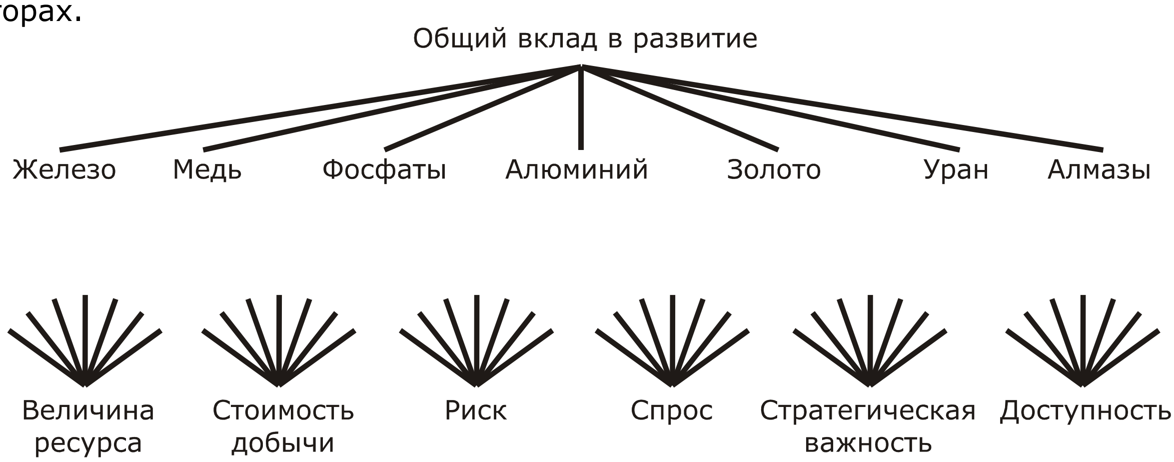


Рис.6.1

1. Роль, которую полезное ископаемое может играть, способствуя развитию мировых энергетических ресурсов, или в качестве средства для достижения политических целей. Железная руда, например, будучи жизненно необходимой, считается стратегическим ресурсом. С другой стороны, уран, который еще не добывается, следует рассматривать как стратегический ресурс для региона в целом, хотя и не обязательно для страны.

2. Возможность того, что страна станет одним из поставщиков материала, который Соединенные Штаты или другие развитые страны считают стратегическим.

Доступность – доступно то полезное ископаемое, источник которого находится вблизи транспортного пути. Недоступным является полезное ископаемое, источник которого находится в безлюдной местности и разработка которого может быть экономически невыгодной.

Ставился следующий вопрос: как сильно превосходит одно полезное ископаемое другое в плане промышленно-экономического развития, исходя из оценок его запасов? Затем шесть критериев сравнивались в соответствии с их важностью по отношению к каждому из семи полезных ископаемых. Здесь ставился вопрос (для каждого полезного ископаемого): насколько выше важность одного критерия по отношению к другому с точки зрения разработки полезного ископаемого?

Все приоритеты даны в табл. 6.1, 6.2, 6.3.

Таблица 6.1. Приоритеты полезных ископаемых

Железо	Медь	Фосфаты	Уран	Алюминий	Золото	Алмазы
0,40	0,26	0,15	0,09	0,04	0,04	0,02

Таблица 6.2. Приоритеты критериев

	Железо	Медь	Фосфаты	Уран	Алюминий	Золото	Алмазы
Величина ресурса	0,44	0,41	0,44	0,34	0,33	0,18	0,13
Стоимость добычи	0,05	0,15	0,08	0,03	0,11	0,21	0,15
Риск	0,05	0,03	0,07	0,05	0,34	0,26	0,50
Спрос	0,13	0,20	0,23	0,15	0,07	0,07	0,04
Стратегическая важность	0,26	0,16	0,11	0,29	0,04	0,03	0,04
Доступность	0,07	0,05	0,07	0,14	0,11	0,25	0,14

Таблица 6.3. Обобщённые веса для всех критериев

	Железо	Медь	Фос-фаты	Уран	Алю-миний	Золото	Алма-зы	Обобщён-ные веса
Величина ресурса	0,18	0,11	0,07	0,03	0,01	0,007	0,002	0,40
Стоимость добычи	0,02	0,04	0,01	0,003	0,004	0,008	0,003	0,09
Риск	0,02	0,008	0,01	0,004	0,014	0,01	0,01	0,08
Спрос	0,95	0,05	0,034	0,014	0,003	0,003	0,001	0,16
Стратегическая важность	0,10	0,04	0,017	0,03	0,002	0,001	0,003	0,19
Доступность	0,03	0,013	0,01	0,01	0,004	0,01	0,003	0,08

Поясним эти результаты. Имеющиеся оценки показывают, что железо и медь вместе составляют две трети факторов проектируемого будущего воздействия полезных ископаемых на экономику. Роль фосфатов повышается до заслуживающего внимания уровня 15%. Влияние каждого отдельно взятого из оставшихся полезных ископаемых представляется незначительным, однако вместе взятые они оказывают влияние на экономику до 20%.

Теперь рассмотрим критерии. Относительная величина ресурса первых четырех полезных ископаемых выше, чем для любого другого критерия. Для алюминия, золота и алмазов имеющийся риск более значимый, чем величина ресурса, что и следовало ожидать, так как еще сделано мало попыток изучения запасов этих минералов. Например, оценки величины ресурса для алмазов 0,13 примерно в 4 раза меньше значения риска – 0,50. Вдобавок спрос на эти минералы, как это представляется в настоящее время, может быть небольшим. Проектируемый относительный спрос на фосфаты представляется наибольшим среди всех полезных ископаемых из-за их значения для сельского хозяйства – наиболее интенсивного вида деятельности в мире.

Ряд составных весов показывает, что общая польза от ресурсов: их значение, стратегическая важность и доступность, – намного компенсирует отрицательные критерии стоимости добычи и риска с коэффициентом 67/17, или приблизительно 4/1. Практически это говорит о том, что страна должна делать все возможное для выявления своего потенциала ресурсов и будущего своей экономики, основываясь на проектируемых изменениях спроса и цены на полезные ископаемые и их наличия в других регионах мира.

Проектируемые ресурсы в основном определяются железом, затем медью и ураном. Стоимость добычи низка для всех полезных ископаемых по сравнению с величиной их ресурса и выше всего для меди, затем для железа и фосфата. Убыток от риска наибольший для железа и наименьший для меди. Проектируемый спрос почти равен для железа и меди, за ними следуют фосфаты. Стратегическая важность железа для страны намного превосходит аналогичный показатель других полезных ископаемых, среди которых выделяется медь. Доступность наибольшая у железа, за которым следуют медь, уран и фосфаты.

В настоящее время несомненно можно пренебречь добычей других полезных ископаемых.

6.3. МЕРА ВЛИЯНИЯ В МИРЕ

Обычно о силе думают и пишут без соответствующего определения. Причина этого становится ясной, если посмотреть в Оксфордский словарь английского языка. Сила настолько богатое понятие, что даже при специальном использовании оно несет в себе большее значение, чем мы намереваемся в него вложить. Сила непосредственно отождествляется со способностью сделать что-нибудь [10]. Влияние является свойством склонить других получить благоприятные итоги при реализации (собственных) целей. Влияние соответственно значительно увеличивается в зависимости от потенциального использования определенных форм силы при достижении целей.

В [10] указано, что трудность определения силы связана с отсутствием согласия в политике о том, у кого есть сила и насколько она велика. К. Кнорр проводит строгие различия между предполагаемой силой (способностью создавать эффективные угрозы) и реализованной силой (действительно достигнутым влиянием). Оба понятия отражают часть реальности. Примеры и того и другого можно найти в военной, экономической, расовой, политической, целебной силах, покупательной способности и т. д. Г. Саймон (см. [10]) усматривает в своем определении силы асимметричеcкое отношение между тем, кто влияет, и тем, на кого влияют, и выводит принципиальное заключение относительно измерения силы, заключающееся в том, что кроме количественных оценок следует использовать много других видов измерений.

Р. Даль [10] приводит интересное замечание, что «...основная задача не в определении существования силы, а в проведении сравнений». Это в точности соответствует тому, чем мы занимаемся в данной работе. В некотором роде уместно для нашего подхода и следующее наблюдение: Дж. Г. Стоезингер [159] пишет, что «...образ ситуации в мире, который создали высшие вершители политики и приняли в качестве цели в собственных умах, более важен, чем любой другой образ, включая и правильный». Наша концепция влияния [136] имеет общее с определением силы Кнорра. Влияние выводится из продемонстрированных прошлых действий и приписываемой способности внести эффективный вклад в решение задачи при наличии благоприятной возможности ее решения.

Далее разрабатывается общий показатель силы для семи стран, обобщающий отдельные показатели, основанные на пяти свойствах, относительно которых сравниваются страны. Сами свойства сравниваются относительно их воспринимаемого воздействия в мире, результат используется для взвешивания каждого из предыдущих пяти показателей и затем получается составной индекс общей силы.

Мера влияния выводится из следующих факторов, относящихся к каждой из стран: человеческие ресурсы, мощность экономики (называемая благосостоянием), технология, торговля и военная мощь. Другие факторы, такие как политика, общественная стабильность, культура и связь не были включены, хотя они могут быть добавлены без труда.

Под влиянием страны посредством ее человеческих ресурсов имеют в виду потенциальную способность страны мобилизовать население для выполнения задач, затрагивающих остальной мир, либо производить насущную продукцию, такую как продукты питания, машины, лекарственные средства, или, в более общем виде, важные идеи, которые могли бы внести вклад в решение больших мировых проблем.

Экономическое влияние подразумевает общее производство товаров и услуг страной, в частности, отражающееся на жизненном уровне, способность поддерживать рост, поддержку и развитие новых идей и технологий, а также способность оказывать экономическую помощь другим странам.

Технология является уровнем научного и технического прогресса, достигнутого страной, включая организационные и управленческие способности, вместе со способностью поддерживать значительные темпы технологического развития.

Под торговлей понимается величина, характер и структура экономических отношений страны с остальным миром, включая сложившиеся торговые отношения с другими странами.

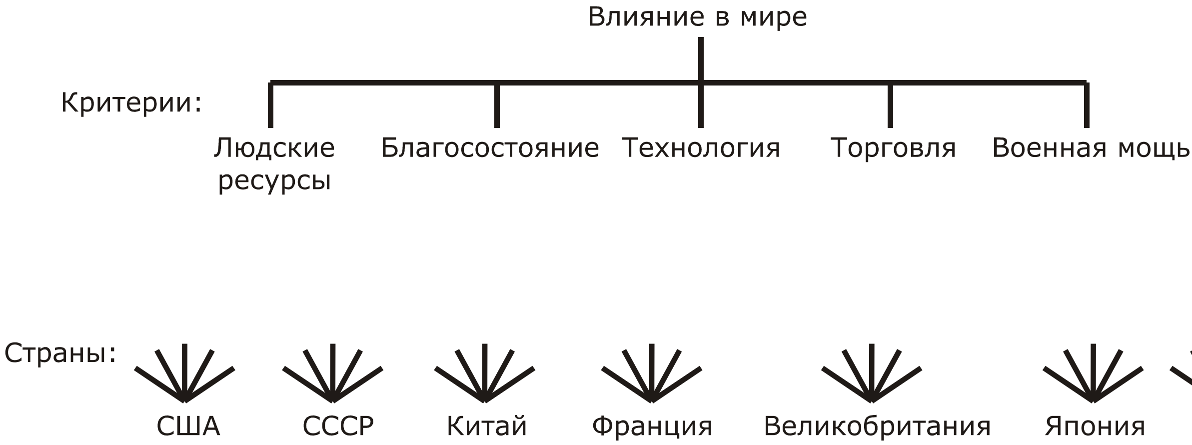


Рис. 6.2

Военная мощь есть количество оружия (особенно ядерного) и личного состава, степень мобильности и сила военных союзов, в которые входит страна.

Семью странами (исследование проводилось в 1973 г.) были США, СССР, Китай, Франция, Великобритания, Япония и ФРГ. Здесь мы имеем иерархию, на низшем уровне которой расположены семь стран. Этот уровень доминируется уровнем, состоящим из пяти показателей, описанных выше, в свою очередь этот уровень доминируется уровнем с одним элементом – «влияние в мире» (см. рис. 6.2.).

Матрица парных сравнений для оценки вклада семи стран во влияние в мире через их национальные богатства рассматривалась в гл. 2. Четыре других матрицы и матрица критериев здесь не будут представлены (см. [136]). Итоговые собственные векторы и обобщенные веса показаны в табл. 6.4 и 6.5.

Таблица 6.4. Нормализованные собственные векторы, соответствующие пяти критериям

	Человеческие ресурсы	Благосостояние	Торговля	Технология	Военная мощь	Приоритеты критериев	
США	0,339	0,429	0,332	0,458	0,443	Челов. ресурсы	0,043
СССР	0,123	0,231	0,042	0,068	0,304	Благосостояние	0,393
Китай	0,057	0,021	0,020	0,018	0,070	Торговля	0,228
Франция	0,134	0,053	0,089	0,109	0,072	Технология	0,136
Великобритания	0,116	0,053	0,070	0,109	0,068	Военная мощь	0,199
Япония	0,116	0,119	0,239	0,119	0,021		
ФРГ	0,155	0,095	0,209	0,119	0,021		
$\lambda_{\max}$ =	7,023	7,608	7,968	7,424	7,576		5,187
ИС=	0,003	0,101	0,161	0,071	0,096		0,047
ОС=	0,002	0,077	0,122	0,054	0,073		0,042

Таблица 6.5. Взвешенный результат как относительная мера влияния в мире (1973)

США	СССР	Китай	Франция	Великобритания	Япония	ФРГ
0,409	0,175	0,032	0,076	0,070	0,127	0,112

Теперь сравним полученные результаты с экспериментальной работой по силе и ее измерении, проведенной Шинном [148]. В предположении, что восприятия являются необходимыми факторами человеческого действия, Шинн использовал модель в виде степенной функции (см. [153]) для получения единственного показателя для измерения силы. Он пытался оценить восприятие мощи страны P, которое было у студентов после слушания двух курсов по международной политике, задавая вопросы и классифицируя ответы с использованием величин оценок. Он выразил мощь одним выражением в зависимости от численности населения страны, уровня ее экономического развития, выраженного в ее ВНП, и ресурсов, выделенных на военные цели. Им была получена формула

$$P = 0{,}37\left(Население\right)^{0{,}41}\left(ВНП\right)^{0{,}62}\left(Воен.\right)^{0{,}28}.$$

Шинн отмечает, что это выражение достаточно хорошо объясняет более 96% наблюдаемых колебаний данных (от средних, взятых по всем субъектам), предполагая, что эти колебания между индивидуумами соответствуют случайным ошибкам измерений.

Таблица 6.6

Страна	Численность населения, млн. чел.	ВНП, млрд. дол	Расходы на оборону, млрд. дол.	Нормированный индекс с использованием формулы Шинна	Индекс силы по нормированному собственному вектору
США	21	1167	85,2	0,435	0,426
СССР	242	635	65,8	0,294	0,246
Китай	800	120	4,5	0,081	0,039
Франция	50	196	8,5	0,042	0,064
Великобритания	46	154	8,7	0,035	0,062
Япония	105	294	3,5	0,057	0,088
ФРГ	59	257	11,1	0,057	0,076

В табл. 6.6 дана информация о населении (в млн. чел.), ВНП и расходах на оборону (в млрд. долл.), которая была введена в формулу Шинна. Полученные результаты были нормализованы для получения относительного показателя мощи, который сравнивается с соответствующим относительным показателем, полученным методом собственного значения с использованием факторов человеческих ресурсов, национальных богатств и военной силы.

Стоит отметить, что хотя Шинн при всех обстоятельствах считает численность населения ценным качеством, мы не думаем так. Например, очень высокая численность населения Китая является в некоторой степени помехой, так как в настоящее время его трудно прокормить и эффективно мобилизовать для выполнения целей. Это наблюдение, наряду с тем фактором, что расходы на вооружение не учитывают несоответствие в мощи благодаря ядерному оружию, может объяснить некоторые отклонения между двумя результатами. Сомнительно, что Япония и ФРГ и даже Англия с Францией ставились сегодня рангом ниже Китая по шкале мощи. В любом случае цифры в обоих шкалах не очень отличаются. Конечно, они могут быть одинаково неверными, однако то, что они были получены независимо, в разное время и разными методами, делает их близость удивительно интересной.

6.4. ПРОЦЕССЫ С ДВУХТОЧЕЧНЫМ ГРАНИЧНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ: ПЛАНИРОВАНИЕ ОТ ДОСТИГНУТОГО И ПЛАНИРОВАНИЕ ОТ КОНЕЧНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Планирование является динамической и целенаправленной деятельностью, связанной с направлением усилий на приведение систем из возможных состояний в желательное. Возможный исход является результатом реализации сценария или состояния систем, определяемым существующим состоянием и действующими силами, которые преследуют свои цели, политику и индивидуальные исходы. Оценка вероятного будущего называется *планированием от достигнутого*. Это процесс описания того, что может случиться. Желательный исход достигается посредством избрания линии поведения, влияющей на действующие силы с целью удаления помех по пути к этому исходу. Этот процесс называется *планированием от конечного результата*. Эта нормативный или декларативный процесс. Эффективность изменения целен или новые линии поведения проверяются с помощью процесса планирования от достигнутого, который позволяет увидеть, насколько результаты в будущем близки к желаемым. В противном случае цели, политика и даже желаемые в будущем результаты изменяются для достижения большего успеха. Проводится несколько итераций планирования от достигнутого и планирования от конечного результата с учетом требуемых видоизменений. Таким образом, процесс с двухточечным граничным значением приходит к искомому сближением возможного и желаемого будущего.

Та же самая процедура может быть использована и для получения устойчивых исходов в конфликтной ситуации. Разрешение конфликтов связано с улучшением положения каждой из сторон при переходе от существующего состояния к желательному. При итерациях нужно учитывать имеющиеся линии поведения каждой стороны одновременно с ограничениями, накладываемыми на них.

Хотя при планировании, которое является контролируемым процессом, могут быть использованы описанные выше итерации, другие аспекты планирования могут просто включать исследование прямого или обратного процесса. После краткого обсуждения сценариев мы проиллюстрируем на примерах прямой, обратный и объединённые процессы.

Сценарий является описанием определенной идеи или рассматриваемого объекта (например, транспортной системы) вместе с адекватной оценкой взаимодействий с факторами окружающей среды, а также социальными, политическими, технологическими и экономическими. Отсюда следует, что внушающий доверие анализ сценария должен достаточно глубоко выявлять влияние всех этих факторов с целью достижения убедительного описания состояния отдельного объекта при различных возможных предположениях. При построении сценариев следует избегать чрезмерных полетов воображения и не впадать в прогнозирование, следуя образцам научной фантастики.

Имеются два сценария общего типа:

1. *Поисковый сценарий.* Идея состоит в исследовании ряда сценариев, выявляющих тенденции альтернативных вариантов будущего. Путем параметризации основных компонент изучаемой системы происходит проверка того, какие из событий являются логически необходимыми для достижения возможных вариантов будущего. Начинаем с исходного момента времени. Посредством вариации параметров, тщательной проверки гипотез развития строятся предельные сценарии и сценарии, которые выявляют тенденции, ограничивающие варианты возможного будущего. Поисковый сценарий часто применяется в качестве средства формирования воображения, стимуляции обсуждения и привлечения внимания лиц, принимающих решения, к определению возможных результатов. Сценарии, выявляющие тенденцию, не применяют ни теории, ни методологии. Хотя практики не относятся с большим доверием к получаемым результатам, они признают, что эти результаты не хуже результатов, полученных другими методами.

2. *Предваряющий сценарий.* Этот подход связан с концептуализацией допустимых и желательных вариантов будущего. В отличие от поискового сценария, который описывает события от настоящего к будущему, предваряющий сценарий идет обратным путем, начиная с будущего по направлению к.настоящему, чтобы определить альтернативы и действия (коррекции траекторий), необходимые для достижения этого будущего. Имеются предваряющие сценарии двух типов: а) *нормативный сценарий*, который определяет в плане множество заданных целей, подлежащих реализации, и затем путь их реализации (один из способов – сформулировать цели и найти технически допустимые средства их реализации); б) *контрастный сценарий* приблизительно описывает желаемое и достижимое будущее в пределах, определяемых предваряющим сценарием. Каждый контрастный сценарий очерчивает диапазон предположений, которые все вместе составляют «выпуклую оболочку» возможных будущих вариантов. Нормальные или контрастные сценарии синтезируются в *обобщенный сценарий*, который сохраняет свойства каждого сценария с достаточно хорошей степенью приближения. Так как будущее определяется в результате воздействия различных сил или интересов, каждые из которых стараются реализовать свои собственные цели, при синтезе различных сценариев в обобщенный сценарий должны быть приняты во внимание: акторы, влияющие на будущее, их цели и отдельные линии поведение которых они будут придерживаться для осуществления в каждом сценарии своих целей. Таким образом, нормативный процесс построения обобщенного сценария должен отражать приоритет акторов в соответствии с их важностью, осуществляя с достаточной полнотой части, составляющие каждый сценарий.

Основной технической проблемой при построении сценария является построение обобщенного сценария из обширного множества сценариев, определяющих «конус» будущего.

Ниже приводятся некоторые из наиболее важных компонент построения сценария:

1. Определение общей системы, внешних и внутренних ограничений, а также идентификация подсистем.
2. Построение иерархической структуры подсистем и идентификация регулирующих компонент.
3. Определение состояний системы и моделирование истории ее развития.
4. Рассмотрение развития сценария во времени (исторический анализ) для освещения эволюции системы и влияния на характеристики одновременно с исследованием внутренней динамики модели.
5. Определение целей сценария с обсуждением их значений.
6. Выбор типов используемых сценариев.
7. Разработка основных данных прошлой, настоящей и будущей информации.
8. Идентификация структурных компонент, факторов, обеспечивающих равновесие и тенденции развития системы.
9. Описание трений, присущих функциональным механизмам.
10. Анализ механизмов регулирования в системе и их связей.
11. Критика и пересмотр предыдущего анализа, усовершенствование сценария посредством проверки ограничений, неравновесности, трений, сил, противоречий: вмешательства механизмов регулирования, а также установление противодействий, которые влияют на выживание системы.
12. Создание усовершенствованного сценария.

Возможно, наилучшим ответом на вопрос об обоснованности подхода, связанного с использованием сценария является то, что это единственное средство прогноза будущего, результаты которого могут быть разумно интерпретированы. При применении результатов, полученных сценарным подходом, следует располагать их по классам в зависимости от степени важности и вначале добиваться выполнения наиболее важных проектов, а затем пересмотреть процесс планирования или провести новую итерацию.

6.5. БУДУЩЕЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ В США (1985-2000 гг.): ПЛАНИРОВАНИЕ ОТ ДОСТИГНУТОГО

Этот пример основан на эксперименте, проведенном под руководством автора 28 преподавателями колледжей, специализирующихся в области математических наук, в феврале 1976 г. в школе по исследованию операций и системному подходу. Задача состояла в создании семи взвешенных сценариев и обобщенного сценария, которые могли бы описать будущее высшего образования в США на период 1985–2000 гг. [138].

На рис. 6.3. представлена иерархическая структура, состоящая из факторов, акторов и мотивирующих целей, которые представлялись группе как возможно оказывающие влияние на систему высшего образования в период между 1985 и 2000 годами. Строгого объяснения различных терминов не дается, хотя во время обсуждения, которое заняло около девяти часов, и был выяснен смысл каждого из них.

Предложено семь сценариев:

1. Проекция. Проекция настоящего (1976 г.) на 1985 г. с учетом незначительных изменений.
2. Навыки. Ориентация на приобретение профессиональных навыков.
3. Все. Образование для всех (субсидирование образования).
4. Элита. Образование для избранных (для тех, у кого есть деньги или исключительные способности).
5. Власти. Отсутствие частных вузов (все субсидируются властями).
6. Техника. Ориентация на применение современных средств обучения (занятия по телевизору, компьютеру).
7. Обучение, В вузах не ведутся научные исследования, акцент только на обучение.

Градуировка рассматриваемых характеристик в соответствии с различными сценариями приведена в табл. 6.7. Шкала градуирована в целых числах от –5 до 5 (границы этой шкалы позже были изменены на [–8,8] для приведения в соответствии со шкалой отношений от 1 до 9)*. К этим измерениям пришли путем достижения консенсуса.

Ноль соответствует сохранению существующего положения (по мнению группы). Положительные целые числа показывают различные степени «увеличения» или «больше, чем теперь»; отрицательные – «уменьшение» или «меньше, чем теперь». Например, для вузов характеристика «управления» в шестом сценарии принимает значение 5. Это означает предположение группой, что будет значительно большая степень административного контроля по сравнению с теперешним положением в системе высшего образования, ориентированного на широкое применение технических средств в 1985 г. и после. Если же, например, реализуется третий сценарий (образование для всех), то значимость научной степени в системе образования значительно уменьшится (–2) по сравнению с сегодняшним состоянием. Строка «веса сценариев» и столбец «обобщенный вес» заполняется в процессе обсуждения, и поэтому в данный момент не будем обращать на них внимания.

---

* В 1989 г. Т. Саати предложил заменить шкалу разностей на шкалу отношений (см. Дополнение к книге Т. Саати и К. Кернса «Аналитическое планирование»/ Пер. с англ. под ред. И. А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1991). – *Прим. перев.*

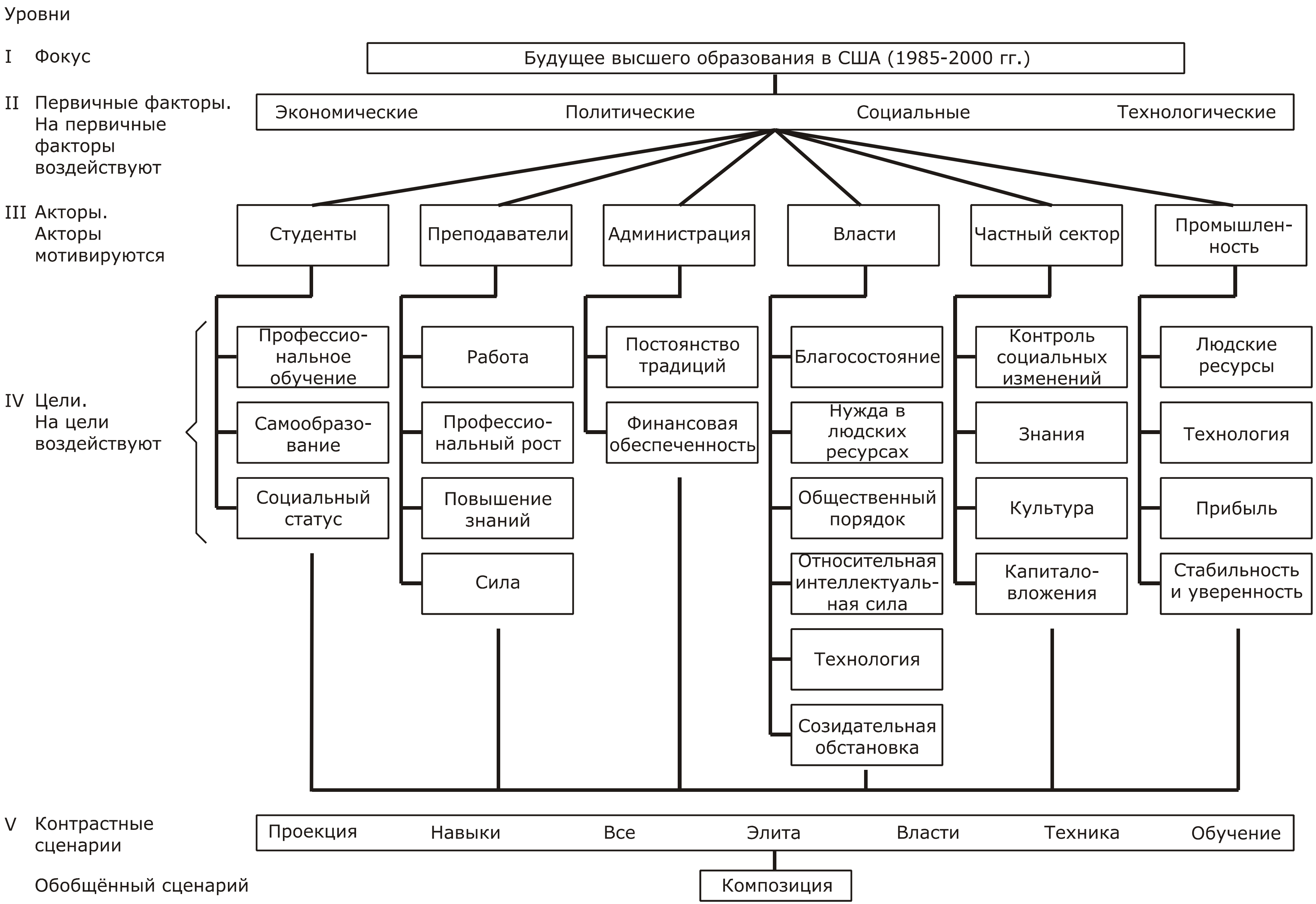


Рис. 6.3. Иерархия влияний на высшее образование

Таблица 6.7. Семь сценариев и градуировка их характеристик по шкале –5…+5

Веса сценариев Характеристики	0.096 1 Проек-ция	0.259 2 Навыки	0.191 3 Вес	0.174 4 Элита	0.122 5 Власти	0.068 6 Техни-ка	0.081 7 Обуче-ние	Обобщён-ный вес
Студенты								
Численность	−2	+2	+4	−3	−1	+2	−2	0,42
Тип	−1	−2	−3	+3	−1	−2	−1	1,00
Функции	+1	−1	0	+1	0	−2	+2	0,03
Работа	+1	+4	−3	+4	+1	−2	+1	1,32
Преподаватели								
Численность	−2	+2	+4	−3	−1	−5	−4	−0,22
Тип	+1	0	−2	+3	+1	+2	−3	0,25
Функции	−2	−3	−2	+1	−2	−5	−5	−2,12
Обеспеченность работой	−2	+1	+2	−3	−1	−4	−4	−0,79
Академическая свобода	0	−2	0	+2	−1	−4	−5	−0,97
Учебные заведения								
Число	−1	+2	+2	−3	−1	−4	−1	−0,19
Тип	−1	−4	−3	+3	−1	−3	−3	−1,75
Управляющая структура	+2	+4	+1	−2	+2	+5	+5	2,06
Эффективность	+2	+3	−2	+4	−1	−1	0	1,09
Доступность	0	+2	+5	−3	+2	+4	+1	1,55
Культура и досуг	0	−2	+3	+3	+1	−3	−1	0,41
Денежные средства	−1	+2	+2	−2	0	−1	−3	0,64
Образование								
Учебная программа	+1	−2	+2	+3	+1	0	−1	0,50
Продолжительность обучения	0	−3	+2	0	+1	+2	0	−0,14
Ценность учёной степени	−1	0	−2	+4	−1	−2	−2	−0,20
Стоимость обучения	+3	+3	+3	+4	+2	−1	−1	2,43
Исследования, проводимые преподавателями	+1	−1	−1	+3	+1	−3	−4	0,24

Вначале была построена матрица парных сравнений относительно влияния факторов на высшее образование. Следующим этапом было нахождение важности акторов относительно факторов, влияющих на высшее образование. Это осуществляется путем умножения справа матрицы собственных векторов акторов относительно каждого фактора уровня III на собственный вектор, полученный для уровня II.

$$\begin{array}{rc} & \begin{matrix} \textit{Экон.} & \textit{Пол.} & \textit{Соц.} & \textit{Технол.} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textit{Студенты } (С) \\ \textit{Преподаватели } (П) \\ \textit{Администрация } (А) \\ \textit{Власти } (В) \\ \textit{Общество } (О) \\ \textit{Промышленность } (И) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0{,}04 & 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}04 & 0{,}07 & 0{,}10 \\ 0{,}06 & 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}03 \\ 0{,}47 & 0{,}49 & 0{,}41 & 0{,}23 \\ 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}16 \\ 0{,}29 & 0{,}27 & 0{,}26 & 0{,}44 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ \dots \\ 0{,}11 \\ 0{,}24 \\ \dots \\ 0{,}21 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Экон.} \\ \dots \\ \textit{Пол.} \\ \textit{Соц.} \\ \dots \\ \textit{Технол.} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}05 \\ 0{,}05 \\ 0{,}46 \\ 0{,}14 \\ 0{,}34 \end{bmatrix}$$

Так как на власти (В) и промышленность (И) приходится 80% (0,46+0,34) воздействия на четыре основных фактора, влияющих на высшее образование, было решено использовать только эти две действующие стороны для получения весов ––

сценариев. Если использовать больше действующих сторон, то вычислительная процедура будет той же, что и показанная ниже, только возрастет объем вычислений.

Теперь найдем важнейшие цели двух действующих сторон – правительства и промышленности. Для этого умножим собственный вектор целей на соответствующий вес действующих сторон, который был только что вычислен.

Для правительства: $$0{,}46\begin{bmatrix}0{,}20\\0{,}52\\0{,}09\\0{,}11\\0{,}05\\0{,}03\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}09\\0{,}24\\0{,}04\\0{,}05\\0{,}01\\0{,}01\end{bmatrix}\begin{array}{c}\text{Благосостояние}\\\text{Общественный порядок}\\\text{Людские ресурсы}\\\text{Относительная интеллектуальная сила}\\\text{Технология}\\\text{Созидательная обстановка}\end{array}$$

$$0{,}34\begin{bmatrix}0{,}04\\0{,}08\\0{,}33\\0{,}55\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}01\\0{,}03\\0{,}11\\0{,}19\end{bmatrix}\begin{array}{c}\text{Людские ресурсы}\\\text{Технология}\\\text{Прибыль}\\\text{Стабильность и уверенность}\end{array}$$

Отсюда видно, что наиболее влиятельными целями для правительства являются благосостояние и общественный порядок и для промышленности – прибыль вместе со стабильностью и уверенностью. Используя эти четыре цели и нормализуя их веса, получаем вектор весов.

$$\begin{bmatrix}0{,}14\\0{,}38\\0{,}17\\0{,}30\end{bmatrix}\begin{array}{c}\text{Благосостояние}\\\text{Общественный порядок}\\\text{Прибыль}\\\text{Стабильность и уверенность}\end{array}$$

Применим этот вектор для получения весов сценариев. Сценарии были взвешены относительно четырех целей. Для получения весов сценариев умножим матрицу собственных векторов сценариев на вектор весов целей: благосостояние, общественный порядок, прибыль и стабильность и уверенность. Это произведение представляет собой обобщенные веса сценариев.

$$\begin{array}{c}\textit{Сценарий}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\textit{Благ.} & \textit{Общ.П} & \textit{Приб.} & \textit{СиУ}\end{array}\\\begin{bmatrix}0{,}129 & 0{,}125 & 0{,}067 & 0{,}062\\0{,}329 & 0{,}180 & 0{,}309 & 0{,}306\\0{,}275 & 0{,}369 & 0{,}028 & 0{,}026\\0{,}041 & 0{,}033 & 0{,}331 & 0{,}330\\0{,}149 & 0{,}177 & 0{,}048 & 0{,}085\\0{,}032 & 0{,}050 & 0{,}129 & 0{,}075\\0{,}045 & 0{,}065 & 0{,}089 & 0{,}115\end{bmatrix}\end{array}\begin{bmatrix}0{,}14\\\ldots\\0{,}38\\\ldots\\0{,}17\\\ldots\\0{,}30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}096\\0{,}259\\0{,}191\\0{,}174\\0{,}122\\0{,}068\\0{,}081\end{bmatrix}$$

Затем используем эти веса, заполнив строку «веса сценариев» табл. 6.7 для получения значений переменных, которые записываются в правый столбец табл. 6.7, как и было указано ранее.

Как видно, наибольший вес – 0,259 имеет второй сценарий. Этот результат можно истолковать следующим образом: группа отдала предпочтение второму сценарию. Описание этого сценария будет следующим:

«Высшее образование в США после 1985 г. будет ориентировано на приобретение профессиональных навыков. Будет больше студентов с худшими интеллектуальными способностями, несколько менее активных в общественной жизни учебного заведения. Однако у них не будет проблем в получении работы после окончания вуза.

Будет больше преподавателей примерно такого же интеллектуального уровня, как и сейчас, однако они будут играть значительно меньшую роль в управлении вузом. Их обеспеченность работой будет несколько лучше, чем теперь, но с меньшей степенью академической свободы.

Что касается вузов, то их число увеличится, но они будут менее ориентированы на научную работу. Администрация будет значительно эффективнее контролировать вуз (при меньших трениях со студентами).

Обучение будет более доступным, однако роль вузов в культурной жизни и досуге несколько понизится. Возможность получения денежных средств и других ресурсов вузами будет несколько большей, чем сейчас.

Наконец, учебные программы будут больше ориентированы на приобретение студентами практических навыков, хотя, возможно, для развития личности было бы полезнее иное. Время, требуемое на получение диплома и степени, будет намного меньшим, но значимость их изменится не очень существенно. Стоимость обучения одного студента возрастет. Исследовательская работа не особенно изменится».

Теперь получим обобщенный сценарий – сценарий, полученный в результате нахождения значений каждой характеристики по обобщенной шкале измерений. Эта шкала получится путем суммирования произведений весов сценариев на соответствующие значения характеристик. Например, для числа студентов имеем

$$(-2)(0{,}096)+(2)(0{,}259)+(4)(0{,}191)+(-3)(0{,}174)+(-1)(0{,}122)+(2)(0{,}068)+ +(-2)(0{,}081)=0{,}420$$

Этот результат занесен в крайний справа столбец табл. 6.7. Аналогично получаем остальные элементы этого столбца.

Можно предложить следующую интерпретацию обобщенного сценария через значения характеристик:

«Число людей, имеющих отношение (студенты, преподаватели и т. д.) к высшему образованию в США, в период, начиная с 1985 г. и далее, практически не увеличится. Если оценивать возможный уровень студентов в будущем нынешними стандартами, то он будет несколько ниже. Роль студентов в формировании учебных программ не изменится. Их шансы получить работу после окончания обучения будут несколько большими.

Характеристики преподавателей будут примерно теми же, что и сейчас. Это касается их числа, доли преподавателей со степенью и обеспеченности работой. Тем не менее для этой группы уменьшается роль в студенческой жизни и академическая свобода, хотя последняя изменится меньше.

Число вузов практически не изменится. Они определенно будут менее ориентированы на научную работу, с администрацией, проявляющей больший контроль. Эффективность несколько увеличится (с незначительными трениями со студентами). Доступность вузов будет большая, однако их роль в культурных мероприятиях и проведении досуга будет примерно той же, что и сейчас. Практически не возрастут денежные субсидии.

Не претерпит больших изменений качество учебных программ, продолжительность обучения, значимость диплома и степени. Стоимость учебы значительно возрастет. Количество научных исследований в значительной степени уменьшится».

В процессе исследования было высказано предположение о том, что результаты могли бы измениться, если бы был исключен уровень факторов и акторы взвешивались относительно их непосредственного воздействия на высшее образование. Это приводит к следующему собственному вектору:

акторы:	С	П	А	В	О	И
веса:	0,09	0,04	0,05	0,44	0,09	0,28

Эти веса достаточно близки к весам, полученным при наличии уровня факторов. Пытаясь изыскать способы придания большей значимости преподавателям, было предложено включить еще один первичный фактор – идеологию – во второй уровень. Однако это не изменило значительно результатов, поэтому идеология не была включена в число рассматриваемых факторов.

Теперь встает вопрос о том, кому следует ранжировать акторов (группы) в зависимости от степени их влияния, и насколько можно считать объективными эти оценки. Если сами представители этих действующих сил участвуют в оценке, то каждая из них захочет придать своей группе высокий приоритет. Мы надеемся, что эта проблема может быть смягчена или решена после включения в иерархию уровня между наибольшими силами и общими целями. Этот уровень должен состоять из критериев, отражающих различные аспекты конфликта таким образом, чтобы ни один актор, не мог чересчур явно претендовать на превосходство над всеми остальными без твердой уверенности и обоснованности. Если это сделать качественно, то облегчается ранжирование акторов в соответствии с их влиянием и таким образом разрешается конфликт.

6.6. ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ СУДАНА: ОБРАТНЫЙ ПРОЦЕСС

Судан с 18-миллионным населением является крупнейшей страной в своем регионе Африки (площадь около миллиона квадратных миль). Занимаемая им территория, благодаря орошению Белым и Голубым Нилом и значительным осадкам к югу от столицы страны Хартума, где обе реки соединяются, является одной из самых обширных плодородных территорий в мире. По оценкам Судан с около 120 млн. акров для выращивания продуктов питания и 80 млн. акров для нужд животноводства может обеспечить продуктами питания несколько сотен миллионов человек. Поэтому многие субсидирующие организации, такие как Всемирный банк, а также страны, богатые нефтью, уделяют внимание его развитию. Однако экспорт сельскохозяйственной продукции предполагает наличие развитой транспортной сети по стране. Конечно, эта сеть не нужна полностью сейчас же. Различные ее части должны развиваться в различные периоды времени.

Автор данной книги был руководителем исследования [129] по проекту развития транспортной сети Судана на конец восьмидесятых годов. Это исследование включает оценки планов роста экономики, проведенное эконометристами, и составление карты известных природных ресурсов. Для оценок путей движения от провинциальных регионов к главному экспортному пункту в Красном море Порт-Судану были построены и использованы модели производства и потребления продуктов питания и товаров при различных предположениях о темпах роста экономики. Затем были определены приоритеты проектируемой сети дорог в соответствии с их вкладом в развитие регионов, через которые они должны проходить. Они рассматривались отдельно для каждого региона и затем их приоритеты обобщались. В свою очередь, были получены приоритеты регионов в соответствии с их влиянием на потенциальные (осуществимые и желательные) будущие сценарии развития Судана. Эти сценарии представляют варианты развития Судана, учитывающие различные акторы: статус-кво, проецирующее теперешнее состояние дел на будущее; экспорт сельскохозяйственной продукции, возвращающий капитал для развития и повышения жизненного уровня страны, в настоящее время одной из беднейших в мире; сбалансированный региональный рост, при котором по политическим и социальным мотивам регионы развиваются сбалансировано (в отличие от ускоренного сельскохозяйственного развития одних регионов, хотя и повышающего их жизненный уровень, однако приводящего к сильному отставанию других регионов, что может быть причиной внутренней нестабильности); сценарий арабо-африканских связей, по которому Судан служит связывающим звеном между арабскими ресурсами и влиянием и африканскими странами, таким образом получая выгоду от этого.

Эти сценарии были разработаны достаточно глубоко в исследовании, которое проводилось в течение нескольких месяцев. Судан после ухода англичан пережил тяжелую гражданскую войну между Севером и Югом. Итогом этой 16-летней войны были значительные разрушения на Юге и гибель полумиллиона людей. Юг не играет главную роль в сельскохозяйственном развитии, однако является важной политической единицей с более чем 3 млн. жителей, а также контролирует Белый Нил, который имеет истоки в Уганде. Поэтому развитие только по чисто экономическим соображениям было признано несоответствующим общей будущей стабильности Судана. В проектах учитывалась роль связи Севера с Югом и с другими регионами этой обширной страны для сохранения ее целостности. Интенсивное экономическое развитие Севера могло вызвать обиды на Юге по поводу распределения ресурсов.

Следовательно, наиболее перспективным является обобщенный исход этих четырех сценариев. Лица, участвовавшие в определении приоритетов, были высокопоставленными суданскими чиновниками, молодыми специалистами и экспертами, проводившими исследования по суданскому транспорту. Полностью исследование отражено в отчете на 1700 рукописных страницах. Здесь читателю предлагается существенно сокращённая версия процесса определения приоритетов. Результаты исследования сыграли большую роль в размещении ресурсов. Почти 6 млрд. дол. было ассигновано на развитие Судана и большая часть этих вложений пошла на транспорт, что и было стимулировано нашим исследованием. Тот факт, что проекты ранжировались по приоритетам, а не по стоимости, позволил следовать нашим рекомендациям даже во время сильной инфляции в мире, когда цифры в долларах быстро становились бессмысленными.

Парное сравнение четырех сценариев в соответствии с их осуществимостью и желательностью к 1985 г. (пересмотром плана можно было разделить эти два критерия) приводит к матрице, представленной в табл. 6.8.

Таблица 6.8. Приоритеты сценариев

Сценарии		I	II	III	IV
Статус-кво	I	1	1/7	1/5	1/3
Сельскохозяйственный транспорт	II	7	1	5	5
Сбалансированный региональный рост	III	5	1/5	1	5
Арабо-африканские связи	IV	3	1/5	1/5	1
$\lambda_{\max} = 4{,}39$; ИС = 0,13; ОС = 0,14					

Приоритеты сценариев в порядке перечисления будут

$$\left(0{,}05;\, 0{,}61;\, 0{,}25;\, 0{,}09\right).$$

Числа показывают осознанную важность каждого сценария относительно других, так же как и конечные результаты определения приоритетов. Как видно, сценарий II доминирует, за ним по важности следует сценарий III. Так как будущее наиболее вероятно не будет в точности воспроизводить один или другой сценарий, а будет их композицией с силой выражения, обозначенной приоритетами, вся эта информация была использована для построения обобщенного сценария по Судану для 1985 г.

Важность транспорта в перспективе развития предполагает большие инвестиции в средства производства для железнодорожной системы, такие как подвижной состав и средства связи. Большая часть главной железнодорожной линии должна быть двухколейной и нужно построить новые подъездные пути западного образца.

Следует хорошо развить систему дорог, широкие и пригодные в любую погоду магистрали должны соединять большие города. Должны быть задействованы автострады по направлению к Порт-Судану. В сельскохозяйственных зонах следует построить много местных дорог, ведущих к железнодорожным путям. При рассмотрении системы автомобильных дорог в общем случае можно считать возможным применение транспортной цели сценариев II и III.

Водный путь по Нилу следует улучшить и пустить по нему современные суда. Одновременно должны быть обеспечены качественные эксплуатация и обслуживание средств швартовки. Системе воздушных сообщений со службой перевозки экспортных грузов воздушным путем следует приспособиться к сценарию II. Большая часть воздушного движения и все международные перевозки будут использовать Хартумский аэропорт. Следует открыть и связать с системой железных и автомобильных дорог второстепенный порт в г. Суакин.

Приоритеты регионов и проектов

Судан состоит из 12 регионов (экономические и географические различия которых в большей или меньшей степени подтверждают их политическое разделение). Регионы попарно сравнивались в различных матрицах в соответствии с их воздействием на каждый из сценариев. Они составили третий уровень иерархии. Полученные собственные векторы использовались в качестве столбцов матрицы, умножение которой на собственный вектор весов или приоритетов сценариев давало взвешенное среднее влияние региона. Затем проекты (четвертый уровень иерархии) попарно сравнивались в 12 матрицах в соответствии с их воздействием на регионы, к которым они фактически относились. Проект может принадлежать нескольким регионам, и это должно быть учтено. Результирующая матрица собственных векторов вновь взвешивалась посредством вектора весов региона для получения меры общего воздействия каждого проекта на будущее.

Приоритеты проектов должны определяться отдельно в соответствии с их экономическими, социальными и политическими воздействиями. Однако при проведении суждений эти показатели рассматривались вместе. Некоторые усовершенствования подхода в этих направлениях возможны при будущих пересмотрах плана.

Результаты определения приоритетов показали не только относительную важность регионов для возможных инвестиций, но и относительно каких проектов может быть применена одна из следующих трех фаз: первая – удаление узких мест; вторая – раскрытие новых возможностей сельскохозяйственных зон и вывоз товаров во внешний мир; третья – поддержка сбалансированного роста регионов и транспорта между теми регионами, вклад которых в обобщенный сценарий не кажется явно выраженным по сравнению с другими регионами, из чего следует возможность получения ими меньших общих инвестиций.

Реализацию проектов следует производить, сосредоточивая внимание на проектах с наивысшими рангами, при ограничивающих условиях общего количества имеющихся для инвестиции ресурсов.

Отметим, что любой проект (скажем, дороги) может быть осуществлен с различной степенью сложности. Стоимость каждого варианта была оценена. Теперь было легче увидеть, что нужно было осуществить и что могло быть просто усовершенствовано или исправлено, и какие бреши должны были быть заполнены новыми проектами.

Обнаружилось, что при скорости прироста в 7,3%, которая вначале предполагалась наиболее эффективной, всё казалось нужным: превращение многих железнодорожных линий в двухколейные с соответствующим балластным слоем; прокладка дорог всюду и т. д. Стоимость оказалась настолько высокой, что Судану пришлось бы быть обремененным долгами в течение 100 лет, даже если бы вначале имелись средства, которых на самом деле не было.

Мы вернулись к 4,3% (нынешней скорости прироста) и обнаружили, что большинство имеющегося оборудования при существующем уровне эффективности будет использовано до предела.

Очевидно, следовало прийти к компромиссу где-то между этими двумя крайностями с рациональным подтверждением темпов прироста. Когда мы проверили скорость роста ВНП 6%, которую эконометрический анализ нашел приемлемой, это обеспечило отличные перспективы для тех проектов, которые считались нужными при 4,3% роста и оставались инвариантными с большим приоритетом при 7,3% прироста. Эти проекты в основном и были рекомендованы для реализации.

6.7. КОМБИНИРОВАННЫЙ ПРОЦЕСС

Энергосистема

В приведенном ниже обсуждении обращено внимание на планирование будущего энергосистемы. Используется комбинированный процесс планирования для рассмотрения взаимодействий между различными акторами, которые влияют на будущее энергосистемы. Рассматриваются цели каждого актора, возможные будущие сценарии, проблемы, связанные с достижением желательных сценариев или линий поведения, контролирующих энергосистему.

Прямой процесс. Он обеспечивает описание среды, в которой должна работать энергосистема. Это иллюстрируется рис. 6.4 вместе с основными (несоставными) приоритетами факторов, представленных в иерархии.

Отметим, что целями руководства являются высокий доход, высокая базовая нагрузка, гарантирующая надёжность системы и небольшой излишек мощности, чтобы избежать высоких амортизационных расходов на неиспользуемое оборудование. Цели других акторов также можно разумно объяснить. В рамках нашего обсуждения мы не будем углубленно описывать другие цели.

Четвертый уровень иерархии прямого процесса состоит из возможных будущих сценариев для энергосистемы. Первый сценарий – обычный бизнес, означающий, что при работе системы будет сохраняться настоящее положение, применяется политика краткосрочного планирования и не предусматривается долгосрочное планирование диверсификации или надежности системы. Второй сценарий – сохранение и планирование умеренного роста отрасли при диверсификации с тем же уровнем прибыли. В третьем сценарии отстаивается минимизация роста отрасли с одновременным проведением активной диверсификационной политики. Четвертый сценарий заключается в планировании и осуществлении значительного увеличения платы за электроэнергию, ведущего к ее экономии, что сильно влияет на использование электричества в качестве источника энергии.

Отметим, что второй и третий сценарии имеют почти одинаковый высокий приоритет по сравнению с первым и четвертым. Это означает, что наиболее вероятным исходом будет в равной мере второй или третий сценарий.

Обратный процесс. При имеющемся описании среды и того, что проясняет прямой процесс, применяем обратный процесс в качестве декларативного механизма для определения тех линий поведения, которым должна следовать система для достижения «желаемого» исхода сценария. На рис. 6.5 показана иерархия, соответствующая обратному процессу.

Здесь первый уровень – желаемое будущее энергосистемы. Второй уровень содержит желаемые сценарии развития энергосистемы, которые случайно (что не всегда так) оказались двумя предполагаемыми исходами прямого процесса. Третий уровень содержит проблемы, связанные с достижением каждого из желаемых сценариев. Уточнение этих проблем находится за пределами данного обсуждения.

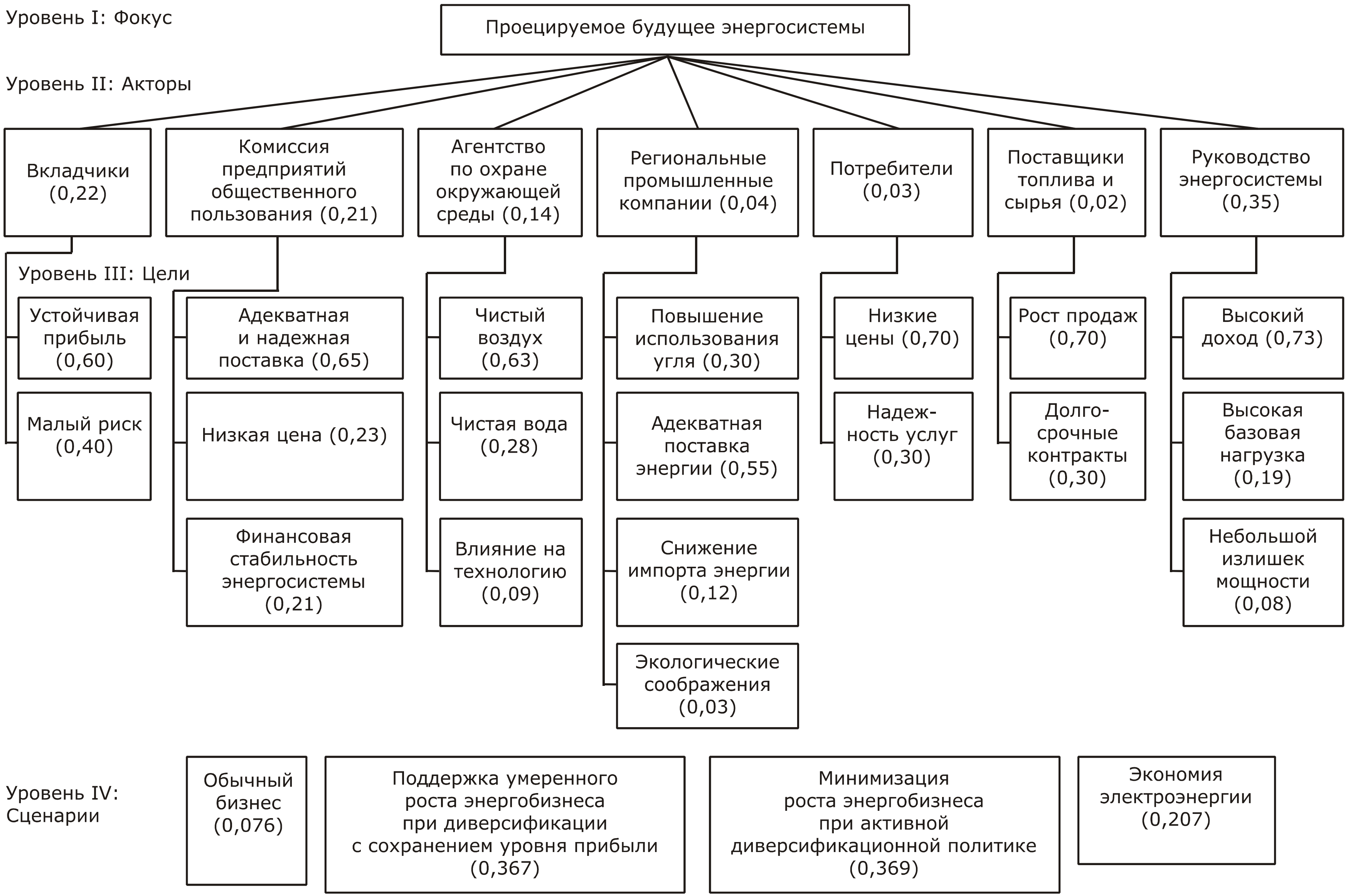


Рис. 6.4. Иерархия процесса

Большинство из них не нуждается в объяснении. Четвертый уровень содержит наиболее влиятельные силы с точки зрения их способности воздействовать на будущее энергосистемы. Они были избраны, основываясь на взвешивании, полученном при прямом процессе. В этом случае все акторы с весом меньше 0,10 не были учтены. Поэтому рассматриваются только управление системой, государственная комиссия предприятий общественного пользования (КПОП), вкладчики и агентство по охране окружающей среды (АООС). Пятый уровень является основной причиной проведения обратного процесса. Этот уровень содержит переменные решения, или контролируемые политики системы, куда входят: устойчивая прибыль вкладчиков, гарантия надежности поставки энергии потребителям, погоня за высокой нормой прибыли на инвестируемый капитал, гарантия малого риска при инвестициях и активная кампания по экономии энергии.

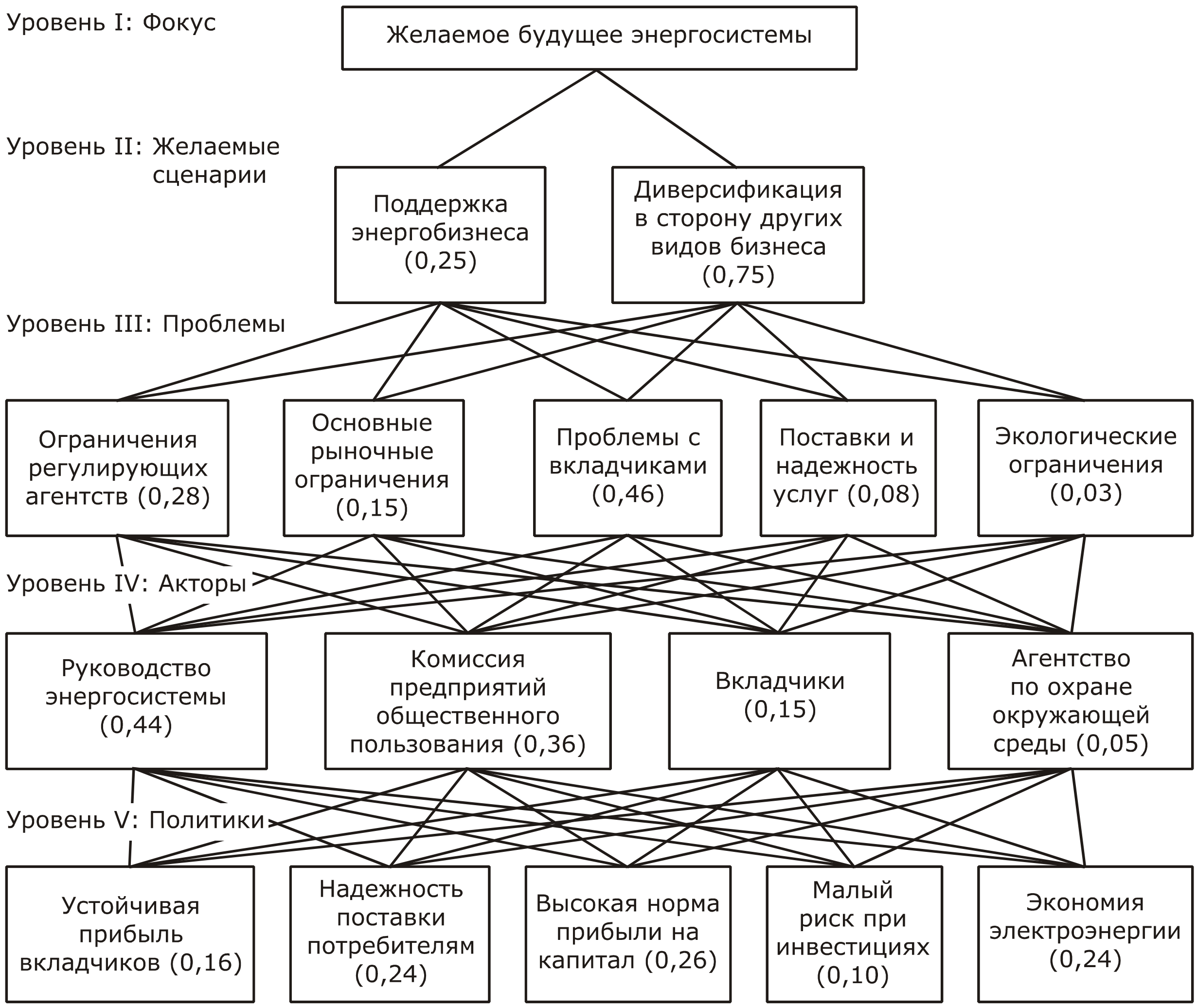


Рис. 6.5. Иерархия обратного процесса

Следующим шагом должно стать применение МАИ к этой иерархии так же, как и при прямом процессе. Целью является получение обобщенного вектора приоритетов для политик на пятом уровне. Эти веса показывают, какие политики следует проводить для системы наиболее энергично, для того, чтобы достигнуть сценария с наиболее желательным исходом. Результат применения МАИ представлен на рис. 6.5.

В этом случае третий сценарий, в котором настойчиво проводится политика диверсификации, был выбран в качестве наиболее желательного исхода. Обобщенные веса линий поведения, которые должны быть проведены, будут: устойчивая прибыль вкладчиков – 0,16; надежная поставка – 0,24; высокая норма прибыли – 0,26; малый риск инвестиций – 0,10; экономия энергии – 0,24.

Заслуживает интереса интерпретация обобщенного вектора пятого уровня. Для достижения желательного сценария в энергосистеме должна проводиться политика, обеспечивающая надежную поставку энергии, высокую норму прибыли на вкладываемый капитал и экономию электроэнергии. Веса каждого из этих требований почти равны. Веса остальных двух политик несколько ниже, поэтому им уделяется меньшее внимание.

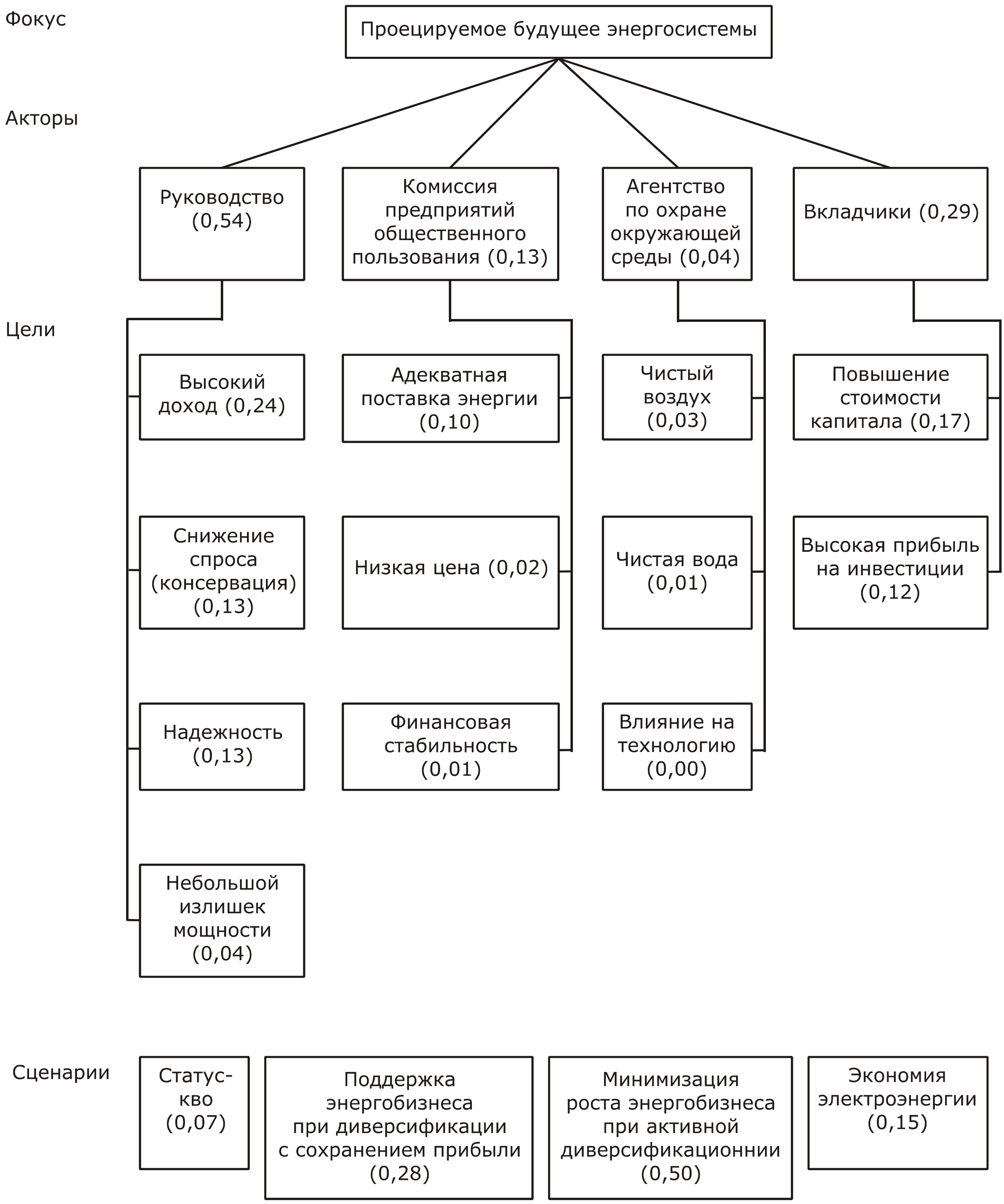


Рис. 6.6. Второй прямой процесс

На второй итерации прямого процесса (рис. 6.6) были удалены акторы, приоритеты которых на первой итерации прямого процесса были ниже, чем 0,05. Относительная важность каждого актора также меняется, так как ситуация теперь такова, что в развитии энергосистемы ставится целью активная диверсификация. Ниже в таблице показано это изменение:

	Управление	КПОП	АООС	Вкладчики
Первый прямой процесс	0,38	0,26	0,15	0,23
Второй прямой процесс	0,54	0,13	0,04	0,24

Наблюдается сдвиг в приоритетах от КПОП и АООС к управлению системой. Цели управления – лучше отразить стремление к желательному сценарию – определяются обратным процессом. Цели КПОП показывают изменение управления системой для достижения желательного сценария. Цели вкладчиков также меняются по тем же соображениям. Пересчет приоритетов для акторов и их целей во втором прямом процессе показан на рис. 6.6.

Выводы. Применение стратегии, предоставленной обратным процессом, дает согласованные с целями управления результаты при проверке во втором прямом процессе. Различия появляются в основном между двумя наиболее предпочтительными сценариями с акцентом на экономию электроэнергии.

Пример способствует пониманию управления как средства достижения компромиссов, необходимых для достижения желаемых целей. Для уточнения стратегии, которой нужно следовать, процесс нужно продолжить.

Планирование в корпорациях

Целью этого исследования, проведенного для крупной корпорации с участием ее планирующего персонала, было выявление сфер потенциальных проблем. Предметом обсуждения были сферы и внешние акторы, на которые могла бы воздействовать политика корпорации для достижения более желательного будущего по сравнению с тем, если бы не были приложены специально направленные усилия.

Планирование исследовалось с точки зрения:

1. *Проецируемого будущего.* Каково будет будущее корпорации, если политика планирования останется такой же, как и сейчас, а другие, в основном внешние, акторы не будут изменяться?

2. *Желаемого будущего.* Какие изменения нужно провести в политике для достижения желаемого, а не прогнозируемого в настоящее время будущего?

Для иерархии *проецируемого будущего* перечислим уровни в убывающем порядке важности:

а) акторы, которые будут влиять на будущее корпорации: оценка их относительной важности;

б) политики/цели каждого важного актора, которые будут влиять на планирование: оценка их относительной важности для соответствующего актора;

в) альтернативные сценарии будущего корпорации относительно политики акторов: оценка относительной вероятности осуществления каждого сценария.

Для иерархии *желаемого будущего* были определены следующие уровни:

а) сценарии, желаемые для руководства: оценка их относительной желательности;

б) проблемы и препятствия, которые должны быть преодолены для реализации одного или более сценариев: оценка относительной важности каждой проблемы;

в) акторы, контролирующие решение каждой проблемы: оценка относительной значимости этих сил;

г) политики/цели каждого актора, воздействующие на стратегию поведения по отношению к проблемам: оценка относительной важности каждой политики/цели;

д) реакции корпорации при подборе подходящих способов воздействия на поведение акторов при решении проблем, связанных с реализацией желаемых вариантов будущего: оценка относительной важности каждой противодействующей политики.

Итоги. Структура проецирования будущего иллюстрируется рис. 6.7. Каждый сценарий строится посредством идентификации группы существенных факторов и приписывания значений каждому из них. Вес каждого сценария получен на основе совместимости с политикой акторов. Окончательный вес каждого сценария следующий: бум – 0,41; сохранение – 0,31; диверсификация на международном рынке – 0,23; крах – 0,05.

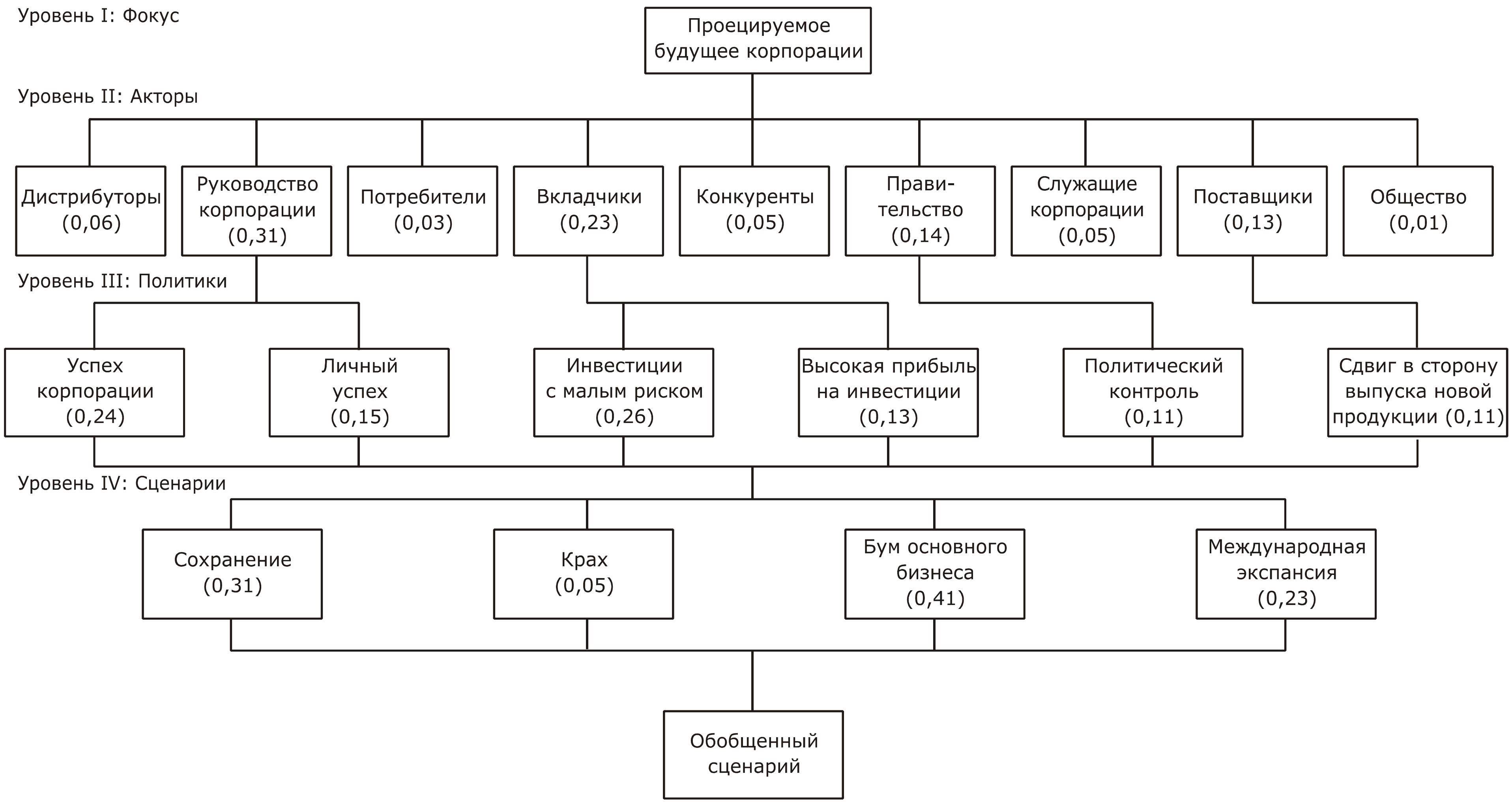
Структура желаемого будущего проиллюстрирована на рис. 6.8. Основные политики и их окончательные нормализованные веса будут: небольшой риск для вкладчиков – 0,24; политический контроль правительства – 0,20; успешная борьба с конкурентами – 0,15; успех корпорации – 0,13; высокая прибыль – 0,12; повышение курса акций – 0,09; личный успех руководства – 0,07.

Проецируемое будущее предлагает последовательную концентрацию внимания корпорации на развитие деловой сферы, которая была успешной в прошлом. Будут предприняты некоторые попытки для диверсификации на международном рынке, однако это будет в основном вызвано ухудшением положения на внутреннем рынке, а не привлекательностью международного рынка. Проецируемое будущее указывает на возможность того, что внутренний рынок не обеспечит приемлемую скорость роста в основном из-за действий поставщиков или правительства.

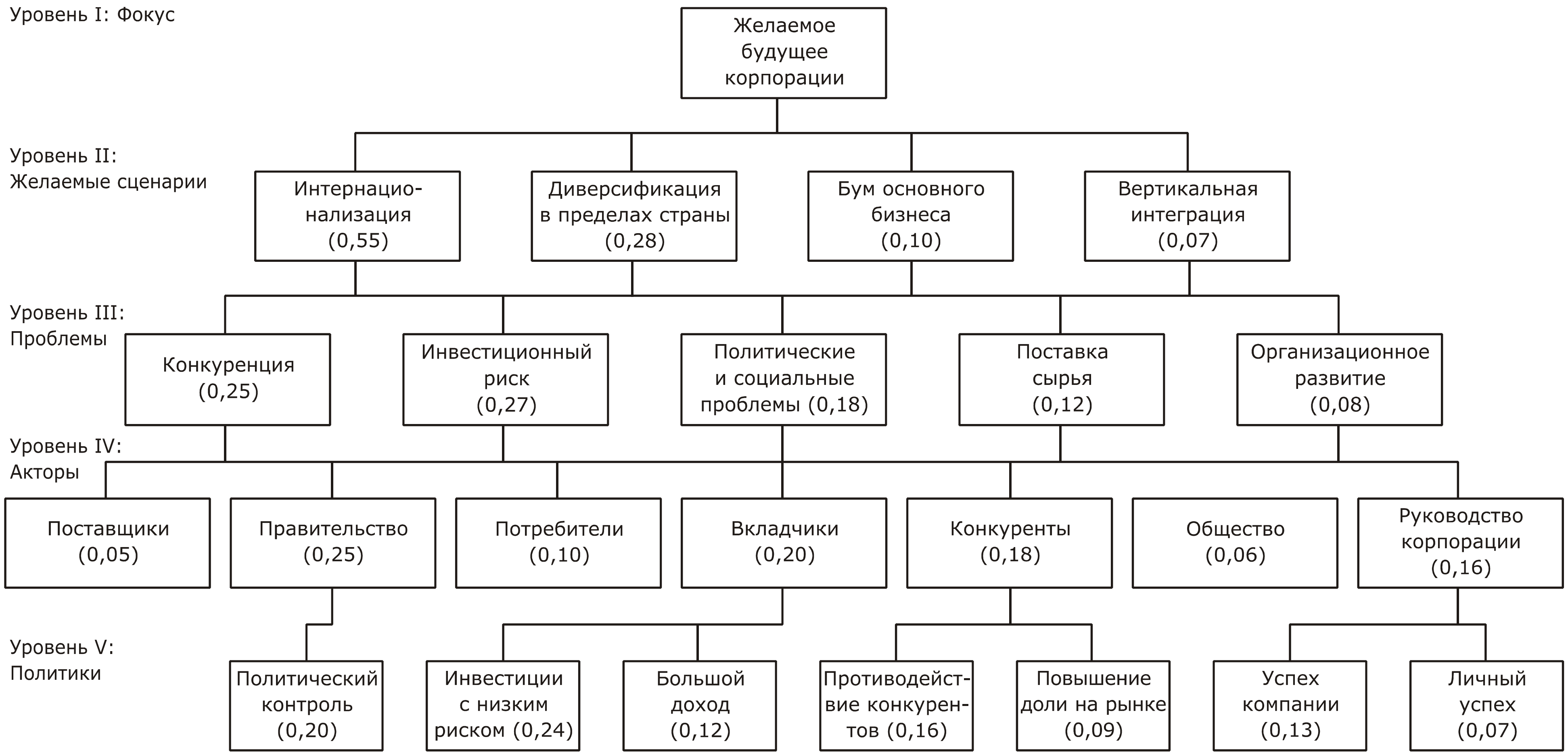
Наиболее значительными для проецируемого будущего корпорации акторами являются по порядку важности вице-президенты компании, основные вкладчики компании, правительство и поставщики сырья. Роль потребляемой продукции не считается особенно значительной в проецируемом будущем, подразумевается, что привычка делать покупки не изменится, если компания сама не предпримет каких-то новых действий. Политика и цели руководящего персонала корпорации, занимающего ключевые позиции, ориентирована, во-первых, на успех компании, а также на личный успех, означающий, что расширение существующих функциональных сфер как ведущее к успеху компании в целом имеет высокий приоритет. Представляется, что вкладчики руководствуются в основном минимумом риска и уже потом максимизацией прибылей. Для правительства важнейшим является политический контроль, затем развитие и извлечение доходов в виде налогов. Предполагается, что поставщиков заботит доход и они не особенно лояльны по отношению к покупателям их продукции; следовательно, существует риск недопоставки.

Международная экспансия рассматривается как намного более желаемое будущее. Основные проблемы, существенные при реализации желаемого будущего, следующие: конкуренция на внутреннем и международных рынках; риск, сопутствующий инвестициям в новую продукцию и рынки; политические и социальные проблемы. Для желаемого будущего поставка сырья и организационное развитие считались менее значимыми, чем другие проблемы. Наиболее значительными акторами, которые будут влиять на исход желаемого будущего, в порядке убывания важности считаются: правительство, вкладчики, конкуренты и руководство компании. Важно, что правительство оказалось ключевым актором при создании желаемого изменения. В то же время руководство компании, которое было самой влиятельной силой в прямом процессе, здесь имеет гораздо меньшую важность.

Из-за ограничений во времени противодействующие попытки управления корпорацией обсуждались в общих чертах. Тем не менее обнаружилось, что имеется настоятельная необходимость дальнейшего изучения, анализа и понимания поведения основных внешних акторов; метода оценки риска и доходов по альтернативным новым стратегиям роста; разработки методов для оказания большего воздействия на внешние факторы, влияющие в основном на тот будущий курс, который компания может пожелать провести.



6.7. Проецируемое будущее корпорации



6.8. Желательное будущее корпорации

6.8. АНАЛИЗ КОНФЛИКТОВ

Управление медицинским обслуживанием

Принятая форма действий в системах здравоохранения привела к стремительному росту стоимости медицинского обслуживания. Система здравоохранения значительно отличается от промышленных систем. В промышленности организационная структура строится так, чтобы управление можно было осуществлять через достижение конкретных целей, реализацию полномочий, независимых конкретных задач и показателей функционирования. В системах медицинского обслуживания цели чаще всего абстрактны, полномочия размыты, взаимозависимость низкая, а система оценок бедна и они противоречивы. Короче говоря, организационные проблемы при управлении медицинским обслуживанием выливаются в сильно конфликтующие задачи различных сил, влияющих на работу больницы. Цели часто несовместимы, а задачи совершенно различаются. Следовательно, существует необходимость в интегрирующем механизме для ослабления конфликта. Одним новым предложением, заслуживающим особого внимания, является концепция команды, в которой делается попытка интегрировать функции больницы. Вместо отдельных лиц, решающих заранее определенные задачи, обслуживание пациента будет результатом взаимозависимых действий.

В нашей иерархии отражена степень конфликта интересов между врачами, администрацией больницы, советом попечителей, обслуживающим персоналом и предполагаемыми пациентами. Рассматриваются две альтернативы современной системы медицинского обслуживания: концепция команды и статус-кво с административным контролем. Эти два сценария будут оцениваться для определения относительных предпочтений акторов и, следовательно, их совместного влияния на достижение политики сдерживания роста стоимости обслуживания. Здесь, ослабляя внутренний конфликт в частном лечебном заведении, иерархический анализ позволяет оценить: сравнительную степень влияния акторов в больнице, связанных со сдерживанием роста стоимости обслуживания; эффективность воздействия двух сценариев на цели акторов; природу и степень конфликтов между целями каждой группы; наиболее вероятную альтернативу, а также получение для больниц общих рекомендаций о форме решений, которые необходимо принять.

С целью экономии места не будем описывать в деталях элементы иерархии. Они вместе с соответствующими приоритетами показаны на рис. 6.9. Тем не менее, возможно, будет полезным более подробно остановиться на нижнем, или четвёртом, уровне. Он воспроизводит две организационные стратегии. Политика поддержания статус-кво не будет включать фундаментальных изменений в нынешних организационных мероприятиях. Механизмы сдерживания роста стоимости чисто административны по существу, в них возможны изменения только в ограничениях на скорость роста и бюджета. Вторая политика представляет изменение организационных принципов в больнице. Концепция команды является новой политикой в управлении, включающей как экономические, так и клинические величины при управлении лечением пациентов. Врачи и обслуживающий персонал будут более тесно связаны с администрацией больницы в процессе решения управленческих проблем. Внимание будет акцентировано на подтверждении диагностических и лечебных методологий с точки зрения анализа «стоимость-эффективность». Лучше учитывается возможный контингент больных и денежные средства. Администрации понадобится большее понимание экономических последствий решений. Эти решения не будут чисто клиническими или чисто административными, а будут совместными решениями, принятыми командой, занимающейся медицинским обслуживанием.

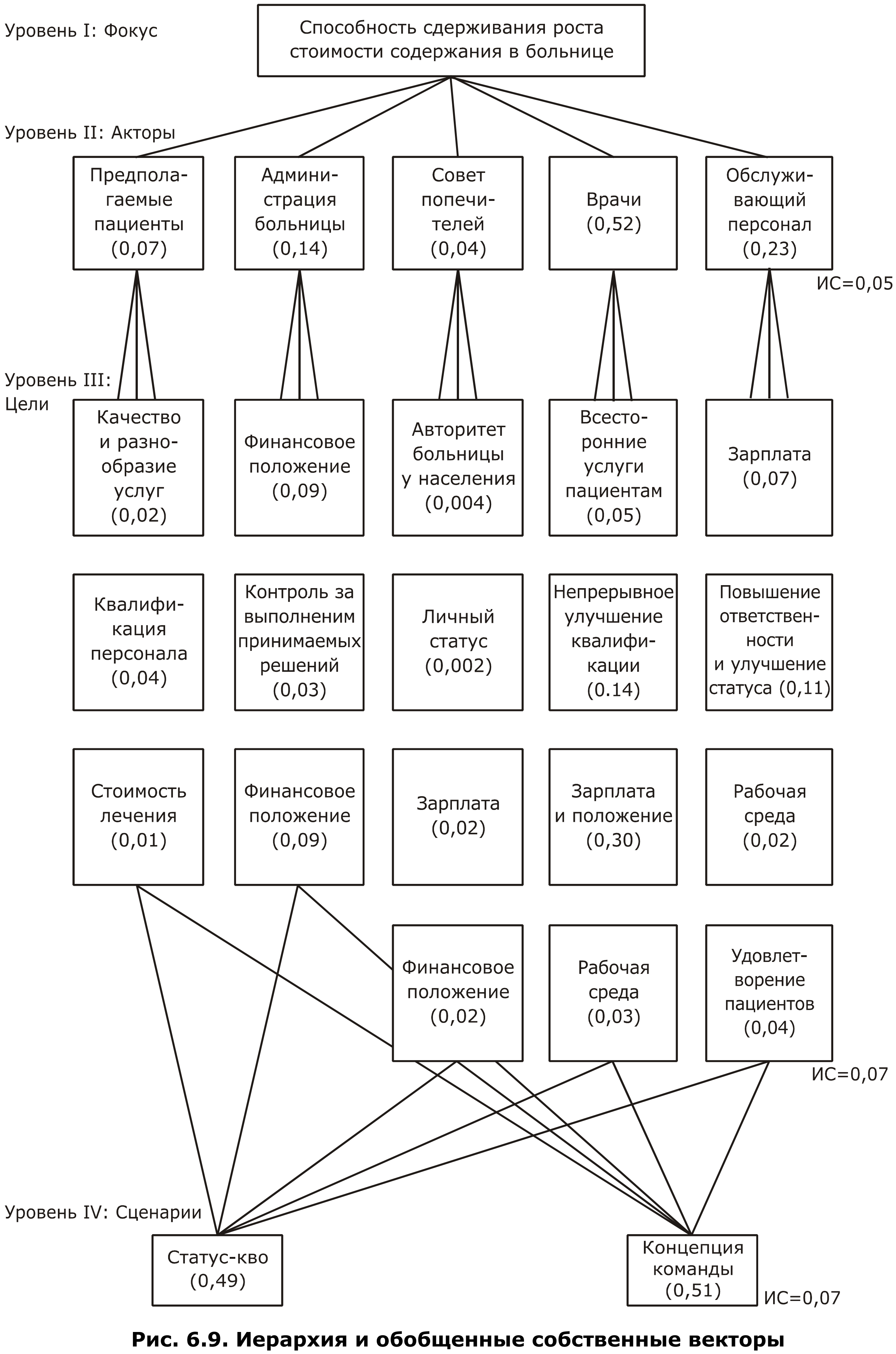


Рис. 6.9. Иерархия и обобщенные собственные векторы

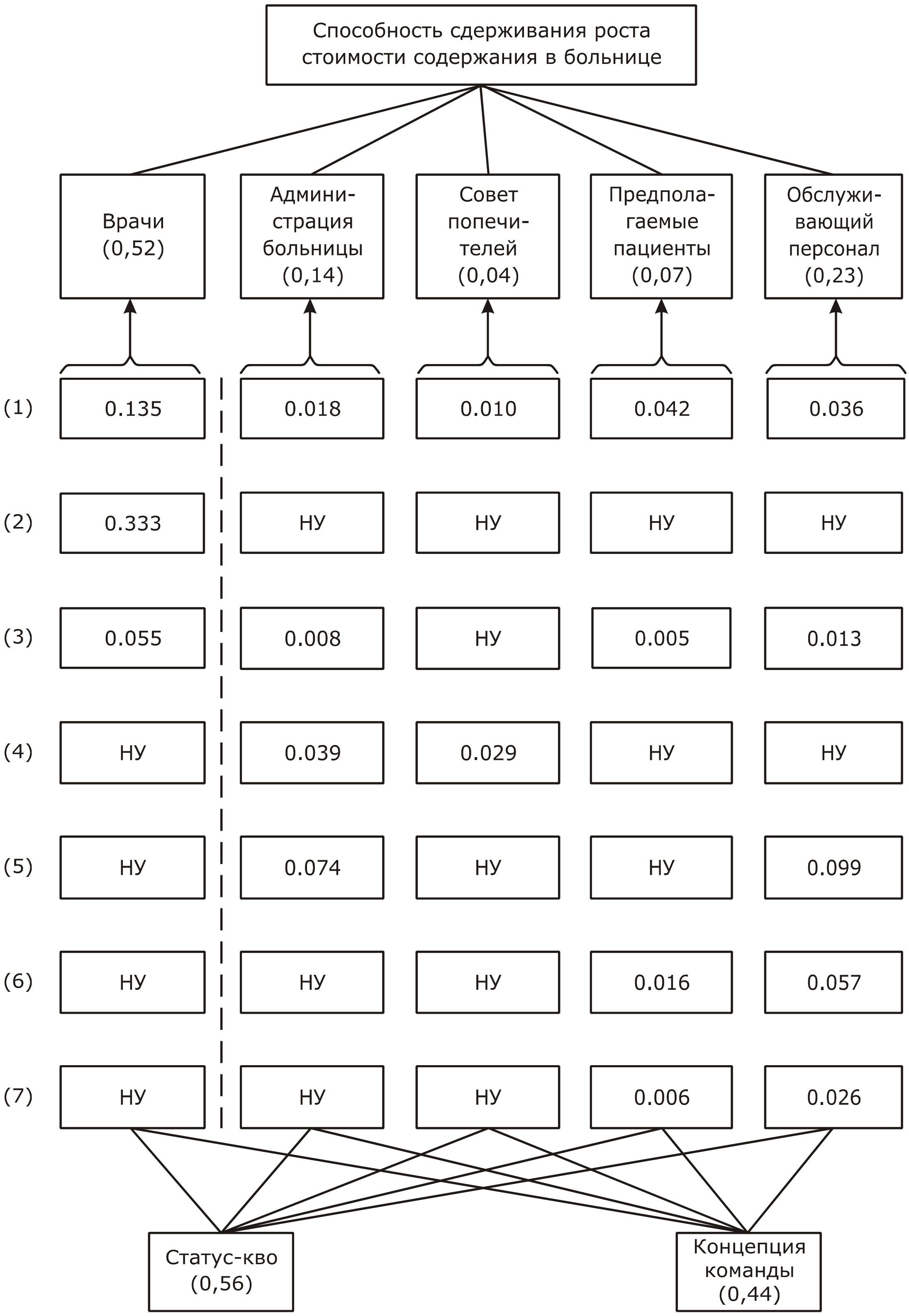


Рис. 6.10. Иерархия второго прямого процесса

Результаты первоначального прямого процесса показывают, что концепция команды не имеет явного преимущества над статус-кво как более предпочтительный подход для сдерживания роста стоимости медицинского обслуживания. Это – следствие конфликтующих целей двух действующих групп: врачей и остальных четырёх акторов, в равной степени воздействующих на эти два исхода. Врачи предпочитают фактически контролировать больницу, сохраняя существующее положение, в то время как другие группы поддерживают изменения через концепцию команды для получения большего контроля над больницей и, следовательно, более эффективного сдерживания роста стоимости.

Однако важно отметить, что приоритеты целей – зарплаты (а также статуса в данном случае врачей), получившие около 37% от общего веса, выделились по сравнению с целью сдерживания роста стоимости обслуживания. Поэтому зарплата сотрудников системы медицинского обслуживания не изменится в зависимости от выбора организационной структуры и, следовательно, не может считаться фактором, имеющим решающее значение.

Для заострения внимания на конфликтующих группах и попытки получения более убедительного результата, т. е. получения большей значимости для одного из двух исходов, хотя второй исход при концепции команды был бы более желателен для всех, были проведены модификации в структуре иерархии.

Был применен обратный процесс, сначала исключались цели, имевшие незначительный вес (ниже значения 0,01) и цели, индеферентные к организационным переменам, например зарплата. Затем была проведена вторая итерация прямого процесса для выявления эффекта от внесённых изменений.

Следствия первого прямого процесса выразились в повышенном внимании к семи основным целям, частично общим для всех акторов. Они смягчают противоречие между двумя основными противостоящими группами. Три из этих целей, вызывавших наибольшее внимание врачей, также рассматривались относительно всех акторов. Поскольку врач занимает ключевые позиции в современной структуре больницы, все акторы считают важным удовлетворить врачей и пациентов уровнем лечения. Оставшиеся четыре цели относятся не к врачебному блоку. Оправданием для их группировки в общий блок служит схожесть их основных интересов в больнице. Для каждого из этих акторов концепция команды представляет собой предпочитаемый подход к достижению целей, имеющих для них наибольшие веса. Поэтому они сконцентрировали интересы для достижения своих целей в этих четырех сферах; Врачи тем не менее не считают командный подход вообще существенным для определения их роли в медицинском учреждении и, следовательно, не интересуются любой из целей, представленных не врачебным блоком.

Иерархия второго прямого процесса (рис. 6.10) включает следующие семь целей: 1) врачи: удовлетворение обслуживанием; 2) врачи: профессиональное мастерство; 3) врачи: рабочая среда; 4) другие акторы: финансовое положение; 5) другие акторы: выполнение принимаемых решений; 6) другие акторы: удовлетворение обслуживанием; 7) другие акторы: рабочая среда. Для этих целей были определены приоритеты каждой из действующих сил. Через НУ (неучитываемые) обозначаются соответствующие неучитываемые коэффициенты собственного вектора. Подавляющий вес врачей и их относительное сопротивление переменам привели в результате к смещению приоритетов в сторону большей предпочтительности сохранения статус-кво на второй итерации прямого процесса. Врачи не склоняются к изменению своих целей и, следовательно, не похоже, что могут возникнуть условия для реализации концепции команды, хотя они и создают лучшие возможности для сдерживания роста стоимости обслуживания. Существующие тенденции будут развиваться до тех пор, пока не будет преодолена тупиковая ситуация посредством изменения основной структуры медицинского учреждения. Это повлияет как на относительный вес врачей, так и на организацию управления здравоохранением.

Конфликт в Северной Ирландии

Метод анализа иерархии применялся к конфликту в Северной Ирландии для получения устойчивого решения в форме статуса доминиона. Уровни и соответствующие веса иерархии прямого процесса показаны в табл. 6.9. Цели взвешивались относительно действующих сил. Были получены составные веса. Для последующего взвешивания были оставлены только цели с высоким приоритетом, обозначенные в таблице звездочкой. Ирландская республика в качестве актора была исключена, так как ее цели не имеют высокого приоритета. Влияние оставшихся групп было нормализовано и использовано для взвешивания шести оставшихся целей. Составные веса заново были нормализованы, как показано в скобках. Альтернативные политические структуры сравнивались относительно целей с высокими приоритетами. Получилось, что статус доминиона наиболее приемлем.

Таблица 6.9

Уровень 1	Уровень 2	Веса	Уровень 3	Обобщённые веса	Уровень 4	Обобщённые веса
Мощь акторов	Акторы	0,45	Цели акторов Сфера влияния	0,32*(0,36)	Политические структуры через акторы	
	Англия		Хорошие взаимоотношения	0,09*(0,11)		
			Разделение власти	0,04	Объединённая Ирландия	0,15
			Отсутствие связи с Дублином	0,20*(0,25)	Интегрированный парламент	0,15
			Отдельное государство	0,02		
	Верноподданные	0,31	Отсутствие ирландских националистов в правительстве	0,06*(0,07)	Ассамблея без совета с Дублином (участие меньшинства)	0,13
			Связь с Англией	0,02		
			Экономическое процветание	0,02		
			Разделение власти	0,05*(0,07)	Ассамблея с советом с Дублином (участие меньшинства)	
	Умеренные	0,07	Интересы Ирландии	0,01		
			Экономическое процветание	0,01		0,16
			Союз Ольстер – Ирландия	0,02		
	Ирландская республиканская армия	0,14	Изгнание англичан	0,12*(0,15)	Доминион без связи с Дублином	0,25
			Стабильность	0,01		
			Союз Ольстер – Ирландия	0,002		
	Дублин	0,03	Перевыборы	0,01	Доминион со связью с Дублином	0,16
			Британские рынки	0,01		

Для применения обратного процесса прежде всего необходимо определить желательные исходы для каждой из конфликтующих группировок и оценить их реакцию на все исходы. Процесс анализа довольно длинный и подробно описан в [2, 3].

6.9. ПРИМЕРЫ ИЗ ЭНЕРГЕТИКИ

Оптимальный выбор энергоустановки, использующей уголь

Проблему оптимального выбора типа работающей на угле энергоустановки (ЭРУ), обслуживающей район (общину), можно рассмотреть в виде иерархии с тремя главными критериями. Один из критериев связан с эффективностью использования источника энергии (ИИЭ), другой – с воздействием на окружающую среду, а третий – с экономикой. Каждый из этих критериев включает несколько факторов, показанных на рис. 6.11–6.13. Анализ экономического критерия здесь не приводится.

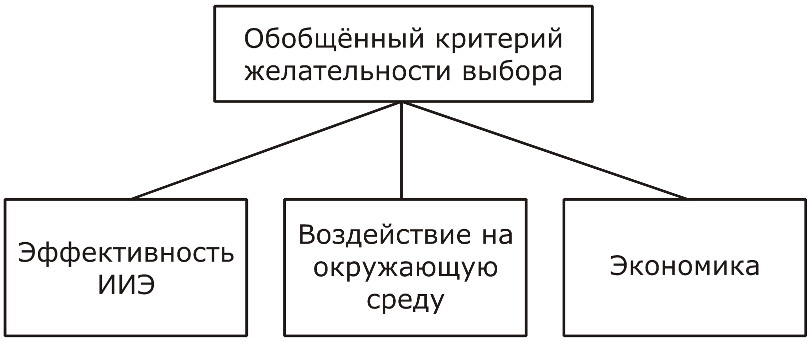


Рис. 6.11

Например, эффективность ИИЭ включает четыре уровня: первый связан с временем года, топографией, географией и т. д.; второй – с различными потребностями общины в электроэнергии, такими как отопление и охлаждение, освещение и т. д.; третий – с методом подачи энергии, а четвертый – с типом установки, генерирующей энергию.

Схема воздействий на окружающую среду в пояснении не нуждается.

Системы аккумулирования энергии

Проведена оценка четырех современных систем аккумулирования энергии на основе шести критериев осуществимости. Это следующие системы: S_1 – накопление сжатого воздуха; S_2 – подземная гидроаккумуляция; S_3 – электрические батареи; S_4 – накопление энергии водорода.

Шестью критериями осуществимости являются: I – экологический; II – экономический; III – социальный; IV – выбор места; V – время, требуемое для постройки; VI – совместимость с энергосистемой.

Матрица сравнений шести критериев и ее собственный вектор будут такими:

	I	II	III	IV	V	VI	Собственный вектор
I	1	1/5	2	1/3	1/2	2	0,09
II	5	1	7	2	3	7	0,42
III	1/2	1/7	1	1/5	1/2	1	0,05
IV	3	1/2	5	1	2	5	0,25
V	2	1/3	2	1/2	1	3	0,14
VI	1/2	1/7	1	1/5	1/3	1	0,05

$\lambda_{\max} = 6,05$; ИС = 0,01; ОС = 0,01

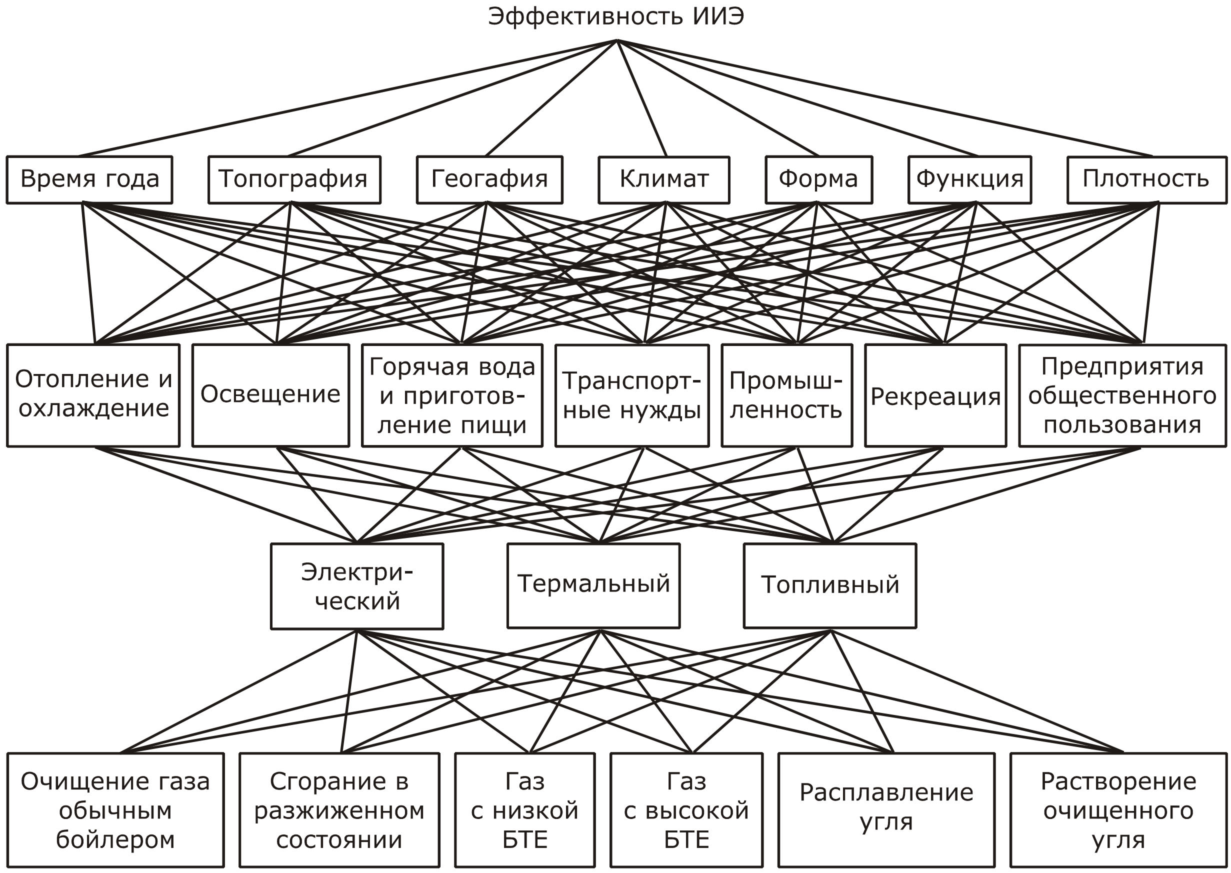


Рис. 6.12

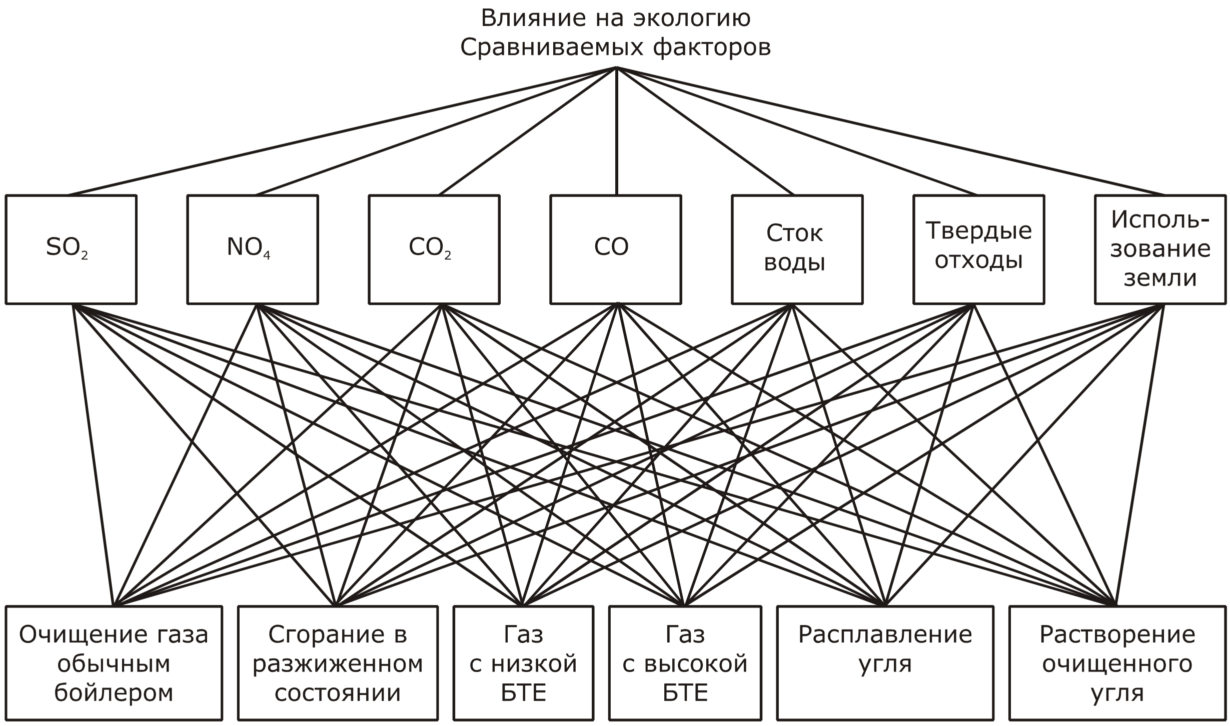


Рис. 6.13. Иерархические взаимоотношения для факторов окружающей среды

Получено следующее ранжирование аккумулирующих систем: $S_1 = 0,26$; $S_2 = 0,14$; $S_3 = 0,36$; $S_4 = 0,24$. Это подтверждает, что S_3 – аккумулирующая система на электробатарее – наилучшая из всех четырех систем.

Оценка годового потребления энергии бытовыми электроприборами

В этом примере, используя шкалу 1–9, студент попытался оценить относительную величину электроэнергии, потребляемой каждым из следующих бытовых электроприборов, путем сравнения их друг с другом. Затем он сравнил полученный результат с их нормализованными фактическими значениями, взятыми из справочника по потреблению электроэнергии (см. табл. 6.10).

Таблица 6.10. Матрица парных сравнений оценки годового потребления энергии

	Кухонная плита	Холодильник	Цветной телевизор	Посудомойка	Чёрно-белый телевизор	Утюг	Радиоприёмник	Сушилка для волос
Кухонная плита	1	3	6	3	7	7	9	9
Холодильник	1/3	1	4	5	5	5	7	9
Цветной телевизор	1/6	1/4	1	1	1/2	4	4	8
Посудомойка	1/3	1/5	1	1	2	3	9	9
Чёрно-белый телевизор	1/7	1/5	2	1/2	1	3	3	7
Утюг	1/7	1/5	1/4	1/3	1/3	1	4	9
Радиоприёмник	1/9	1/7	1/4	1/9	1/3	1/4	1	7
Сушилка для волос	1/9	1/9	1/8	1/9	1/7	1/9	1/7	1
$\lambda_{\max} = 9,256$; ИС = 0,18; ОС = 0,13								

В итоге получены следующие результаты:

Бытовые приборы	Веса с использованием шкалы 1–9	Нормализованные фактические веса	Разность
Кухонная плита	0,362	0,348	0,014
Холодильник	0,252	0,215	0,037
Цветной телевизор	0,088	0,148	-0,060
Посудомойка	0,118	0,107	0,011
Чёрно-белый телевизор	0,083	0,101	-0,018
Утюг	0,053	0,042	0,011
Радиоприёмник	0,030	0,025	0,005
Сушилка для волос	0,014	0,003	0,011
	СКО=0,027	МАО=0,0045	

6.10. ЗАДАЧА О ТАРЕ ДЛЯ НАПИТКОВ

Было оценено семь типов стеклянной тары, биметаллических и алюминиевых банок, используемых в производстве напитков. Оценки основывались на четырех критериях: потреблении энергии, стоимости, отходах и удобствах потребления.

Типами тары были: повторно используемая стеклянная тара без рецикла (ИСБР); повторно используемая стеклянная тара с рециклом (ИСР); разовая стеклянная тара без рецикла (РБР); разовая стеклянная тара с рециклом (РР); биметаллическая банка без рецикла (БББР); алюминиевая банка без рецикла (АББР); алюминиевая банка с рециклом (АБР).

Матрица суждений о парных сравнениях четырех критериев была:

	Энергия	Стоимость	Отходы	Удобство
Энергия	1	5	3	9
Стоимость	1/5	1	1/4	8
Отходы	1/3	4	1	9
Удобство	1/9	1/8	1/9	1
$\lambda_{\max} = 4,38$; ИС = 0,13; ОС = 0,14				

Тара сравнивалась относительно каждого критерия. Обобщенный вектор весов следующий:

ИСБР	ИСР	РБР	РР	БББР	АББР	АБР
0,31831	0,31831	0,09529	0,10303	0,10683	0,02737	0,03086

Интересно отметить, что полученные результаты согласуются с опубликованными в литературе данными о расходе энергии, стоимости и отходах. Матрица для четвертого критерия – удобства потребителя и матрица взвешивания критериев строились так же, как и в предыдущем случае.

Это дало следующие приоритеты:

ИСБР	ИСР	РБР	РР	БББР	АББР	АБР
0,32	0,30229	0,09335	0,09318	0,08394	0,05224	0,0550

Вектор приоритетов близок к предыдущему вектору.

Следует обратить внимание на то, что для количественных факторов приводились минимальные и максимальные значения, которые наряду с соображениями технологичности использовались для получения диапазона значений по шкале 1–9. В любом случае при анализе стеклянная тара предпочтительнее, что находится в соответствии с ростом ее использования на практике.

6.11. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА К ВЫБОРУ КАНДИДАТА ОТ ДЕМОКРАТИЧЕСКОЙ ПАРТИИ

Человек, столкнувшийся с проблемой вынесения суждения о пригодности политического кандидата, часто внутренне испытывает сомнения относительно показателей, по которым должна производиться оценка. Тот, на кого глубоко подействовал Уотергейтский скандал, превыше всего ценит моральный облик и честность. Безработный, вероятно, придаст больший вес внутренней экономической политике кандидата. Если человека заботит безопасность и благосостояние угнетенных народов за рубежом; то больший приоритет получит в его оценках компетентность в международных отношениях. Но как поступать, если он восприимчив в некоторой степени ко всем этим соображениям? Очевидно, он должен решить, как сбалансировать эти и другие критерии.

Первым делом является выбор вопросов, существенных для кандидатуры. Позиция кандидатов по этим вопросам формирует критерии, которые следует оценить. Множество вопросов может быть произвольным, однако некоторые из них несомненно рассматриваются чаше, чем другие.

Для описания реалистического множества обсуждаемых вопросов использовались суждения конгрессмена-демократа, достаточно чуткого к критериям своих избирателей. Как показано в табл. 6.11, выявилось восемь вопросов.

Таблица 6.11. Критерии выбора кандидата от демократической партии

Обаяние	Персональные свойства лидера, вызывающие энтузиазм и поддержку
Имидж	Шарм, личная привлекательность; ассоциация с другими привлекательными людьми
Опыт	Предыдущие посты, имеющие отношение к президенту; готовность к тому, чтобы стать президентом
Экономическая политика	Последовательность и ясность в экономической политике страны
Компетентность в международных отношениях	Последовательность и ясность во внешней политике плюс умение находить общий язык с зарубежными лидерами
Моральный облик	Высокие моральные принципы, верность своему слову
Прошлые действия	Качество исполнения роли в прошлом, независимо от роли на предыдущих общественных постах; общественная характеристика
Честность	Законность в общественной жизни, приверженность законам

Эти вопросы сравнивались попарно в соответствии с их относительным вкладом в общий успех кандидата в президенты. Наиболее важным фактором оказался моральный облик, за ним идут с почти одинаковым весом четыре характеристики: опыт, прошлые действия, экономическая политика и местность. Обаяние, компетентность в международных отношениях и особенно имидж получились сравнительно незначительными. Суждения конгрессмена были хорошо согласованными (индекс согласованности 0,07, который мал для матрицы такого порядка) [134].

По этим критериям было отобрано и сравнено несколько кандидатов для получения относительного веса их приоритетов.

6.12. АТТЕСТАЦИЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

Каждый год по всей стране аттестационные комиссии щедро одаривают мандатами кандидатов на продвижение по службе и пребывания в должности.

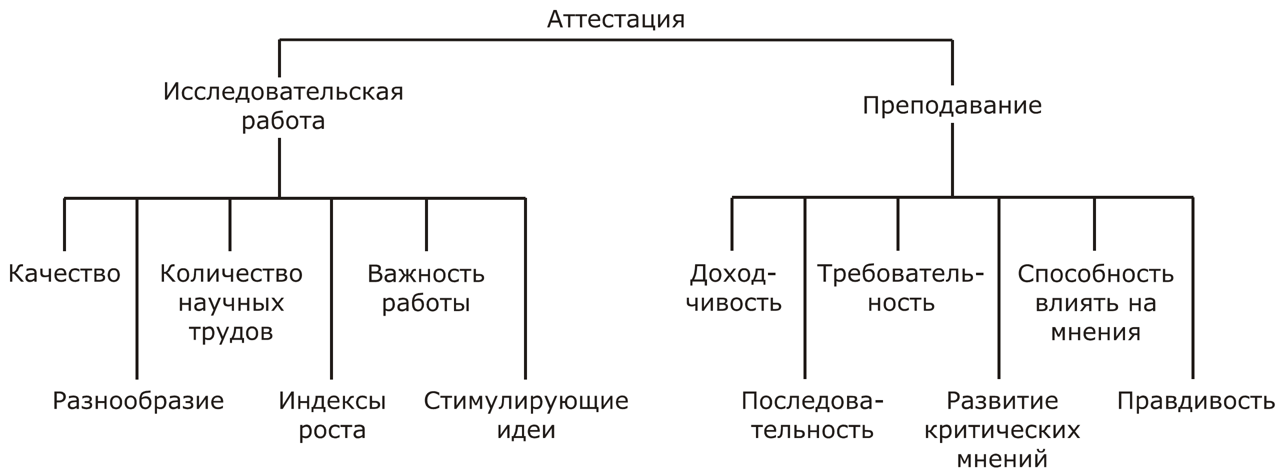


Рис. 6.14

На рис. 6.14 приведена иерархия, которая использовалась на практике для обеспечения основы для суждений. Хотя используемые критерии могут быть одними и теми же для ассистентов, доцентов и профессоров, суждения становятся более жесткими по таким показателям, как значимость и качество научной работы для профессоров. Вначале комиссия устанавливает стандарты по критериям. Затем получают общие приоритеты для критериев, которые также оцениваются комиссией. Теперь все кандидаты оцениваются по одним и тем же критериям, и итоговый собственный вектор кандидата сравнивается с собственным вектором стандарта, который вычислен ранее. Среднеквадратичное отклонение и медианное абсолютное отклонение могут быть использованы для решения вопроса о том, насколько значительна разность.

6.13. ОПТИМАЛЬНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕРРИТОРИИ

В приложении к использованию территории были применены следующие критерии для получения приоритетов различных земельных участков: живая природа, места отдыха, разработка полезных ископаемых, экономическое развитие, наличие леса. Территория была сначала разделена на кластеры с несколькими участками в каждом, а затем эти кластеры были разделены на части и сравнены.

ЧАСТЬ III
ТЕОРИЯ

Обратносимметричные матрицы – Системы с обратной связью – Краткое сравнение с другими работами.

Теперь вновь займемся формальной стороной предмета, определив и охарактеризовав иерархии и нелинейные сети. При этом исследуем свойства обратносимметричной матрицы парных сравнений и устойчивость ее максимального собственного значения и соответствующего собственного вектора. Глава 7 посвящена теории Перрона-Фробениуса и свойствам согласованных и обратно-симметричных матриц. В гл. 8 излагается метод Варфильда структурирования систем, а также наша теория приоритетов, обобщенная на системы. В гл. 9 кратко обсуждаются шкалирование и теория полезности, включая работу Терстена и процедуру наименьших квадратов.

ГЛАВА 7

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОБРАТНОСИММЕТРИЧНЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

7.1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 4 определены функция приоритетов и вектор приоритетов ω в иерархии H. Как известно читателю, способ нахождения приоритетов наиболее важен в нашем методе. Для матрицы A действительных чисел, представляющих попарные сравнения важности элементов на одном уровне H по отношению к одному элементу расположенного выше уровня, определяются наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}$ и решение уравнения

$$A\omega = \lambda_{\max}\omega .$$

Поэтому наши интересы направлены на изучение квадратных матриц $A = \left(a_{ij}\right)$, для которых

$$a_{ij} > 0, i, j = 1, \ldots, n ,$$

и

$$a_{ji} = 1/a_{ij}, i, j = 1, \ldots, n ,$$

т. е. положительных, обратносимметричных. квадратных матриц. Особую важность приобретают матрицы, не только обладающие приведенными выше свойствами, но и являющиеся согласованными, что означает наличие такого важного соотношения:

$$a_{ik} = a_{ij}a_{jk}, i, j, k = 1, \ldots, n .$$

В этой главе рассматривается та часть теории матриц, которая необходима для обоснования математических свойств нашего метода (см. определения в Приложении 1).

Начнем систематическое изложение с введения понятия неприводимой матрицы. Весь нужный материал по неприводимым матрицам, используемый в книге, приведен в следующем разделе. Затем изложим фундаментальную теорему Перрона-Фробениуса для неотрицательных неприводимых матриц, которая обеспечивает существование единственного решения задачи о собственном значении. Так как рассматриваемые обратносимметричные матрицы положительны, сконцентрируем внимание на положительных матрицах, теореме Перрона и ее доказательстве. Далее доказывается, что искомый собственный вектор может быть получен как предельная сумма строк A^k, где A – примитивная матрица. Затем кратко описывается способ вычисления собственного вектора на практике, после чего обсуждаются согласованность обратносимметричной матрицы, отклонение ее главного собственного значения от n, нечувствительность этого собственного значения по отношению к малым возмущениям в A, а также изучаются свойства согласованных матриц.

Далее рассматриваются характеристики обратносимметричных матриц и их правых и левых собственных векторов, а также вопрос о том, что малые возмущения элементов обратносимметричной матрицы вызывают малые возмущения компонент ее главного собственного вектора. В том же разделе приводится формула, принадлежащая Варгасу, для величины возмущения, которое получает каждая компонента собственного вектора как функция возмущения исходной матрицы.

7.2. НЕПРИВОДИМЫЕ МАТРИЦЫ

Обратносимметричные матрицы попарного сравнения не содержат нулей, следовательно, они всегда неприводимы. Понятие неприводимости понадобится при рассмотрении общем системы в гл. 8, где придется иметь дело именно с неприводимыми, а не просто положительными матрицами.

Определение 7.1. Квадратная матрица – *неприводимая* (по отношению к перестановкам), если она не может быть представлена в виде $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$, где A_1 и A_2 – квадратные матрицы, 0 – нулевая матрица. В противном случае матрицу называют *приводимой*. Следующая матрица — приводима:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Граф, соответствующий этой матрице, имеет дугу из первой в первую и третью вершины и аналогично из третьей в первую и третью вершины, но переход во вторую вершину невозможен. Со второй вершины можно перейти во все три вершины.

Таким образом, первая и третья вершины образуют неприводимую компоненту, а вторая связана с ними. Очевидно, меняя местами второй и третий столбцы, а также вторую и третью строки, рассматриваемую матрицу можно привести к виду

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ . & . & . \\ A_2 & & A_3 \end{bmatrix}$$

где A_1 и A_3 – квадратные, A_1 – неприводимая матрицы.

Следующая теорема касается эквивалентности свойства неприводимости матрицы и сильной связности направленного графа матрицы.

Теорема 7.1. Комплексная матрица A неприводима в том и только в том случае, если ее направленный граф $D(A)$ — сильно связный.

Доказательство этой теоремы довольно очевидно. Любая степень приводимой матрицы A также приводима и, следовательно, имеет блок нулей в правом верхнем углу. Поэтому не существует пути между вершинами, соответствующими A_1, и вершинами, соответствующими A_2 и A_3. Наоборот, если граф не сильно связный, то существует блок вершин, которые не могут быть достигнуты, и подходящими перестановками соответствующая матрица может быть приведена к указанной выше форме.

Теорема 7.2. Квадратная матрица или неприводима, или может быть приведена путем перестановок индексов к виду:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k & 0 & \dots & 0 \\ A_{k+1,1} & A_{k+1,2} & \dots & A_{k+1,k} & A_{k+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,k} & A_{m,k+1} & \dots & A_m \end{bmatrix},$$

содержащему блок – диагональную матрицу с неприводимыми матрицами $A_i \left(i=1,\ldots,k\right)$ на диагонали. При этом, по крайней мере, одна из матриц с двойным индексом в каждой строке, в которой они появляются – ненулевая (см. [52, 53]).

Доказательство теоремы проводится в предположении, что если матрица приводима и может быть представлена в виде, данном в определении приводимой матрицы, или же ее диагональные блоки приводимы, то она вновь может быть представлена в такой форме. В свою очередь, если какой-либо из ее диагональных блоков приводим, он вновь представляется в соответствии со стандартной формой приводимой матрицы. В результате после соответствующей перестановки индексов, получим матрицу, все элементы которой над диагональными блоками равны нулю; все диагональные блоки неприводимы. Кроме того, соответствующей перестановкой индексов все строки, диагональные блоки которых только ненулевые матрицы, могут быть расположены так, чтобы распасться на части, как уже было показано выше.

Отметим, что каждый; из «изолированных» блоков $A_1,\ldots,A_k$ достижим в графотеоретическом смысле, из узлов, соответствующих строкам с двумя индексами, но не наоборот. Заметим также, что все матрицы с двумя индексами в каждом столбце могут быть просто записаны в виде строки блоков $R_1,R_2,\ldots,R_k$, Q, где Q, конечно, уже не является неприводимым. Приведенная выше форма является единственной с точностью до перестановок блочных индексов.

Можно было бы закончить и транспонированной формой, в которой блоки $R_1,R_2,\ldots,R_k$, Q образуют последний столбец нашей матрицы. Действительно, это та форма, которая будет использоваться позже, при рассмотрении «стохастических» матриц приоритетов.

Процесс построения нормальной формы матрицы приоритетов – прямой. Начинаем с любого элемента и заполняем в его столбце ненулевые приоритеты воздействий как компоненты собственного вектора всех тех элементов, которые имеют воздействие на него. Каждый из этих элементов, в свою очередь, входит в примыкающие столбцы со входящими ненулевыми приоритетами воздействий всех других элементов на них. Процесс продолжается до тех пор, пока еще есть новые элементы, которые влияют на это множество. Следует удостовериться в том, что новых элементов больше нет. Так получаем блок для неприводимого множества. Начиная с другого элемента, процесс повторяется для следующего блока и т. д.

7.3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ГЛАВНЫХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Как указывалось ранее, сначала будет представлена общая теорема существования и единственности при решении задачи о собственном значении для неотрицательной неприводимой матрицы (более общей, чем положительная обратносимметричная матрица). Это фактически и есть теорема, доказанная Фробениусом, который обобщил результат Перрона для положительной матрицы. Затем следует обсуждение и доказательство теоремы Перрона. Доказательство теоремы Фробениуса может быть найдено в [53].

Теорема 7.3. (Перрон–Фробениус). Пусть $A \geq 0$ – неприводимая матрица. Тогда:

1. A имеет действительное положительное простое (т. е. не кратное) собственное значение $\lambda_{\max}$, которое по модулю не меньше любого другого собственного значения матрицы A (некоторые из которых могут быть комплексными числами).

2. Собственный вектор A, соответствующий собственному значению $\lambda_{\max}$, имеет положительные компоненты и, по существу (с точностью до постоянного множителя), единственен.

3. Число $\lambda_{\max}$ (иногда называемое корнем Перрона матрицы A) удовлетворяет условию

$$\lambda_{\max} = \max_{x \geq 0} \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \min_{x \geq 0} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}; \; x \geq 0 \text{ – произвольно.}$$

Следствие. Пусть $A \geq 0$ неприводима и пусть $x \geq 0$ произвольно. Тогда корень Перрона удовлетворяет условию

$$\min_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \lambda_{\max} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i},$$

Теорема 7.4. (Перрон). В этой теореме утверждается то же, что и в предыдущей, с той разницей, что матрица $A > 0$ (и, следовательно, неприводима) и модуль $\lambda_{\max}$ строго превосходит модули всех других собственных значений.

Краткое доказательство теоремы Перрона может быть получено как результат доказательства следующих полезных фактов о положительных $(n \times n)$-матрицах [25]. Последовательность этих фактов такова: пусть A – положительная $(n \times n)$-матрица, $\lambda_{\max}$ – ее наибольшее собственное значение.

1. $\lambda_{\max}$ ограничено сверху и снизу соответственно максимальной и минимальной строчными суммами матрицы A.

Следовательно, если A – стохастическая матрица, т. е. если её строчные суммы равны единице, то $\lambda_{\max} = 1$.

2. Для стохастической матрицы A

$$\lim_{k \to \infty} A^k = e\upsilon,$$

где υ – положительный вектор-строка, $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n)$,

$$\sum_{i=1}^{n} \upsilon_i = 1 \text{ и } e = (1, 1, \ldots, 1)^T.$$

3. Для положительной матрицы A существует положительное число λ, ненулевая вектор-строка υ и ненулевой вектор-столбец ω, такие, что

$$\lim_{k \to \infty} \frac{A^k}{\lambda^k} = \omega\upsilon.$$

4. λ есть наибольшее собственное значение A и называется *главным собственным значением*, а ω и υ – *главные собственные векторы*, единственные с точностью до постоянного множителя.

5. ω ортогонален всем не главным собственным векторам-столбцам, а υ – всем не главным собственным векторам-строкам.

6. Если λ_1 – наибольшее собственное значение A, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, и если ω_i – правый собственный вектор, соответствующий λ_i, то

$$\lim_{k \to \infty} \frac{A^k e}{e^T A^k e} = c\omega_1.$$

Эту важную теорему, сформулированную в таком виде, очень легко доказать. Но ее можно и обобщить.

7. Теорема верна и в случае, когда $A \geq 0$, $A^p > 0$ для некоторого $p \geq 0$ при тех же прочих условиях.

Теорема 7.5.

1. $$\left[\begin{aligned} &\min_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq \lambda_{\max} \leq \max_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ ; \\ &\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \lambda_{\max} \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ . \end{aligned}\right.$$

Неравенство имеет место, когда суммы не одинаковы.

2. $$\lambda_{\max} = \lim_{k\to\infty}\left[tr\left(A^k\right)\right]^{1/k}.$$

3. $$\lambda_{\max} = \max_{u>0}\min_i \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j}{u_i} = \min_{u>0}\max_i \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j}{u_i}.$$

4. $$\lambda_{\max} = \max_{u>0}\min_j \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i}{u_j} = \min_{u>0}\max_j \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i}{u_j}.$$

Доказательство. Компоненты вектора Ae представляют собой суммы строк матрицы A. Пусть наибольшая сумма строк есть M, а наименьшая – m. Тогда $me \leq Ae \leq Me$, а равенство имеет место только при $m = M$.

Из выражения

$$\upsilon A = \lambda_{\max}\upsilon$$

имеем

$$\upsilon Ae = \lambda_{\max}\upsilon e,$$

$$\upsilon me \leq \lambda_{\max}\upsilon e \leq \upsilon Me.$$

Если теперь разделим неравенство на положительное число υe, то получим $m \leq \lambda_{\max} \leq M$, причём равенство вновь будет иметь место, если $m = M$. Аналогично для сумм столбцов.

Доказательство (2) получается либо из выражения

$$\lim_{k\to\infty}\left[tr\,1/\lambda^k A^k\right]^{1/k} = 1 = 1/\lambda\ \lim_{k\to\infty}\left[tr\ A^k\right]^{1/k},$$

либо из $\lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k = tr\ A^k$. Пусть во втором случае $\lambda_1 = \lambda_{\max}$, тогда

$$\lambda_1\left[1 + \left(\lambda_2/\lambda_1\right)^k + \ldots + \left(\lambda_n/\lambda_1\right)^k\right] = \left[tr\ A^k\right]^{1/k},$$

при $k \to \infty$, $\lambda_1 \to tr\,A^k$. Остальная часть доказательства здесь не приводится.

Теорема 7.6. Если A – положительная $(n \times n)$-матрица, у которой сумма элементов каждой строки равна единице, то существует положительная вектор-строка υ, $\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i = 1$, такая, что $\lim_{m\to\infty} A^m = e\upsilon$, где $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

Доказательство. Пусть y_0 – любой n-мерный вектор-столбец. Определим $y_m = A^m y_0$ и пусть a_m и b_m – максимальная и минимальная компоненты y_m соответственно. Пусть α – минимальный элемент матрицы A. Так как $y_{m+1} = Ay_m$, любая компонента вектора y_{m+1} получается умножением строки A на y_m, и, следовательно, имеем следующие границы для произвольной компоненты c вектора y_{m+1}:

$$(1-\alpha)b_m + \alpha a_m \le c \le \alpha b_m + (1-\alpha)a_m .$$

Это неравенство остается в силе для наибольшей и наименьшей компонент y_{m+r}, откуда

$$a_{m+1} \le \alpha b_m + (1-\alpha)a_m$$

(следовательно, a_m монотонно возрастает) и

$$(1-\alpha)b_m + \alpha a_m \le b_{m+1}$$

(следовательно, b_m монотонно убывает), или

$$-b_{m+1} \le -(1-\alpha)b_m - \alpha a_m$$

и

$$a_{m+1} - b_{m+1} < (1-2\alpha)(a_m - b_m).$$

Отсюда по индукции получаем

$$a_m - b_m \le (1-2\alpha)^m (a_0 - b_0).$$

Так как правая часть этого неравенства стремится к нулю, то a_m и b_m сходятся к общему пределу, и. следовательно, все компоненты y_m приближаются к нему же, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = Ce$ при $b_0 \le C \le a_0$ (равенство имеет место только при $a_0 = b_0$). Пусть $y_0 = \left(y_0^1, y_0^2, \ldots, y_0^n\right)$, где $y_0^i = 1$, $y_0^j = 0$, $j \ne i$. Тогда y_m есть i-й столбец матрицы A^m, и, как уже установлено, $y_m \to (c_i, \ldots, c_i)^T \equiv \upsilon^T$, причем $b_0 = 0$, $c_i > b_0 = 0$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} A^m = e\upsilon .$$

Отметим, что поскольку каждая строчная сумма A^m равна единице, то

$$\sum_{i=1}^{n} \upsilon_i = 1 .$$

Теорема 7.7. Если A – положительная $(n \times n)$-матрица, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{\lambda^k} = \omega\upsilon ,$$

где λ – положительная постоянная, υ – ненулевая вектор-строка, а ω – ненулевой вектор-столбец.

Краткое доказательство. Пусть

$S = \left\{ x \mid x = (x_1, \ldots, x_n)^T,\ x_t \ge 0,\ i = 1, \ldots, n,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1,\ т.е.\ fx = 1 \right\}$, где $f = (1, 1, \ldots, 1)$.

Рассмотрим отображение

$$Tx = \left[\frac{1}{fAx}\right] Ax,\ x \in S .$$

Это отображение положительно: так как $fx = 1$, то x имеет ненулевую компоненту, и, следовательно, $Ax > 0$ и $fAx > 0$. Далее

$$fTx = \left[\frac{1}{fAx}\right] fAx = 1,$$

и поэтому T отображает S в S. Так как A непрерывна, по теореме Брауера о неподвижной точке найдется точка ω, что

$$\left[\frac{1}{fA\omega}\right] A\omega = \omega.$$

Поскольку левая часть положительна, ω – положительна и $\lambda = fA\omega > 0$. Следовательно, $A\omega = \lambda\omega$, $\lambda > 0$, $\omega > 0$. Наконец, пусть D – диагональная матрица с $d_{ii} = \omega_i$ и $d_{ij} = 0$, $i \neq j$. Так как $\omega > 0$, D имеет обратную матрицу D^{-1}, также диагональную, с диагональными элементами $1/\omega_i$, т. е. $\omega = De$ и

$$\left[D^{-1}(1/\lambda)AD\right]e = \left[D^{-1}(1/\lambda)A\right]\omega = D^{-1}\omega = e.$$

Отсюда следует, что суммы строк матрицы $\left[D^{-1}(1/\lambda)AD\right]$ равны единице, т. е. эта матрица – стохастическая, и исходя из теоремы 7.6 найдётся такой вектор-строка υ^*, что

$$e\upsilon^* = \lim_{k\to\infty}\left[D^{-1}(1/\lambda)AD\right]^k = \lim_{k\to\infty} D^{-1}\left(1/\lambda^k\right)A^k D,$$

(т. е. строки предельной матрицы все одинаковы), откуда непосредственно получаем

$$\lim_{k\to\infty}\left(1/\lambda^k\right)A^k = De\upsilon^* D^{-1} = \omega\upsilon^* D^{-1} = \omega\upsilon.$$

Теорема 7.8. υ и ω – собственные векторы матрицы A, соответствующие собственному значению λ.

Доказательство.

$$(1/\lambda)A\omega\upsilon = (1/\lambda)A\lim_{k\to\infty}(1/\lambda)^k A^k = \lim_{k\to\infty}(1/\lambda)^{k+1} A^{k+1} = \omega\upsilon,$$

откуда имеем $A\omega\upsilon = \lambda\omega\upsilon$ и $A\omega\upsilon e = \lambda\omega\upsilon e$, и так как υe постоянная, то $A\omega = \lambda\omega$. Аналогично $\upsilon A = \lambda\upsilon$.

Следствие. Векторы υ и ω положительны.

Доказательство. Из равенства $A\omega = \lambda\omega$ имеем $(1/\lambda)A\omega = \omega$. Так как λ, A – положительны, а ω – неотрицателен (с некоторыми ненулевыми компонентами), все компоненты левой части равенства положительны, и, следовательно, ω – положителен; аналогично для υ.

Теорема 7.9. Все собственные векторы, соответствующие собственному значению λ, являются постоянными множителями ω и υ.

Доказательство. Если $Au = \lambda u$, то $A^k u = \lambda^k u$, а $(1/\lambda)^k A^k u = u$ для всех k. При $k \to \infty$ имеем $\omega\upsilon u = u$. Аналогично для векторов-строк.

Теорема 7.10. Модуль любого другого собственного значения h матрицы A удовлетворяет неравенству $|h| < |\lambda|$.

Доказательство. Если $Au = hu$, то $A^k u = h^k u$, а $(1/\lambda)^k A^k u = (h/\lambda)^k u$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ имеем

$$\omega\upsilon u = \lim_{k\to\infty}[h/\lambda]^k u,$$

и предел в правой стороне должен существовать, что возможно только при $h=\lambda$ или $|h|<|\lambda|$, причем в последнем случае предел равен нулю.

Собственное значение λ есть главное собственное значение матрицы A, которое обозначается $\lambda_{\max}$, а υ и ω – главные собственные векторы матрицы A.

Следствие. Главный собственный вектор-строка (столбец) — $\upsilon(\omega)$ ортогонален ко всем не главным собственным векторам-столбцам (строкам) матрицы A.

Доказательство. Рассмотрим равенство $\omega\upsilon u=0$ из доказательства предыдущей теоремы. Так как $\omega>0$, имеем $\upsilon u=0$, и, следовательно, υ ортогонален вектору-столбцу u. Аналогичный аргумент можно использовать, чтобы показать ортогональность ω ко всем не главным собственным векторам-строкам матрицы A.

Следствие. $\upsilon\omega=1$.

Доказательство. В условиях теоремы пусть $u=\omega$, тогда $h=\lambda$ и $\omega\upsilon\omega=\omega$. Так как $\upsilon\omega$ – число, получаем $\upsilon\omega=1$.

Замечание. $\upsilon\omega$ есть след матрицы $\omega\upsilon$, и, следовательно, этот след всегда равен единице.

Замечание. Система $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$, $i=1,\ldots,n$.

где $a_{ij}\geq 0$, $d_{ij}>0$, имеет неотрицательное решение $x_j\geq 0$, $j=1,\ldots,n$, если

$$a_{11}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0,\ldots,|A|>0.$$

Теорема 7.11 [182]. Если A – неотрицательная неприводимая матрица, то значение $\lambda_{\max}$ возрастает с увеличением любого элемента a_{ij}.

Доказательство. Пусть A – неотрицательная матрица, определим $B(\rho)=\rho I-A$, где ρ – действительный параметр [110]. Пусть M – множество всех ρ, для которых существует и не отрицательна обратная матрица $(\rho I-A)^{-1}$. Множество M непусто для $x>0$ и остается таким для сравнительно большого ρ, $\rho x>Ax$, т. е. $\rho x-Ax>0$, и это условие обеспечивает существование неотрицательного решения и эквивалентно вышеописанному условию на главные миноры. Так как M зависит от A, обозначим его $M(A)$.

Пусть $A'\geq A''\geq 0$. Тогда $M(A')\subset M(A'')$. В самом деле, заметим, что если $\rho\in M(A')$, то $(\rho I-A')x>0$ для некоторого $x>0$ и так как $\rho I-A''\geq\rho I-A'$, $(\rho I-A'')x>0$ для того же самого x, и, следовательно, $\rho\in M(A'')$. Теперь максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ матрицы $A>0$ есть $\inf\limits_{\rho\in M(A)}\rho$, для которого $(\rho I-A)^{-1}$ существует, т. е. это первое значение, для которого $|\rho I-A|=0$, ибо все другие собственные значения не превосходят $\lambda_{\max}$. Поэтому

$$\lambda_{\max}(A')=\inf_{\rho\in M(A')}\rho\geq\inf_{\rho\in M(A'')}\rho=\lambda_{\max}(A'').$$

Следовательно, $\lambda_{\max}$ – монотонная функция A.

Ниже показан важный результат, который заключается в том, что собственный вектор, соответствующий $\lambda_{\max}$, представляет собой нормализованные суммы элементов строк предельной матрицы в точности k-й степени A^k-матрицы A (а не суммы всех степеней A).

Теорема 7.12.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{e^T A^k e} = c\omega_1,$$

где $A > 0$, ω_1 – главный собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению λ_1, $\lambda_i \neq \lambda_j$ для всех i и j, ω_i – правый собственный вектор, соответствующий λ_i, а c – постоянная.

Доказательство. $e = a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n$, где $a_i,\ i = 1,\ldots,n$ – постоянные.

$$A^k e = a_1\lambda_1^k\omega_1 + \ldots + a_n\lambda_n^k\omega_n = \lambda_1^k\left[a_1\omega_1 + a_2\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^k\omega_2 + \ldots + a_n\left(\lambda_n/\lambda_1\right)^k\omega_n\right],$$

$$e^T A^k e = \lambda_1^k\left[b_1 + b_2\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^k + \ldots + b_n\left(\lambda_n/\lambda_1\right)^k\right];\ b_i = a_i e^T\omega_i.$$

Так как $\omega_1 > 0$, $b \neq 0$, что и требовалось доказать.

Теперь обобщим эту теорему.

Определение 7.2. Неотрицательная неприводимая матрица A примитивна тогда и только тогда, когда существует целое $m \geq 1$. такое, что $A^m > 0$. В противном случае матрицу называют *импримитивной*. Граф примитивной матрицы имеет длину пути между любыми двумя вершинами $\geq m$.

Из работ [50, 114, 182] известно, что неотрицательная неприводимая матрица A примитивна тогда и только тогда, когда A имеет единственный характеристический корень с максимальным модулем, и этот корень имеет кратность, равную единице.

Теорема 7.13. Для примитивной матрицы A

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{\left\|A^k\right\|} = c\omega,\quad \left\|A^k\right\| \equiv e^T A e,$$

где c – постоянная, а ω – собственный вектор, соответствующий $\lambda_{\max} \equiv \lambda_1$.

Доказательство. Допустим $A > 0$. Рассмотрим жорданову каноническую форму B матрицы A. Тогда для некоторой невырожденной матрицы N

$$NAN^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ . & . & . \\ 0 & & B_r \end{bmatrix} = B$$

где $B_i,\ i = 2,\ldots,r$ есть $m_i \times m_i$ жорданова блочная форма, которая имеет вид

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ & \lambda_i & & & 0 & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \lambda_i & & & & \\ & & 1 & & & & \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & & & & & \lambda_i & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

где $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$ – различные собственные значения с кратностями $m_2, \ldots, m_r$ соответственно, а $1 + \sum_{i=2}^{r} m_i = n$ – размерность матрицы A. Выбираем соответствующие базисные векторы для каждого подпространства жордановой формы

$$\begin{matrix} V_1 & & & \\ V_{21}, & V_{22}, & \ldots, & V_{2m_2} \\ V_{31}, & V_{32}, & \ldots, & V_{3m_3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{r1}, & V_{r2}, & \ldots, & V_{rm_r} \end{matrix}$$

и имеем

$$AV_1 = \lambda_1 V_1 ,$$
$$AV_{i1} = \lambda_i V_{i1} + V_{i2} ,$$
$$AV_{i2} = \lambda_i V_{i2} + V_{i3} ,$$
$$AV_{im_i} = \lambda_i V_{im_i} .$$

Отметим, что

$$B_i = \lambda_i I + u ,$$

где

$$u = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & 0 \\ & 1 & . & & \\ & & & . & \\ & & & & . \\ 0 & & & & 10 \end{bmatrix}$$

и

$$B_i^k = \lambda_i^k I + \left(\frac{k}{1}\right)\lambda_i^{k-1}u + \left(\frac{k}{1}\right)\lambda_i^{k-2}u^2 + \ldots + u^k ,$$

где u^k – нулевая матрица, если $k \geq n$, а если $k > n$ – диагональ единиц в u, сдвинутая вниз на каждую дополнительную степень u. Например,

$$u^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь пусть

$$e = a_1V_1 + a_{21}V_{21} + a_{22}V_{22} + \ldots + a_{2m_2}V_{2m_2} + a_{31}V_{31} + \ldots + a_{r\,m_r}V_{r\,m_r} ,$$

$$A^k e = a_1\lambda_1^k V_1 + \sum_{i=2}^{r}\sum_{j=1}^{m_r}\sum_{i=0}^{j} a_{ij}\begin{bmatrix} k \\ j-l \end{bmatrix}\lambda_i^{k-l}V_{ij} ,$$

$$\left\|A^k\right\| = c_1\lambda_1^k + p_{2,k}\lambda_2^k + p_{2,k-1}\lambda_2^{k-1} + \ldots + p_{2,1}\lambda_2 + \ldots + p_{rk}\lambda_r^k + \ldots + p_{r,1}\lambda_r + c_2 ,$$

где p_{ij} – полиномы от k, а c_1, c_2 – постоянные, не зависимые от k. Выражение $\dfrac{A^k e}{\left\|A^k\right\|}$, будет иметь член

$$\frac{a_1\lambda_1^k V_1}{c_1\lambda_1^k + p_{2,k}\lambda_2^k + p_{2,k-1}\lambda_2^{k-1} + \ldots + c_2} ,$$

предел которого при $k \to \infty$ будет $\left(a_1/c_1\right)V_1$, так как λ_1 – единственное наибольшее собственное значение.

Типичный член $\left(i \geq 2\right)$

$$\frac{a_{il}\begin{bmatrix} k \\ j-l \end{bmatrix}\lambda_i^{k-1}V_{ij}}{c_1\lambda_1^k + \ldots + p_{ik}\lambda_i^k + \ldots + c_2}$$

будет стремиться к нулю при $k \to \infty$ (так как λ_1 превосходит все другие λ). Полагая $e = \left(a_1/c_1\right)$ и $V_1 = \omega$, получаем теорему для $A > 0$.

Замечание. Отметим, что $c_1 = 0$ в том и только в том случае, если $a_1 = 0$. Можно показать, что $a_1 \neq 0$, исходя из того, что все a_{ij} в разложении e и все V_i действительны и положительны. Малое возмущение e оставляет $a_1 \neq 0$, а результат при этом останется тем же самым.

Теперь для доказательства теоремы при $A \geq 0$ отметим, что из-за $a_{ij} > 0$ существует такое положительное целое m, что $A^m > 0$ (т. е. при движении по петлям в конечном счете возможно получение пути любой желаемой длины между произвольной парой вершин соответствующего графа). Приведенное выше доказательство применимо к A^m и его наибольшему собственному вектору $\omega\left(A^m\right)$. Действительно, так как A – ограниченный линейный оператор (и поэтому непрерывный), имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^{mk+i}}{\left\|A^{mk+i}\right\|}=c\omega\left(A^m\right),\ 0\le i<m.$$

Легко убедиться, что $\omega\left(A^m\right)$ есть искомый неотрицательный собственный вектор.

Это завершает доказательство.

Замечание. Следующая неотрицательная матрица неприводима (ее граф – сильно связный, так как у любой пары вершин имеется путь, связывающий их):

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Эта матрица не удовлетворяет условиям теоремы, поскольку она импримитивна, имея 2 как единственное собственное значение кратности 3. Для пояснения этого отметим следующее: $Ae=\left(2,4,1\right)^T$; нормализацией получаем $x_1=\left(2/7,4/7,1/7\right)^T$; $Ax_1=\left(8/7,4/7,2/7\right)^T$; нормализацией получаем $x_2=\left(4/7,2/7,1/7\right)^T$; $Ax_2=\left(4/7,4/7,4/7\right)^T$; нормализацией получаем $x_3=\left(1/3,1/3,1/3\right)^T$; $Ax_3=\left(2/3,4/3,1/3\right)^T$ и нормализацией получаем $x_4=\left(2/7,4/7,1/7\right)^T$, что то же самое, что и x_1 с зацикливанием вместо сходимости.

7.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННОГО ВЕКТОРА

Вычисление главного собственного вектора основано на использовании теоремы 7.13. Она утверждает, что нормализованные строчные суммы степеней примитивной матрицы (и, следовательно, положительной матрицы) в пределе дают искомый собственный вектор. Поэтому краткий вычислительный способ получения данного вектора – возводить матрицу в степени, каждая из которых представляет собой квадрат предыдущей. Строчные суммы вычисляются и нормализуются. Вычисления прекращаются, когда разность между этими суммами в двух последовательных вычислениях меньше заранее заданной величины.

7.5. СОГЛАСОВАННОСТЬ

Обратносимметричные неотрицательные матрицы могут иметь комплексные собственные значения. Следовательно, они не допускают просто общей характеристики. Однако поскольку максимальное собственное значение лежит между наибольшей и наименьшей из строчных сумм, согласованная матрица имеет собственное значение, равное сумме любого из ее столбцов. Как будет показано, малое возмущение не сильно меняет максимальное собственное значение и остальные собственные значения находятся в окрестности нуля, причем их сумма – действительное число.

Выбор возмущения, наиболее соответствующего описанию влияния несогласованности на вычисляемый собственный вектор, зависит от психологического процесса, имеющего место при заполнении матрицы попарных сравнений исходных данных. Предположим, что все возмущения, заслуживающие внимания, могут (быть сведены к общему виду $a_{ij}=\left(\omega_i/\omega_j\right)\varepsilon_{ij}$. Согласованность имеет место, если $\varepsilon_{ij}=1$. Например,

$$\left(\omega_i/\omega_j\right)+a_{ij}=\left(\omega_i/\omega_j\right)\left[1+\left(\omega_j/\omega_i\right)a_{ij}\right].$$

Теперь получим некоторые элементарные, однако существенные результаты для согласованных матриц. Начнем с выражения

$$\lambda_{\max}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\omega_j/\omega_i\right),$$

которое является i-й компонентой $A\omega=\lambda_{\max}\omega$, и определим

$$\mu=-\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=2}^{n}\lambda_i .$$

Тогда из $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=n$ следует, что $\mu=\left(\lambda_{\max}-n\right)/\left(n-1\right)$; $\lambda_{\max}\equiv\lambda_1$, и так как

$$\lambda_{\max}-1=\sum_{j\neq i}a_{ij}\left(\omega_j/\omega_i\right),$$

находим, что

$$n\lambda_{\max}-n=\sum_{1\le i<j\le n}\left[a_{ij}\left(\omega_j/\omega_i\right)+a_{ji}\left(\omega_i/\omega_j\right)\right],$$

поэтому

$$\mu=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{n}{n-1}+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\left[a_{ij}\left(\omega_j/\omega_i\right)+a_{ji}\left(\omega_i/\omega_j\right)\right].$$

Подставляя $a_{ij}=\left(\omega_i/\omega_j\right)\varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{ij}>0$, приходам к уравнению

$$\mu=-1+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\left[\varepsilon_{ij}+\left(1/\varepsilon_{ij}\right)\right].$$

Заметим, что при $\varepsilon_{ij}\to 1$, т. е. при достижении согласованности, $\mu\to 0$. Кроме того, μ выпукла по ε_{ij}, поскольку $\varepsilon_{ij}+\left(1/\varepsilon_{ij}\right)$ выпукло (и имеет минимум при $\varepsilon_{ij}=1$) и сумма выпуклых функций выпукла. Поэтому μ мало или велико в зависимости от того, близка или далека величина ε_{ij} от единицы соответственно (т. е. близки или далеки мы от согласованности). Наконец, если напишем $\varepsilon_{ij}=1+\delta_{ij}$, то при $\delta_{ij}>-1$ имеем

$$\mu=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\left[\delta_{ij}^2-\frac{\delta_{ij}^2}{1+\delta_{ij}}\right].$$

Теорема 7.14. $\lambda_{\max}\ge n$.

Доказательство.

$$\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\delta_{ij}^2}{1+\delta_{ij}},$$

что ≥ 0, так как $a_{ij}=\left(\omega_i/\omega_j\right)\left(1+\delta_{ij}\right)$, при $\delta_{ij}>-1$.

Теорема 7.15. Положительная обратносимметричная матрица согласована тогда и только тогда, когда $\lambda_{\max} = n$.

Доказательство. Если A согласованна, то $\delta_{ij} = 0$ и $\lambda_{\max} = n$. Наоборот, используя полученный выше результат, отмечаем, что $\lambda_{\max} = n$, $\delta_{ij} = 0$ при любом выборе i и j, следовательно, матрица A – согласованна.

Таким образом, для достижения согласованности желательно, чтобы μ было близко к нулю, или, что то же самое, $\lambda_{\max}$ было близко к своей нижней границе n. Интересно отметить, что $(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$ можно интерпретировать в терминах статистической среднеквадратичной ошибки. Действительно, допустим, что $|\delta_{ij}| < 1$ (и, следовательно, $\delta_{ij}^3 / (1+\delta_{ij})$) мало по сравнению с δ_{ij}^2). Это разумное допущение для «несмещенного» суждения, которое ограничено «естественной» наибольшей нижней границей – 1 для δ_{ij} (так как a_{ij} должно быть больше нуля) и будет стремиться к симметричной оценке около нуля в интервале $(-1,1)$. Теперь $\mu \to 0$ при $\delta_{ij} \to 0$. Умножение на 2 даёт дисперсию δ_{ij}. Поэтому 2μ и есть эта дисперсия.

Малые возмущения элементов положительной обратносимметричной матрицы вызывают малые возмущения в собственных значениях от их исходной величины. Вообще говоря, это неверно для положительных матриц. Докажем этот факт для $\lambda_{\max}$.

Теорема 7.16. Пусть $\delta = \max\limits_{i,j} \delta_{ij}$, тогда

$$\lambda_{\max} - n < \frac{1}{n} \sum_{1 \le i < j \le n} \delta_{ij}^2 \le \frac{n-1}{2} \delta^2 .$$

Доказательство очевидно.

Таким образом, если возмущение (или ошибка в суждении) мало, и число сравниваемых элементов также мало (например, менее десяти), то отклонение $\lambda_{\max}$ от n также мало. Отметим вновь, что для того, чтобы остаться вблизи согласованности, нужно, чтобы n было мало. Например, $\delta = 0,1$, $n = 7$ дает $\lambda_{\max} - n < 0,04$, а $\delta = 0,9$, $n = 7$ дает $\lambda_{\max} - n < 2,43$.

Замечание. Неотрицательная матрица $A = (a_{ij})$ с $a_{i,i+1} = 1$ и $a_{ij} = 0$ – для остальных i, j имеет все собственные значения равными нулю, но та же самая матрица с a_{n1}, замененным на ε, где $\varepsilon > 0$ мало, имеет максимальное собственное значение $\lambda_{\max} = \varepsilon^{1/n}$, которое стремится к единице при увеличении n. Поэтому, хотя $\lambda_{\max}$ изменяется непрерывно с коэффициентом ε, ее величина становится большой даже для малых ε (этот факт сообщил мне А. Лауб из Массачусетского технологического института).

В [168] отмечено, что, используя свойство обратной симметричности $a_{ij} = 1/a_{ji}$ из равенства $a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$, имеем $a_{ij} a_{jk} a_{ki} = 1$. Следовательно, согласованность для обратносимметричной матрицы значит, что все контуры длины три имеют единичную интенсивность.

Предполагая $|\delta_{ij}| < 1$ и рассматривая треугольные контуры, находим

$$a_{ij}a_{jk}a_{ki} = \left(1+\delta_{ij}\right)\left(1+\delta_{jk}\right)\left(1-\delta_{ik}\right) \approx 1+\delta_{ij}+\delta_{jk}-\delta_{ik},$$

и, поскольку $\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}$, имеем $\sum_{i,\,j,\,k} a_{ij}a_{jk}a_{ki} = n^2\lambda_{\max}$.

Для $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$ эта сумма становится равной $n^2\left(\lambda_{\max}-n\right)+n\left(n-1\right)\left(n-2\right)$, так как, подставляя $a_{pp}=1$, $a_{pq}=a_{qp}^{-1}$, имеем $n^2+2n\left(n-1\right)$ членов, величина которых равна единице. Усредняя по количеству членов, т. е. $n\left(n-1\right)\left(n-2\right)$ в результате получаем $\left[n/\left(n-2\right)\right]\left(\lambda_{\max}-n\right)/\left(n-1\right)+1$, что справедливо при $n \geq 3$. В любом случае предметом нашего внимания является разность $\lambda_{\max}-n$.

Теперь проверим гипотезу о согласованности. Полная согласованность может быть сформулирована в виде нулевой гипотезы:

$$H_0 : \mu = 0,$$

и мы проверяем ее по отношению к односторонней альтернативе

$$H_1 : \mu > 0.$$

Соответствующая тестовая статистика будет

$$m = \frac{\tilde{\lambda}_{\max}-n}{n-1},$$

где $\tilde{\lambda}_{\max}$ – максимальное наблюдаемое собственное значение матрицы, элементы которой a_{ij} содержат случайную ошибку. Установление статистической меры для согласованности требует нахождения распределения статистики m. Несмотря на то, что её специфическая форма выходит за рамки материала этой главы, заметим, что m соответствует неотрицательному вероятностному распределению, дисперсия которого есть удвоенное среднее $\overline{x}$, и представляется совершенно аналогичным распределению x^2, если предположить, что все δ_{ij}, есть $N\left(0,\sigma\right)^2$ на интервале $\left(-1,1\right)$. Для нашей цели при неизвестном распределении используем общепринятое отношение $\left(\overline{x}-\mu_0\right)/\sqrt{2x}$ при $\mu_0=0$, т. е. используем $\sqrt{x/2}$ в качественном тесте для подтверждения нулевой гипотезы, когда тестовая статистика, допустим, ≤ 1. Поэтому при $x>2$. можно измерять несогласованность.

Более подходящий метод проверки статистики m заключается в используемом нами сравнении ИС с СИ.

Замечание. Заметим, что для матриц $A=\left(a_{ij}\right)$, $W=\left(\omega_i/\omega_j\right)$ имеем

$$\left(A-W\right)\omega = \left(\lambda_{\max}-n\right)\omega,$$

откуда видно, что аппроксимация $\left(a_{ij}\right)$ посредством $\left(\omega_i/\omega_j\right)$ тем лучше, чем ближе $\lambda_{\max}$ к n.

Возвращаясь к представлению

$$a_{ij} = \omega_i/\omega_j + \left(\omega_i/\omega_j\right)\delta_{ij},$$

находим, что

$$\delta_{ij}^2 = \left[a_{ij}\left(\omega_i/\omega_j\right)-1\right]^2.$$

Таким образом, заменив a_{ij} на ω_i / ω_j, получим δ_{ij}^2, сведя тем самым к нулю величину $2(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$.

Следовательно, всякий раз, когда $|\delta_{ij}| < 1$, аппроксимация любого a_{ij} величиной ω_i / ω_j приближает нас к согласованности (см. также обсуждение метода наименьших квадратов, которое будет проведено позже).

Теорема 7.17. Если положительная матрица A согласованна, то каждая строка является положительным кратным любой заданной строки.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что каждая строка является положительным множителем i-й строки. Из отношения $a_{jk} = a_{ik} / a_{ij}$ следует, что, зафиксировав j и положив $k = 1, 2, \ldots, n$, j-я строка будет равна i-й строке, умноженной на положительную постоянную $(1/a_{ij})$.

Замечание. Очевидно, что обратное утверждение этой теоремы неверно. Матрица единичного ранга может и не быть согласованной. Например, в матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

элемент a_{21} не равен a_{11} / a_{12}.

Таким образом, согласованная матрица при $a_{ii} = 1$ имеет следующий общий вид:

$$\begin{bmatrix} a_{i1}/a_{i1} & a_{i2}/a_{i1} & \ldots & a_{in}/a_{i1} \\ a_{i1}/a_{i2} & a_{i2}/a_{i2} & \ldots & a_{in}/a_{i2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}/a_{in} & a_{i2}/a_{in} & \ldots & a_{in}/a_{in} \end{bmatrix}.$$

Так как матрица $A = (\omega_i / \omega_j)$ имеет вид транспонированной по отношению к приведенной матрице, она согласованна.

Теорема 7.18. Если A – положительная и согласованная матрица, то $a_{ii} = 1$ и $a_{ij} = 1/a_{ji}$.

Доказательство. Из определения следует, что $a_{ii} = a_{ij} a_{ji}$ и, следовательно, $a_{ii} = 1$ для всех i. Также из $a_{ii} = a_{ij} a_{ji}$ следует,, что $a_{ij} = a_{ii} / a_{ji} = 1/a_{ji}$.

Теорема 7.19. Положительная матрица A согласованна в том и только в том случае, если она единичного ранга и элементы её главной диагонали равны единице.

Доказательство. Если A согласованна, то $a_{ii} = 1$. Также

$$a_{ij} = a_{1j} / a_{1i} = (1/a_{i1}) a_{1j}$$

и i-я строка есть первая строка, умноженная на $(1/a_{1i})$, и, следовательно, ранг A равен единице. Наоборот, если ранг A равен единице и $a_{ii} = 1$ для всех i, то каждая строка является кратной первой строке, т. е.

$$a_{ij} = c_i a_{1j},\ a_{jk} = c_j a_{1k},\ a_{ik} = c_1 a_{1k},\ a_{jj} = c_j a_{1j},$$

$$a_{ij} a_{jk} = c_i c_j a_{1j} a_{1k} = c_i c_j a_{1j} (a_{ik} / c_i) = c_j a_{1j} a_{ik} = a_{jj} a_{ik} = a_{ik},$$

и матрица A согласованна.

Перейдем к иллюстрации понятия согласованности на языке теории графов.

Определение 7.3. Интенсивность суждений, относящихся к пуль из i в j (называемая интенсивностью пути), равна произведению интенсивностей, соответствующих дугам этого пути.

Следующая теорема вносит ясность относительно связи, существующей между интенсивностями путей и согласованностью. Напомним, что перекрывающее дерево с n вершинами имеет $n-1$ ребер. Оно является связным графом, включающим все вершины и не имеющим контуров. Поэтому имеется единственный путь между любой парой вершин.

Теорема 7.20. Необходимым и достаточным условием существования единственной положительной согласованной матрицы является то, что объекты (как вершины) и соединяющие их суждения (как дуги) формируют перекрывающее дерево.

Доказательство. *Необходимость*. Если объекты формируют контур, то имеется не единственный путь между двумя вершинами в контуре, что дает два различных значения для одного и того же элемента. Все объекты должны образовывать дерево, иначе суждения для связывания изолированных объектов были бы произвольными, что нарушило бы единственность матрицы.

Достаточность. Для каждой дуги перекрывающего дерева мы используем интенсивность вдоль единственного пути для получения интенсивностей между объектами i и j. Это определяет матрицу $A=\left(a_{ij}\right)$.

Для доказательства согласованности матрицы A рассмотрим любую строку, например i-ю. Для любой пары вершин j и k нужно показать, что a_{jk}, определенная произведением дуг на пути jk, дана величиной a_{ik}/a_{ij}, где a_{ik} и a_{ij} – соответствующие произведений интенсивностей дуг на путях, соединяющих i с k и i с j. Рассмотрим два случая:

1. i лежит на пути между j и k. В этом случае $a_{jk}=a_{ji}a_{ik}=a_{ik}/a_{ij}$.

2. i не лежит между j и k, тогда:

а) i, j и k образуют путь; в этом случае путь, определяющий a_{jk}, дается величиной a_{ik}/a_{ij}, если j находится между i и k и обратной величиной a_{ij}/a_{ik}, т. е. a_{ik}/a_{ij}, если k находится между i и j, так как путь должен проходить от j к k, а не от k к j;

б) i, j и k образуют вилку в m (см. рис. 7.1). Тогда

$$a_{jk}=a_{im}a_{mk}=a_{jm}a_{mi}a_{im}a_{mk}=a_{ji}a_{ik}=a_{ik}/a_{ij}\ .$$

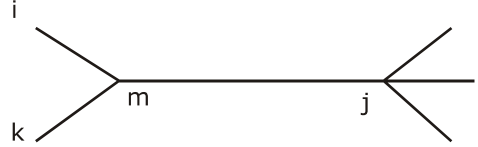


Рис. 7.1

Теорема 7.21. Если A – согласованная матрица, то $A^k=n^{k-1}A$.

Доказательство. Из теоремы Сильвестра имеем

$$f\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}f\left(\lambda_i\right)\frac{\prod\limits_{j\neq i}\left(A-\lambda_i I\right)}{\prod\limits_{j\neq i}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)}\ .$$

Эта формула справедлива и для случая $f(A) = A^k$ (для кратных собственных значений), когда кратное собственное значение равно нулю. Подставляя сначала $f(A) = A$, а затем $f(A) = A^k$, в обоих случаях при $\lambda_1 = n$, $\lambda_j = 0$, $j \neq 1$, получаем

$$A^{n-1} = n^{n-2} A, \quad A^k = n^{k-n-1} A^{n-1}$$

соответственно. Подстановка A^{n-1} из первого результата во второй дает $A^k = n^{k-1} A$.

Теорема 7.22. Любой столбец матрицы $A = (\omega_i / \omega_j)$ является решением задачи о собственном значении $A\omega = n\omega$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

Доказательство. Так как любой столбец матрицы имеет вид $\left[\omega_1/\omega_j, \omega_2/\omega_j, \ldots, \omega_n/\omega_j\right]^T$, то он является просто кратным ω и, следовательно, решением задачи.

Из последней теоремы получается предыдущая теорема, так как если обозначить столбцы A через $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то $A \cdot A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (na_1, na_2, \ldots, na_n) = nA$.

Теорема 7.23. Любая строка матрицы $A = (\omega_i / \omega_j)$ есть решение задачи $\upsilon A = n\upsilon$.

Доказательство очевидно.

Следствие. Компоненты правого и левого собственных векторов, ω и υ, являются обратными величинами с точностью до постоянного множителя. (Будем называть их *двойственными* векторами.)

Определим *норму* матрицы A как $\|A\| = e^T A e$ (т. е. она является суммой всех элементов A).

Как известно, для примитивной матрицы A

$$\lim_{k \to \infty} \frac{A^k e}{\|A^k\|} = c\omega_{\max},$$

где c – постоянная, $\omega_{\max}$ – нормализованный главный собственный вектор A. Следующая теорема является упрощенной версией этой теоремы для согласованных матриц.

Теорема 7.24. Если A положительная согласованная $(n \times n)$-матрица, то $Ae = C\omega$, где $C > 0$ постоянная и ω удовлетворяет равенству $A\omega = n\omega$.

Доказательство. Вектор Ae является суммой строк A и, очевидно, постоянным множителем любого столбца. Поэтому он является решением задачи о собственном значении.

Другой вариант доказательства. Легко показать, что A имеет единичный ранг тогда и только тогда, когда существуют векторы x и y, такие, что $A = xy^T$. Отсюда

$$A\omega = (y, \omega)x = n\omega, \quad (y, \omega) = y_1\omega_1 + \ldots + y_n\omega_n,$$

и, следовательно,

$$A\omega = (y, e)x = (y, e)\frac{n}{(y, \omega)} \equiv C\omega.$$

Следствие 1. Если $A = (\omega_i / \omega_j)$, то $C\omega_i = \omega_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \omega_i$.

Следствие 2.

$$\frac{A^k e}{e^T A^k e} = \frac{n^{k-1} Ae}{n^{k-1} e^T Ae} = \frac{Ae}{e^T Ae} = C(\omega_1, \ldots, \omega_n),\ C > 0 .$$

Следующая теорема показывает, что в случае согласованных матриц компоненты собственного вектора изменяются монотонно с изменениями отдельных элементов.

Теорема 7.25. (Теорема о монотонности.) Пусть $A = (a_{ij})$ – положительная согласованная матрица с главным собственным вектором $\omega = (\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n)$. Заменим один элемент a_{xy} на $a_{xy} + \varepsilon > 0$ и, используя строку x, построим новую согласованную матрицу $A^* = (a^*_{ij})$. Пусть $\omega^* = (\omega^*_1,\ \ldots,\ \omega^*_n)$ – главный собственный вектор матрицы A^*. Тогда $\omega^*_x > \omega_x$.

Доказательство. Так как и A и A^* согласованны, любой нормализованный столбец дает главный собственный вектор. Рассмотрим столбец, содержащий $1/a_{xy}$ в матрице A, и соответствующий столбец, содержащий $1/(a_{xy} + \varepsilon)$ в матрице A^*. Два столбца идентичны за исключением этого единственного элемента. Сумма элементов столбца в A^* меньше, чем сумма элементов столбца в A. Поэтому, нормализуя данный столбец, получаем большее отношение для всех тех элементов, которые не меняются в обеих матрицах. В частности, это верно для ω^*_x, поэтому $\omega^*_x > \omega_x$.

В дальнейшем обобщим эту теорему на обратносимметричные матрицы порядка 2, 3 и 4.

Теорема 7.26. Если A – положительная согласованная матрица и A' получена из A вычеркиванием i-й строки и i-го столбца, то A' – согласованна и ее соответствующий собственный вектор получается из A, если положить $\omega_i = 0$ и нормализовать компоненты.

Доказательство. Для любой заданной строки A, например для первой, имеем $a_{ij} = a_{1i}/a_{1j}$ и i-я строка A зависит от элемента i-го столбца в его первой строке. Аналогичное следует из $a_{ik} = a_{1k}/a_{1j}$. Поэтому ни один элемент в A' не зависит от i-й строки или i-го столбца A и, следовательно, A' также согласованна. Так как их элементы совпадают за исключением i-й строки и i-го столбца A и решение задачи о собственном значении при согласованной матрице получается из любого нормализованного столбца, получаем утверждение теоремы.

Замечание. В общем случае, если $A = (a_{ij})$ – матрица парных сравнений, а $A' = (a'_{ij})$ при $a'_{ij} = a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq k$, $j \neq k$ и $a'_{ij} = 0$, $i = k$ или $j = k$, и если нормализованные собственные векторы уравнений $A\omega = \lambda_{\max}\omega$ и $A'\omega' = \lambda_{\max}\omega'$ – соответственно ω и ω', то $\omega'_k = 0$, однако $\omega'_\alpha/\omega'_\beta \neq \omega_\alpha/\omega_\beta$ для всех α и β. Другими словами, исключение одной строки из матрицы парных сравнений не вызывает пропорционального перераспределения весов среди других строк.

Следующая теорема показывает, что отношения порядка между отдельными a_{ij} и ω_i/ω_j довольно сложным образом зависят от всей матрицы A и ее степеней.

Теорема 7.27. Для примитивной матрицы A имеем, что $a_{ij} \geq a_{kl}$, тогда и только тогда, когда $\omega_i/\omega_j \geq \omega_k/\omega_l$, при условии, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{p\neq j} a_{ip}\left(A^m e\right)_p}{\left(A^m e\right)_j} \geq \lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{q\neq j} a_{kq}\left(A^m e\right)_q}{\left(A^m e\right)_l}$$

($\left(\,\cdot\,\right)_p$ – означает p -ю компоненту вектора).

Доказательство. Из равенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j = \lambda\omega_i$$

имеем

$$a_{ij} = \lambda\omega_i/\omega_j - \left(1/\omega_j\right)\sum_{p\neq j} a_{ip}\omega_p$$

и

$$a_{kl} = \lambda\omega_k/\omega_l - \left(1/\omega_l\right)\sum_{q\neq l} a_{kq}\omega_q \ .$$

Поэтому $a_{ij} \geq a_{kl}$ только при

$$\frac{\lambda\omega_i}{\omega_j} \geq \frac{\lambda\omega_k}{\omega_l} + \left(1/\omega_j\right)\sum_{p\neq j} a_{ip}\omega_p - \left(1/\omega_l\right)\sum_{q\neq l} a_{kq}\omega_q \ .$$

Следовательно, теорема верна, если имеет место следующее неравенство:

$$\left(1/\omega_j\right)\sum_{p\neq j} a_{ip}\omega_p \geq \left(1/\omega_l\right)\sum_{q\neq l} a_{kq}\omega_q$$

Используя теорему о пределе для примитивной матрицы, заменим каждый ω_s на

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\left(A^m e\right)_s}{e^T A^m e},$$

что завершает доказательство.

Теперь обратимся к важному обобщению предыдущих результатов. Будем считать, что наш разум работает фактически с попарными сравнениями, однако a_{ij} являются не оценками ω_i/ω_j, а некоторой функцией – $a_{ij}\left(\omega_i/\omega_j\right)$. Например, по наблюдениям Стивенса (см. [22]) a_{ij}, осознаваемый для протетических явлений (процессов добавления возбуждения к возбуждению), принимает вид $\left(\omega_i/\omega_j\right)^a$, где a лежит где-то между 0,3 (в случае оценки громкости) и 4 (в случае оценки электрического удара). Другими случаями являются: яркость – от 0,33 до 0,50, длина – 1,1, продолжительность во времени – 1,15, численность – 1,34, тяжесть – 1,45 и скорость – 1,77. Для метатетических явлений (процессов замещения возбуждения возбуждением), по мнению Стивенса, степенной закон неприменим, т. е. для процессов мышления $a = 1$.

Эти наблюдения обусловливают интерес к изучению общего решения $g_i\left(\omega_i\right)$, $i = 1,\ldots,n$; задачи о собственном значении, где предполагается условие согласованности вида

$$f\left(a_{ij}\right) f\left(a_{jk}\right) = f\left(a_{ik}\right),$$

для которого матрица также имеет единичный ранг. Наш основной результат – следующий.

Теорема 7.28. (Степенной закон собственного значения.) Если матрица $A=\left[a_{ij}\left(\omega_i/\omega_j\right)\right]$ порядка n удовлетворяет обобщенному условию согласованности, то задача о собственном значении

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\omega_i/\omega_j\right) q_j\left(\omega_j\right)=n q_i\left(\omega_i\right),\ i=1,\ldots,n,$$

имеет решение в виде собственного вектора

$$\left(\omega_1^a,\ldots,\omega_n^a\right)\equiv\left[q_1\left(\omega_1\right),\ldots,q_n\left(\omega_n\right)\right].$$

Доказательство. Выражение $a_{ij}\left(\omega_i/\omega_j\right)=g_i\omega_i/g_j\omega_j$ имеет место при решении $g_i\left(\omega_i\right)$, $i=1,\ldots,n$, задачи о собственном значении. Если подставим его в условие согласованности, то получим

$$f\left[g_i\left(\omega_i\right)/g_j\left(\omega_j\right)\right] f\left[g_j\left(\omega_j\right)/g_k\left(\omega_k\right)\right]=f\left\{\left[g_i\left(\omega_i\right)/g_k\left(\omega_k\right)\right]\ \left[g_j\left(\omega_j\right)/g_k\left(\omega_k\right)\right]\right\}.$$

Или, если положим $x=g_i\left(\omega_i\right)/g_j\left(\omega_j\right)$, $y=g_j\left(\omega_j\right)/g_k\left(\omega_k\right)$, то получим $f(x)f(y)=f(xy)$. Это функциональное уравнение имеет общее решение $f(x)=x^a$.

Таким образом, обобщая условие согласованности для A, находим, что обобщение соответствующей задачи о собственном значении (с $\lambda_{\max}=n$) возможно, если заменим a_{ij} на постоянную степень a его аргумента. Однако мы знаем, что $a_{ij}=\omega_i/\omega_j$ при $a=1$, поэтому, вообще говоря, $a_{ij}=\left(\omega_i/\omega_j\right)^a$, из чего следует, что

$$g_i\left(\omega_i\right)/g_j\left(\omega_j\right)=\left(\omega_i/\omega_j\right)^a,\ i,j=1,\ldots,n,$$

т. е. $g_i\left(\omega_i\right)=\omega_i^a=g\left(\omega_i\right)$, $i=1,\ldots,n$.

Эта теорема показывает, что решение задачи о собственном значении, удовлетворяющей условию согласованности, дает оценки в степенной шкале. В тех приложениях, где для получения данных используется знание, а не наши ощущения, следует ожидать равенства степени единице, и, следовательно, здесь мы будем иметь оценку в основной шкале. Это наблюдение может быть полезным в социальных приложениях.

Замечание. Отметим, что различные матрицы попарных сравнений могут давать один и тот же собственный вектор. Это довольно удачное обстоятельство, так как позволяет заменять признаки и все же получать тот же самый собственный вектор в качестве ответа. Поэтому можно получить один и тот же результат с различных точек зрения и выбрать те матрицы, которые мы предпочитаем. С другой стороны, мир познания может быть сведен к малому множеству признаков с фиксированными значениями относительной шкалы. Отношения и их интенсивность будут детерминистическими, и индивидуальное предпочтение не будет существенным. Конечно, это не приведет к конфликту. Однако разнообразие с конфликтом богаче детерминизма.

Здесь возникает технический вопрос: при заданном собственном векторе и всех матрицах, из которых он получен, можно ли перейти от одной из них на любую другую, производя малые возмущения в элементах? В частности, возможен ли переход из матрицы отношений к любой другой матрице малыми возмущениями?

Другим вопросом будет: при рассмотрении двух собственных векторов, являющихся малыми возмущениями каждого, существуют ли малые возмущения, которые переводят один класс соответствующих матриц в другой?

7.6. ОБРАТНОСИММЕТРИЧНЫЕ МАТРИЦЫ

Теперь исследуем некоторые свойства положительных, обратносимметричных матриц.

Теорема 7.29. Собственные значения положительной обратно-симметричной матрицы удовлетворяют следующему уравнению:

$$\sum_{\substack{j,k \\ j\neq k}} \lambda_j \lambda_k = 0 .$$

Доказательство. Мы знаем, что $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = tr(A) = n$ и $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 = tr\left(A^2\right) = n^2$, так как λ_i^2 – собственное значение A^2. Поэтому

$$n^2 = \left(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + \sum_{\substack{j,k \\ j\neq k}} \lambda_j \lambda_k ,$$

из чего следует, что второе слагаемое справа равно нулю.

Теорема 7.30. Пусть $A = \left(a_{ij}\right)$ есть $\left(n \times n\right)$-матрица положительных элементов с $a_{ji} = a_{ij}^{-1}$. A согласованна тогда и только тогда, когда $\lambda_{\max} = n$.

Доказательство. Из уравнения

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \omega_j \omega_i^{-1}$$

получаем

$$n\lambda - n = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij} \omega_j \omega_i^{-1} = \sum_{1\le i<j\le n} \left(a_{ij}\omega_j\omega_i^{-1} + \omega_i\omega_j^{-1} \big/ a_{ij}\right).$$

Очевидно, что из равенства $a_{ij} = \omega_i \big/ \omega_j$, получим $\lambda = n$, а также $\lambda_{\max} = n$, так как сумма собственных значений равна n, следу матрицы A.

Чтобы доказать обратное утверждение, заметим, что предыдущее выражение содержит только два члена, включающих a_{ij}, а именно, $a_{ij}\omega_j\omega_i^{-1}$ и $\omega_i\omega_j^{-1} \big/ a_{ij}$. Их сумма имеет вид $y + \left(1/y\right)$. Чтобы убедиться в том, что n – минимальное значение $\lambda_{\max}$, достигаемое единственным образом при $a_{ij} = \omega_i \big/ \omega_j$, отметим, что для всех этих членов $y + \left(1/y\right) \ge 2$. Равенство достигается только в предположении $y = 1$, т. е. $a_{ij} = \omega_i \big/ \omega_j$. Поэтому, когда $\lambda_{\max} = n$, имеем

$$n^2 - n \ge \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} 2 = n^2 - n$$

откуда следует, что $a_{ij} = \omega_i \big/ \omega_j$.

Если A несогласованна, то можно ожидать, что в некоторых случаях из неравенства $a_{ij} \ge a_{kl}$ не следует $\omega_i \big/ \omega_j \ge \omega_k \big/ \omega_l$. Однако, поскольку ω_i, $i = 1, \ldots, n$, определяются значениями строки матрицы A, следует ожидать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 7.31. (Сохранение порядковой согласованности.) Если $(o_1, \dots, o_n)$ – порядковая шкала объектов $i = C_1, \dots, C_n$, где из $o_i \geq o_k$ следует, что $a_{ij} \geq a_{kj}$, $j = 1, \dots, n$, то из $o_i \geq o_k$ следует, что $\omega_i \geq \omega_k$.

Доказательство. Действительно, из $A\omega = \lambda_{\max}\omega$ имеем, что

$$\lambda_{\max}\omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j \geq \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\omega_j = \lambda_{\max}\omega_k$$

и поэтому $\omega_i \geq \omega_k$.

Теорема 7.32. Любая положительная обратносимметричная матрица порядка 2×2 согласованна.

Доказательство очевидно.

Теорема 7.33. Компоненты нормализованного левого собственного вектора обратносимметричной положительной матрицы порядка 3×3 являются обратными величинами компонент правого собственного вектора.

Доказательство требует использования следующего равенства в выражениях для ω и υ, приведенных в гл. 5 для динамических приоритетов при $n = 3$:

$$-(1-\lambda)^3 = \frac{a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2}{a_{12}a_{13}a_{23}} + 3(\lambda - 1).$$

Нормализованное обратное отношение между компонентами левого и правого собственных векторов не выполняется для $n = 4$, как видно из следующего контрпримера

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/100 & 2 \\ 2 & 1 & 1/3 & 10 \\ 100 & 3 & 1 & 6 \\ 1/2 & 1/10 & 1/6 & 1 \end{bmatrix},$$

$\lambda_{\max} = 5,73$; $\omega = (0,031; 0,142; 0,793; 0,034)$; $\upsilon = (0,506; 0,075; 0,020; 0,399)$. Обратный вектор к нормализованному ω будет

$$(0,461; 0,102; 0,108; 0,419).$$

Следовательно, $n = 4$ есть первый случай, где решение зависит от согласованности наблюдений и их обоснованности, а не от структуры матрицы парных сравнений. (Имеются контрпримеры для $n = 5, 6, 7$.)

Возникает искушение предположить, что свойство обратной симметричности между компонентами главного левого и правого собственных векторов для $n \geq 4$ имеет место тогда и только тогда, когда матрица согласованна.

Наблюдение Джонсона–Ванга–Беина

Джонсон, Ванг и Беин в [71] заметили, что так как левый и правый собственные векторы не являются обратными величинами для $n \geq 4$, для решения ряда задач можно воспользоваться как левым, так и правым собственным вектором. Это наблюдение представляет интерес и с философской и с математической точек зрения. По-видимому, для нашего сознания не существует единственного пути синтеза собственных мер доминирования и антидоминирования, или рецессивности для получения единой интерпретации реальности. Хотя и возможно создание итеративных схем для объединения и левого и правого собственных векторов в одну меру, такая мера нуждается в простой естественной интерпретации.

В рамках МАИ для включения двух противоположных концепций использован анализ «эффективность – стоимость». Это представляется эффективным путем рассмотрения двух сторон человеческого опыта.

7.7. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННОГО ВЕКТОРА

Часто возникает вопрос, насколько чувствительны приоритеты, задаваемые компонентами собственного вектора, к небольшим изменениям в величинах суждений. Желательно, чтобы приоритеты не колебались в широких пределах при малых изменениях в суждении. Существуют три способа проверки этой чувствительности: 1) нахождение математической оценки колебания; 2) получение ответов, основанных на большом числе компьютерных вычислений, построенных соответствующим образом для проверки чувствительности; 3) комбинация предыдущих двух способов, особенно при невозможности проведения полной аргументации аналитически.

Как уже указано, в случае согласование $\lambda_{\max}$ равно следу матрицы, который представляет собой сумму единичных элементов. При этом следует ожидать, что собственный вектор, соответствующий возмущенной матрице, изменится на величину, обратно-пропорциональную размеру матрицы.

Собственные значения матрицы лежат между ее наибольшими и наименьшими строчными суммами элементов. Изменение величины элемента в матрице влияет на соответствующую строчную сумму и обусловливает тенденцию изменения $\lambda_{\max}$ на такую же величину. Однако поскольку на изменение собственного вектора также влияет и размер матрицы, можно ожидать, что чем больше матрица, тем меньшим будет изменение каждой компоненты.

Начнем анализ этой проблемы, рассмотрев матрицу A с характеристическим уравнением (см. [185])

$$\det\left(A-\lambda I\right)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

Пусть теперь $A+\varepsilon B$ – матрица, полученная введением малого возмущения в A. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\det\left(A+\varepsilon B-\lambda I\right)=\lambda^n+a_1\left(\varepsilon\right)\lambda^{n-1}+\ldots+a_n\left(\varepsilon\right)=0,$$

где $a_k\left(\varepsilon\right)$ – полином степени $\left(n-k\right)$ от ε, такой, что $a_k\left(\varepsilon\right)\to a_k$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть λ_1 – максимальное простое собственное значение, соответствующее характеристическому уравнению A. Уилкинсон в [185] доказал, что для малого ε имеется собственное значение матрицы $A+\varepsilon B$, которое может быть выражено как сумма сходящегося степенного ряда, т. е.

$$\lambda_1\left(\varepsilon\right)=\lambda_1+k_1\varepsilon+k_2\varepsilon^2+\ldots$$

Пусть ω_1 – собственный вектор A, соответствующий λ_1 и $\omega_1\left(\varepsilon\right)$ собственный вектор $A+\varepsilon B$, соответствующий $\lambda_1\left(\varepsilon\right)$. Элементы $\omega_1\left(\varepsilon\right)$ – полиномы от $\lambda\left(\varepsilon\right)$ и ε, и так как степенной ряд для $\lambda_1\left(\varepsilon\right)$ сходится при малом ε, каждый элемент $\omega_1\left(\varepsilon\right)$ может быть представлен как сходящийся степенной ряд от ε. Можно написать

$$\omega_1\left(\varepsilon\right)=\omega_1+\varepsilon z_1+\varepsilon^2 z_2+\ldots$$

Если матрица A имеет линейные элементарные делители, то существуют полные множества правых и левых собственных векторов $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ и $\upsilon_1,\upsilon_2,\ldots,\upsilon_n$, таких, что $\upsilon_i\omega_j=0$, $i\neq j$.

Заметим, что ω_j и υ_j являются j-ми собственными векторами (правым и левым), а не j-ми компонентами векторов.

Векторы z_i, могут быть представлены через ω_i следующим образом:

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\omega_j \ ,$$

что после подстановки в формулу для $\omega_1(\varepsilon)$ дает

$$\omega_1(\varepsilon) = \omega_1 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}\varepsilon^j \omega_i \ ,$$

где t_{ij} получены делением s_{ij} на коэффициент ω_1.

Возмущения собственных значений первого порядка даны коэффициентом k_1 выражения для $\lambda_1(\varepsilon)$.

Теперь выведем выражение для возмущений первого порядка соответствующих собственных векторов. Нормализуя векторы ω_j и υ_j и используя евклидову метрику, находим

$$|\upsilon_j||\omega_j| = 1 .$$

Мы знаем, что

$$(A + \varepsilon B)\omega_1(\varepsilon) = \lambda_1(\varepsilon)\omega_1(\varepsilon) .$$

При подстановке выражений для $\lambda_1(\varepsilon)$ и $\omega_1(\varepsilon)$, полученных выше, и использовании равенства $A\omega_1 = \lambda_1\omega_1$ имеем

$$\sum_{j=2}^{n}(\lambda_j - \lambda_1)t_{j1}\omega_j + B\omega_1 = k_1\omega_1 .$$

Умножив обе части на υ_j^T, после упрощения получим

$$k_1 = \upsilon_1^T B\omega_1 / \upsilon_1^T\omega_1 \text{ , для } j = 1$$

и

$$t_{j1} = \left(\upsilon_j^T B\omega_1 / (\lambda_1 - \lambda_j)\upsilon_1^T\omega_j\right) \text{, для } j \neq 1 ,$$

где, как уже отмечено, k_1 – возмущение λ_1 первого порядка, и

$$|k_1| = \left(\upsilon_1^T B\omega_1 / \upsilon_1^T\omega_1\right) \le [B] / \upsilon_1^T\omega_1 \ ,$$

где $[B]$ – сумма элементов B.

Итак, для достаточно малого ε чувствительность λ_1 зависит в основном от величины $\upsilon_1^T\omega_1$, которая может быть произвольно малой.

Возмущение первого порядка ω_1 определяется выражением

$$\Delta\omega_1 = \varepsilon\sum_{j=2}^{n} t_{j1}\omega_j = \varepsilon\sum_{j=2}^{n}\left(\upsilon_j^T B\omega_1 / (\lambda_1 - \lambda_j)\ \upsilon_j^T\omega_j\right)\omega_j = \sum_{j=2}^{n}\left(\upsilon_j^T(\Delta A)\omega_1 / (\lambda_1 - \lambda_j)\ \upsilon_j^T\omega_j\right)\omega_j \ ,$$

где $\Delta A \equiv \varepsilon B$.

Собственный вектор ω_1 будет весьма чувствителен к возмущениям в A, если λ_1 близко к любому из других собственных значений. Когда λ_1 значительно отдалено от других собственных значений и ни одно из $\upsilon_i^T \omega_i$ не мало, собственный вектор ω_1, соответствующий собственному значению λ_1, будет сравнительно нечувствителен к возмущениям в A. Это имеет место, например, для кососимметричных матриц ($a_{ji} = -a_{ij}$).

$\upsilon_i^T \omega_i$ в некотором отношении взаимозависимы, что предотвращает возможность того, чтобы только одно $1/\upsilon_i^T \omega_i$, $i = 1, \ldots, n$, было большим. Поэтому, если одна из них произвольно велика, они все произвольно велики. Однако желательно, чтобы они были малы, т. е. близки единице. Положим

$$\omega_i = \sum_j c_{ij} \upsilon_j \text{ и } \upsilon_j = \sum_j d_{ij} \omega_j ,$$

где $|\omega_i| = |\upsilon_i| = 1$, $i = 1, \ldots, n$. После подстановки легко убедиться, что

$$c_{ij} = \omega_j^T \omega_i \big/ \upsilon_j^T \omega_j \text{ и } d_{ij} = \upsilon_j^T \upsilon_i \big/ \upsilon_j^T \omega_j .$$

Тогда

$$\upsilon_i^T \omega_i = \sum_j d_{ij} \omega_j^T \sum_j c_{ij} \upsilon_j = \sum_j \left(\omega_j^T \omega_i\right)\left(\upsilon_j^T \upsilon_i\right) \big/ \upsilon_j^T \omega_j ,$$

$$\text{для } i = j \quad \omega_i^T \omega_i = \upsilon_i^T \upsilon_i = 1$$

и

$$\upsilon_i^T \omega_i = \left(\upsilon_i^T \omega_i\right)^{-1} + \sum_{j \neq i} \left(\omega_j^T \omega_i\right)\left(\upsilon_j^T \upsilon_i\right)\left(\upsilon_j^T \omega_j\right)^{-1} .$$

Так как $\omega_j^T \omega_i = \cos\theta_{ij}$ и $\upsilon_j^T \upsilon_i = \cos\varphi_{ij}$, имеем

$$\left|\left(\upsilon^T \omega_i\right)_i^{-1}\right| \le \left|\left(\upsilon_i^T \omega_i\right)^{-1}\right| + \sum_{j=i} \left|\left(\upsilon_j^T \omega_j\right)^{-1}\right| \le 1 + \sum_{j=i} \left|\left(\upsilon_j^T \omega_i\right)^{-1}\right| ,$$

что должно быть верным для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Это доказывает, что все $\upsilon_i^T \omega_i$ должны быть одного порядка.

Теперь покажем, что для согласованных матриц $\left(\upsilon_1^T \omega_1\right)^{-1}$ не может быть произвольно большим. В случае согласованности имеем

$$\upsilon_1^T = \left(1/\omega_{11}, \ldots, 1/\omega_{1n}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/\omega_{1j} ,$$

$$\omega_1^T = \left(\omega_{11}, \ldots, \omega_{1n}\right).$$

Поэтому

$$\left(\upsilon_1^T \omega_1\right)^{-1} = \left[\left(1/\omega_{11}, \ldots, 1/\omega_{1n}\right)\left(\omega_{11}, \ldots, \omega_{1i}\right)^T \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/\omega_{1i}\right]^{-1} = \left[n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/\omega_{1i}\right]^{-1} > n ,$$

так как

$$n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/\omega_{1i} < \sum_{i=1}^{n} \omega_{1i} / n .$$

Теперь $\left(\upsilon_1^T \omega_1\right)^{-1}$ принимает минимальное значение, когда все ω_{1i} равны, так как $\sum_{i=1}^{n} \omega_{1i} = 1$.

Практически, для удерживания $\left(\upsilon_1^T \omega_1\right)^{-1}$ вблизи минимума нужно оперировать с относительно сравнимыми объектами, такими, чтобы ни одна из из ω_{1i} не была слишком малой.

Для улучшения согласованности число n не должно быть слишком большим. С другой стороны, если мы собираемся полностью использовать имеющуюся информацию и получить практически обоснованные результаты, n не следует брать слишком малым. Например, если отбросить величины $\upsilon_1^T \omega_1 < 0{,}1$, то нужно иметь $n \le 9$.

При допущении малого числа сравниваемых объектов и их относительной сравнимости можно показать, что ни одна из компонент векторов ω_1 и υ_1 не будет произвольно малой и, следовательно, скалярное произведение двух нормализованных векторов не может быть произвольно малым.

При большой несогласованности никто не может гарантировать, что ни одна из компонент ω_1 не будет произвольно малой. Поэтому близость к согласованности является достаточным условием устойчивости. Отметим также, что следует ограничиваться сравнительно малым числом элементов, таким, чтобы величины всех ω_{1i} были одного порядка.

Приведенные выше соображения свидетельствуют о том, что обратносимметричные матрицы являются архитипичными матрицами, создающими в случае согласованности устойчивые собственные векторы при малых возмущениях. Это позволяет сделать *важный вывод*: для гарантирования устойчивости оценки в основной шкале отношений, полученной из парных сравнений, разумно сопоставлять небольшое число относительно сравнимых элементов. В социальных науках к этому выводу уже давно пришли экспериментально. Ученые заметили, что число элементов должно быть 7 ± 2, однако соответствующим образом не осознали необходимость требования относительной сравнимости [106].

Другим полезным выводом является следующее: если считать «объектами одной важности» объекты, не отличающиеся друг от друга по важности больше, чем в 10 раз, то шкала, используемая при парных сравнениях сопоставимых объектов, должна иметь деления, лежащие где-то между единицей и десятью, в противном случае будут сравниваться объекты, которые в большой степени несопоставимы по важности. Это приведет к сравнительно малым значениям для некоторых из ω_{1i} и соответственно к нарушению стабильности шкалы, т. е. изменение собственного вектора будет непредсказуемым даже при легких изменениях величин суждений в матрице сравнений.

Формула Варгаса

Определяя величину возмущения собственного вектора при некотором значении возмущения исходной матрицы, мой ученик Л. Варгас показал в своей диссертации [169], что если обратносимметричную матрицу A возмутить обратносимметричной матрицей P с использованием поэлементного (Адамара) произведения (которое обозначается $A \circ P$), то результирующая матрица будет обратносимметричной, а величина возмущения $\Delta\omega$ главного собственного вектора ω матрицы A дается выражением

$$\Delta\omega = \left(< y, \omega >^{-1} y - 1\right) \circ \omega ,$$

где $<,>$ – скалярное произведение двух векторов, а $y \circ \omega$ – вектор поэлементного произведения y на ω; вектор y – главный собственный вектор матрицы

$E^* = E \circ P$, где E получена поэлементным делением элементов A на соответствующие элементы $W = \left(\omega_i / \omega_j\right)$.

Пример 7.1.

При изложении примера об освещенности стульев в гл. 2, согласно закону обратного квадрата в оптике для сравнительной освещенности стульев имели $\left(0,6079;\, 0,2188;\, 0,1108;\, 0,0623\right)$. Приведенная ниже матрица A составлена из отношений этих величин, а матрица P является первой матрицей из гл. 2, являющейся возмущением A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2,7 & 5,4 & 9,76 \\ 0,36 & 1 & 1,97 & 3,51 \\ 0,18 & 0,51 & 1 & 1,78 \\ 0,10 & 0,28 & 0,56 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0,2 & 1 & 4 & 6 \\ 0,17 & 0,25 & 1 & 4 \\ 0,14 & 0,17 & 0,25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Собственный вектор A будет $\omega = \left(0,6079;\, 0,2178;\, 0,1108;\, 0,0623\right)$ и $\lambda_{\max} = 4$. Собственный вектор P будет до $\omega^* = \left(0,6187;\, 0,2353;\, 0,1009;\, 0,04507\right)$ и $\lambda_{\max} = 4,391$. Матрица возмущения E получена поэлементным делением A на P:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1,80 & 1,09 & 0,71 \\ 0,56 & 1 & 2,03 & 1,71 \\ 0,91 & 0,49 & 1 & 2,25 \\ 1,39 & 0,58 & 0,44 & 1 \end{bmatrix}.$$

Собственный вектор E есть $y = \left(0,2730;\, 0,2885;\, 0,2444;\, 0,1941\right)$, а $\lambda_{\max} = 4,391$ – такое же, что для P. Наконец, $\Delta\omega = \left(0,01076;\, 0,01651;\, -0,00985;\, -0,01722\right)$. Легко проверить, что $\omega + \Delta\omega = \omega^*$.

ГЛАВА 8
ПРИОРИТЕТЫ В СИСТЕМАХ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

8.1. ВВЕДЕНИЕ

До сих пор мы моделировали наши задачи иерархически, от верхних уровней к нижним или в обратном порядке, и развивали теорию для измерения приоритетов элементов на различных уровнях иерархии по отношению к элементам более высоких уровней и к обшей цели иерархии.

Теперь обратимся к задачам в системах, в которых уровни более не могут быть названы верхними или нижними. Это происходит потому, что уровень может как доминировать, так и быть доминируемым, прямо или косвенно, другими уровнями. Такие системы известны как *системы с обратной связью*. Они могут быть представлены в виде сети, где узлы соответствуют уровням или компонентам. Элементы в узле (или уровне) могут влиять на некоторые или все элементы любого другого узла. Нашей задачей является изучение приоритетов в таких системах. Основное внимание будет уделено системам, в которых все элементы в узле воспринимаются совместно по отношению к каждому элементу в другом узле – аналог полной иерархии между уровнями.

Поначалу непонятно, зачем рассматривать более сложные реалии, чем иерархии, так как последние позволяют получить осмысленное представление о функциях системы. Можно легко вообразить ситуацию, слишком сложную для иерархического представления; простота, предлагаемая иерархией, может быть обманчивой. Многие задачи в социальных науках попадают в эту категорию. Например, последние труды по теории организаций предлагают такие формы организаций, уже реализованные на практике, которые не являются иерархическими. Человек может выполнить много или все задания в различных компонентах производственной системы [63].

Некоторые конфликтные задачи анализировались как посредством иерархии, так и в виде простой сети в форме петли. Такая простая сеть называется *холархией*. Результаты были удивительно близки. Это означает, что оба метода могут вести к одним и тем же результатам, по крайней мере, в простых случаях.

В следующем разделе изучается основанный на концепциях теории графов метод структурирования множества элементов, собранных после мозгового штурма или полученных некоторым другим образом, в виде системы с уровнями. Существуют другие, не обсуждаемые здесь методы группировки элементов в один и тот же кластер или уровень в зависимости от близости оценок их измерения [73]. Однако для наших целей это равносильно тому, что поставить телегу перед лошадью, так как нам нужно определить и группировать элементы до проведения измерения.

В разд. 8.3 исследуется понятие измерения приоритета в системах с обратной связью, а затем в разд. 8.4 вводится суперматрица для проведения такого измерения. Показывается, что иерархическое построение есть частный случай этого подхода. В разд. 8.5 определяются абсолютные и относительные приоритеты и их предельные значения, описываются условия существования приоритетов и методы их получения для различных типов систем. В разд. 8.6 с помощью двух примеров проиллюстрированы некоторые из этих идей.

8.2. МАТРИЦА ДОСТИЖИМОСТИ ПРИ СТРУКТУРИРОВАНИИ СИСТЕМ

Допустим, имеется множество элементов, которые рассматриваются в контекстуальном отношении. Множество элементов, которые нужно смоделировать, может быть образовано посредством дедуктивной логики, каузальных наблюдений, эмпирических данных, мозгового штурма или любой комбинацией этих приемов. Наиболее важная роль в этом методе отведена тому, что одно из определений исходного множества элементов является естественной и важной частью процесса. Частичное или полное описание системы может принять одну из двух различных, однако связанных форм: бинарной матрицы; направленного графа (или сети) для геометрического представления отношений [97, 171, 172].

Будем считать, что множество вершин H определено. С помощью бинарного отношения «зависит от» можно заполнить матрицу B. Ответ «да» связывают с единицей, а ответ «нет» – с нулем. Ответ «да» или «нет» зависит от имеющихся данных, суждений или от того и другого. Таким образом, бинарная матрица $B=\{b_{ij}\}$ определяется следующим образом:

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i \text{ зависит от } j,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

После того как матрица заполнена, следует произвести проверку транзитивности для выявления нарушений этого условия. Если обнаружено нарушение транзитивности, то вершины, приводящие к этому нарушению, должны быть проверены для его устранения.

Получив описание матрицы B, формируем бинарную матрицу $(I+B)$, где I – единичная матрица. Можно показать, что существует наименьшее целое k, при котором

$$(I+B)^{k-1}\le(I+B)^{k}=(I+B)^{k+1},$$

т. е. каждый элемент матрицы $(I+B)^{k-1}$ меньше соответствующего элемента матрицы $(I+B)^{k}$ или равен ему, а соответствующие элементы матриц $(I+B)^{k}$ и $(I+B)^{k+1}$ равны.

Матрица в правой части выражения называется *матрицей достижимости*.

Определение 8.1. Матрица достижимости направленного графа определяется как бинарная матрица, в которой элементами являются единицы, если вершина графа достижима из другой каким-либо путем, в противном случае элементы ее – нули.

Использование матрицы достижимости позволяет разделить H на множество уровней, а также разделить каждый уровень на подмножества, не обязательно несвязанные.

Определение 8.2. Вершину h_j называют достижимой из вершины h_i, если в ориентированном графе существует путь из h_i к h_j.

Определение 8.3. Вершину h_j называют предшествующей вершине h_i, если возможно достижение h_i из h_j.

Из H можно выделить два вида множеств: множество достижимости и множество предшествующих вершин, которое называется предшествующим множеством. Обозначим их через $R(h_i)$ и $A(h_i)$ соответственна

$R(h_i)$ – множество достижимости вершины $h_i\in H$, состоящее из всех вершин H, лежащих на путях, которые берут начало в h_i,. Таким образом,

$$R(h_i)=\left\{h_i \in H \mid элемент\,(i,\,j)\; в\; (I+B)^k\; есть\, 1\right\}.$$

$A(h_i)$ – предшествующее множество вершины $h_i \in H$, состоящее из всех вершин H, лежащих на путях, которые включают h_i, но не берут начало в h_i. Таким образом, $A(h_i)=\left\{h_j \in H \mid элемент\,(j,i)\; в\; (I+B)^k\; есть\, 1\right\}$.

Множество тех вершин h_i, для которых выполняется $A(h_i)=A(h_i)\cap R(h_i)$, не достижимо из любой из оставшихся вершин H и, следовательно, может быть обозначено как уровень иерархии.

Для построения всех уровней необходимо применить следующую итерационную процедуру:

1. Сформировать таблицу с элементами: h_i, $R(h_i)$, $A(h_i)$ и $A(h_i)\cap R(h_i)$.

2. Найти элементы в таблице, удовлетворяющие условию

$$A(h_i)=R(h_i)\cap A(h_i)$$

Эти элементы образуют первый уровень.

3. Вычеркнуть это множество из таблицы и применить второй шаг, и т. д.

Этот процесс, полезный сам по себе, для всех контекстуальных отношений обычно не приводит к тому виду иерархии, который определен. Однако он приводит к такой сети, в которой:

– первый уровень может состоять не только из одного элемента;

– все элементы первого уровня не обязательно связаны только с элементами второго уровня;

– промежуточные уровни могут состоять только из одного элемента.

Пример 8.1.

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сформируем $(I+B)$, и матрица достижимости будет такой

$$(I+B)^3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

h_i, $R(h_i)$, $A(h_i)$ и $A(h_i)\cap R(h_i)$

h_i $i=1,2,3,4,5$	$R(h_i)$ $i=1,2,3,4,5$	$A(h_i)$ $i=1,2,3,4,5,6,7$	$A(h_i)\cap R(h_i)$ $i=1,2,3,4,5$
h_6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	6	6
h_7	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	7	7

Так как $A(h_6)$ и $A(h_7)$ совпадают с $A(h_6)\cap R(h_6)$ и $A(h_7)\cap R(h_7)$, соответственно первый уровень составляется из вершин h_6 и h_7, т. е. первый уровень: (h_6, h_7).

Исключив h_6 и h_7 из таблицы, получим для второго уровня: $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$, таблицу для которого легко сформировать. Таким образом, можно написать

$$H=\{1,2,3,4,5,6,7\}=\{6,7;1,2,3,4,5\}.$$

(См. рис. 8.1 и 8.2 для сетей до и после применения метода).

Применяя описанную выше процедуру, получаем то, что другие называют иерархией, однако мы называем сетью с двумя уровнями: (1) $\{6,7\}$ и (2) $\{1,2,3,4,5\}$. Это также показано на рис. 8.2.

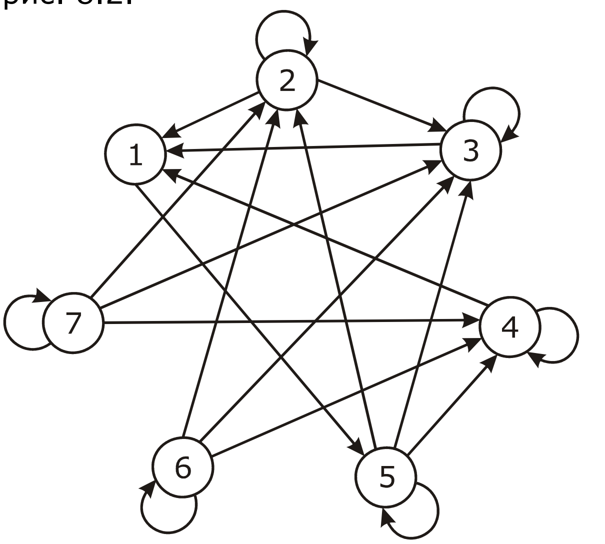


Рис. 8.1.

Пример 8.2. Следующая сеть на рис. 8.3 – результат применения метода к матрице B:

$$B=\begin{array}{c}\\ e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4\\ e_5\\ e_6\end{array}\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

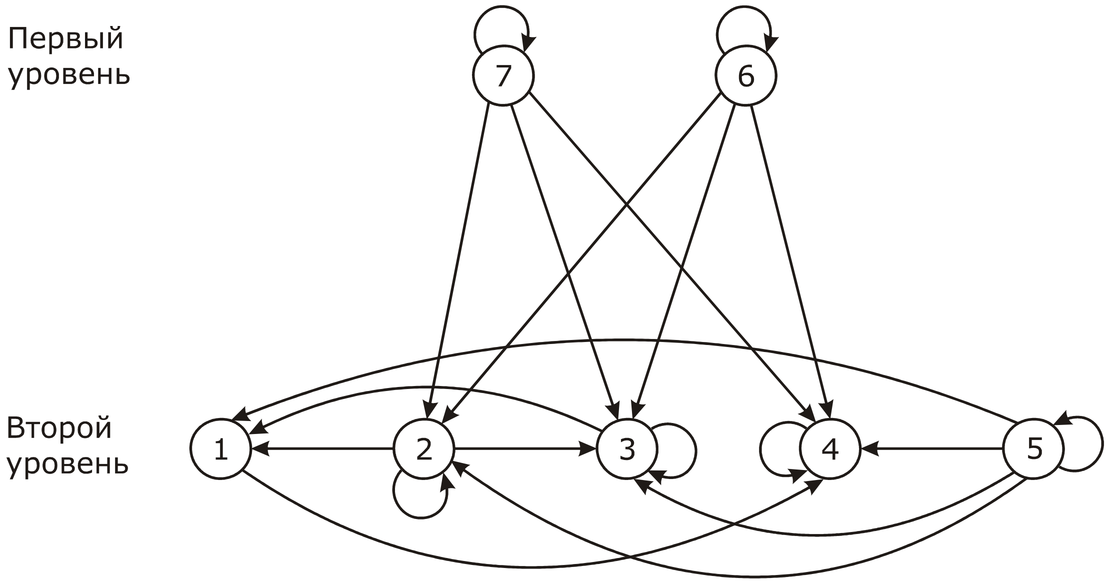


Рис. 8.2

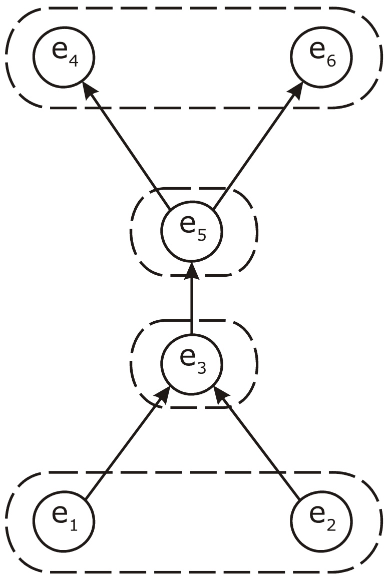


Рис. 8.3

Чтобы убедиться в этом, имеем

$$
(I+B)^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Это – матрица достижимости, так как $(I+B)^5 = (I+B)^4$.

e_i	$R(e_i)$	$A(e_i)$	$A(e_i) \cap R(e_i)$
1	1, 3, 4, 5, 6	1	1
2	2, 3, 4, 5, 6	2	2
3	3, 4, 5, 6	1, 2, 3	3
4	4	1, 2, 3, 4, 5	4
5	4, 5, 6	1, 2, 3, 5	5
6	6	1, 2, 3, 5, 6	6

Таким образом, первый уровень получается $\{e_1, e_2\}$, так $A(e_i) = A(e_i) \cap R(e_i)$, $i = 1, 2$.

e_i	$R(e_i)$	$A(e_i)$	$A(e_i) \cap R(e_i)$
3	3, 4, 5, 6	3	3
4	3, 4	3, 4, 5	4
5	4, 5, 6	3, 5	5
6	6	3, 5, 6	6

На втором уровне будем иметь $\{e_3\}$, на третьем – $\{e_5\}$ и на четвертом – $\{e_4, e_6\}$.

8.3. ИЗМЕРЕНИЕ ПРИОРИТЕТОВ В СИСТЕМАХ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Теперь обобщим метод анализа иерархии для систем с обратной связью, которые могут быть представлены направленной сетью.

Для описания вида сети, которая нам понадобится, стоит вспомнить, как происходит измерение приоритетов элементов одного уровня иерархии по отношению к элементам последующего уровня в направленном двудольном графе. Иерархия, все двудольные графы которой полны, называется полной иерархией. Это частный случай общей неполной иерархии, которой мы тоже занимались. Двудольный граф описывает связи между всеми элементами одного (нижнего или текущего) уровня по отношению к элементам предыдущего (высшего, или доминантного) уровня. Если мы просто хотим обозначить, какой из уровней над каким доминирует, достаточно провести (направленную) дугу от нижнего к доминантному уровню. Таким образом, иерархия может быть представлена цепью или, точнее, путем, так как у дуг имеются направления.

Теперь взаимодействие между двумя компонентами системы, так же как и в случае с уровнями иерархии, можно охарактеризовать двудольным графом, который может быть или не быть полным. Для простоты используется направленная дуга, чтобы показать порядок доминирования между компонентами. Можно начертить противоположно направленные дуги между двумя компонентами и даже, в случае взаимозависимости, петлю для компоненты. Это возможно и для иерархии. В любом случае результатом такого упрощенного представления компонент системы для определения приоритетов будет направленная сеть. Иллюстрация подобной сети приведена на рис. 8.4. Такое представление требуется для построения суперматрицы, возведение которой в степени позволяет получить приоритеты по путям предписанной длины в этом представлении.

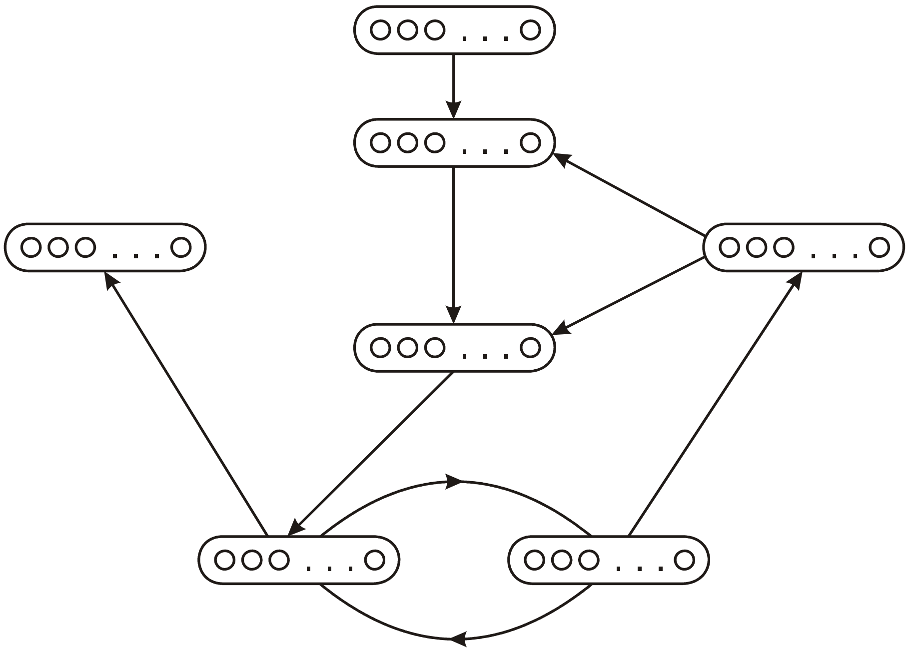


Рис. 8.4

Мы вводим суперматрицу, которая будет служить единой основой для изучения приоритетов в иерархиях и в системах с обратной связью. Разработан общий принцип композиции для приоритетов в системах и показано, что изложенный ранее принцип иерархической композиции является частным случаем.

Для системы с обратной связью понятие композиции приоритетов между компонентами требует особого внимания. В этом случае обычно нет внешнего уровня как каркаса, на который опирается проведение композиции последовательно от уровня к уровню. Компоненты системы могут взаимодействовать по более чем одному пути. Для того чтобы измерение приоритетов имело смысл, нужно единообразие при рассмотрении всех путей. Приоритеты любой компоненты системы по отношению к любой другой компоненте могут быть измерены неоднозначно по путям и контурам, связывающим их. Например, вдоль контура приоритеты могут быть измерены посредством прохода по контуру только один, два или более раз. Для системы полезно знать множество первичных, т. е. предельных, приоритетов вершин, как единое целое. Необходимость в последнем возникает, когда вершины четко не группируются в компоненты. При этом мы имеем измерение относительных приоритетов всех вершин в системе по отношению к каждой вершине системы, а в итоге получаем стохастическую матрицу (матрицу, сумма элементов столбцов которой равна единице и все элементы неотрицательны). Столбцы являются собственными векторами матриц парных сравнений вершин по отношению к каждой вершине системы.

К этому случаю применим метод суперматрицы, однако для ясности исследуется случай, в котором система является разложимой. Система разложима, если ее элементы могут быть агрегированы в независимые компоненты, взаимодействие которых представлено дугами направленной сети [39]. При этом приоритеты между смежными компонентами выводятся, как в иерархии, отдельно, по их важности в системе, получаются приоритеты для самих компонент, которые используются для взвешивания собственных векторов, соответствующих каждой компоненте, таким образом вновь получается стохастическая по столбцам матрица.

Наше исследование систем с приоритетами уподобляется марковским цепям. Такое соответствие принято, чтобы применить результаты по цепям Маркова для систем с обратной связью. Для экономии места изложение будет очень кратким. С помощью ЭВМ сравнительно легко получить оценки предельных приоритетов, возводя суперматрицу в большие степени. Однако это дает правильный ответ только при выполнении определенных условий. В общем случае теория марковских цепей предлагает элегантный теоретический аппарат.

Терминологическое соответствие

Системы с приоритетами	Марковские цепи
Система	Система
Компонента (с одним или более элементами)	Состояние
Влияние в момент k	Переход в момент k
Приоритет	Вероятность
Влияние компоненты	Переход в состояние
Относительный приоритет (от i-й к j-й компоненте)	Условная вероятность перехода
Общий приоритет	Абсолютная вероятность

8.4. СУПЕРМАТРИЦА – ОБЩАЯ КОМПОЗИЦИЯ ПРИОРИТЕТОВ

Рассмотрим систему, которая разбита на N кластеров или компонент $C_1, C_2, \ldots, C_N$. Обозначим элементы компоненты C_k через $e_{k1}, e_{k2}, \ldots, e_{kn_k}$, где n_k – их число. Проведенное ранее обсуждение влияния соседних уровней иерархии позволяет построить следующий тип матрицы условных измерений между вершинами соответствующих компонент. Предположим, что любая пара компонент взаимодействует. Если это предположение где-либо не имеет места, то соответствующий элемент будет равен нулю.

Суперматрица играет фундаментальную роль в дальнейшем развитии теории приоритетов для систем. Но сначала покажем, как может быть получена иерархическая композиция посредством возведения суперматрицы в степени.

Как указывалось ранее, можно построить матрицы попарных сравнений для измерения приоритетов всех вершин в системе по отношению друг к другу так, как если бы отсутствовало группирование вершин в компоненты. Например, можно было бы сравнивать отрасли промышленности и их вклад в любую другую отрасль промышленности. Однако предпочтение отдается подходу, основанному на группировании компонент по соображениям согласованности, так как легче проводить суждения о парных сравнениях на малом множестве элементов. Таким образом, предполагается, что имеются собственные векторы приоритетов элементов в компоненте по отношению к элементам в другой компоненте (которые сами могут быть компонентами). Когда это сравнение не имеет смысла, используются нули для собственного вектора.

Суперматрица, соответствующая взаимодействию между компонентами системы, имеет следующий вид:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cccccccccccc} & C_1 & & & & C_1 & & & \dots & & C_N & \\ e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n_1} & e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n_2} & e_{N1} & e_{N2} & \dots & e_{Nn_N} \end{array} \\
W = & \begin{array}{cc} & e_{11} \\ C_1 & e_{12} \\ & \vdots \\ & e_{1n_1} \\ & e_{21} \\ C_2 & e_{22} \\ & \vdots \\ \vdots & e_{2n_2} \\ & e_{N1} \\ C_N & e_{N2} \\ & \vdots \\ & e_{Nn_N} \end{array} & \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1N} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_{N1} & W_{N2} & \dots & W_{NN} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

где i, j-й блок задан, как

$$
W_{ij} = \begin{bmatrix} w_{i1}^{j1} & w_{i1}^{j2} & \dots & w_{i1}^{jn_j} \\ w_{i2}^{j1} & w_{i2}^{j2} & \dots & w_{i2}^{jn_j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{in_i}^{j1} & w_{in_i}^{j2} & \dots & w_{in_i}^{jn_j} \end{bmatrix}
$$

каждый из столбцов которого есть собственный вектор, представляющий влияние всех элементов в i-й компоненте на каждый из элементов j-й компоненты.

Суперматрица W не будет стохастической (хотя каждый из ее блоков является таковым), если не предположить, что ее компоненты также были взвешены в соответствии с важностью их вклада в систему. Как это делается, показано в примерах в конце главы. Результирующие приоритеты компонент можно затем использовать для взвешивания соответствующих им элементов в W, что превратит W в стохастическую матрицу. В дальнейшем, всякий раз, когда мы будем иметь дело с W, предполагается, что она приведена взвешиванием к стохастической матрице.

Полезно упомянуть следующие факты.

Теорема 8.1 [53]. Неотрицательная матрица A – стохастическая тогда и только тогда, когда вектор $(1, 1, \dots, 1)$ является решением $xA = x$, где единица – главное собственное значение A.

Теорема 8.2. $(n \times n)$-матрица A неприводима тогда и только тогда, когда ее направленный граф сильно связан.

Теорема 8.3. Связный граф сильно связан тогда и только тогда, когда каждая дуга принадлежит по крайней мере одному пути.

Теорема 8.4. Матрица A приводима тогда и только тогда, когда по крайней мере один из главных миноров порядка $n-1$ матрицы $\left(\lambda_{\max} I - A\right)$ равен нулю.

Теорема 8.5. Если A – неотрицательная неприводимая матрица порядка n, то $\left(I + A\right)^{n-1} > 0$.

(Это говорит о том, что если граф – сильно связный и добавить петли к каждой вершине, то результирующая матрица будет примитивной, т. е. любая вершина будет достижима из любой другой вершины посредством пути фиксированной длины.)

Теорема 8.6. Сильно связный граф (с $h \ge 2$ вершинами) с матрицей вершин A примитивен тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель длин всех простых контуров есть единица.

Теорема 8.7. Примитивная стохастическая (по столбцам) матрица A обладает свойством: $\lim A^k$ имеет одинаковые столбцы (единственный вектор равновесной вероятности) и, следовательно, $\omega = A\omega$ имеет единственное решение; кроме того, для любого начального вектора вероятности $\omega^{(0)}\left(\omega_i^{(0)} \ge 0, \sum \omega_i^{(0)} = 1\right)$, $A^k \omega^{(0)} \to \omega$. Это ключевая теорема для вычисления приоритетов, когда матрица примитивна.

Суперматрица иерархии имеет следующую форму:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ W_{21} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & W_{32} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & W_{n-1,\,n-2} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & W_{n,\,n-1} & I \end{bmatrix}.$$

Эта матрица имеет устойчивую форму

$$W^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ W_{n,n-1}W_{n-1,n-2}\dots W_{32}W_{21} & W_{n,n-1}W_{n-1,n-2}\dots W_{32} & \dots & W_{n,n-1}W_{n-1,n-2} & W_{n,n-1} & I \end{bmatrix}$$

для всех $k \ge n-1$. Каждый коэффициент в последней строке является общим приоритетом влияния последней компоненты на каждую из оставшихся компонент. Заметим, что принцип иерархической композиции проявляется в позиции $(n,1)$ как влияние n-й компоненты на первую; n-я компонента – ведущая в иерархии и является аналогом поглощающего состояния в марковской цепи. Это компонента элементов, которые рассредоточиваются и являются источником влияния. Сущность вышесказанного подытоживается *принципом иерархической композиции*:

Обобщенный вектор n-уровневой иерархии есть элемент $(n,1)$ матрицы W^{k-1}, $k \ge n-1$.

Теперь кратко рассмотрим, что происходит с контурами. Здесь повторяющиеся степени обычного множества компонент показывают отсутствие устойчивости. Например, для трехкомпонентного контура имеем

$$W=\begin{bmatrix}0 & W_{12} & 0\\ 0 & 0 & W_{23}\\ W_{31} & 0 & 0\end{bmatrix};\ W^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & W_{12}W_{23}\\ W_{23}W_{31} & 0 & 0\\ 0 & W_{31}W_{12} & 0\end{bmatrix};$$

$$W^3=\begin{bmatrix}W_{12}W_{23}W_{31} & 0 & 0\\ 0 & W_{23}W_{31}W_{12} & 0\\ 0 & 0 & W_{31}W_{12}W_{23}\end{bmatrix};$$

$$W^{3k}=\begin{bmatrix}\left(W_{12}W_{23}W_{31}\right)^k & 0 & 0\\ 0 & \left(W_{23}W_{31}W_{12}\right)^k & 0\\ 0 & 0 & \left(W_{31}W_{12}W_{23}\right)^k\end{bmatrix};$$

$$W^{3k+1}=\begin{bmatrix}0 & \left(W_{12}W_{23}W_{31}\right)^k W_{12} & 0\\ 0 & 0 & \left(W_{23}W_{31}W_{12}\right)^k W_{23}\\ \left(W_{31}W_{12}W_{23}\right)^k W_{31} & 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$W^{3k+2}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \left(W_{12}W_{23}W_{31}\right)^k W_{12}W_{23}\\ \left(W_{23}W_{31}W_{12}\right)^k W_{23}W_{31} & 0 & 0\\ 0 & \left(W_{31}W_{12}W_{23}\right)^k W_{31}W_{12} & 0\end{bmatrix}.$$

Так как произведение стохастических матриц есть стохастическая матрица, а предел степеней стохастической матрицы, элементы которой положительны, есть матрица с одинаковыми столбцами, умножение этой предельной матрицы справа на любую стохастическую матрицу оставляет ее неизменной. В результате для контура получим, что в пределе по различным последовательностям степеней W влияние каждой компоненты на каждую другую компоненту (включая саму эту компоненту) описывается одним и тем же выражением, т. е. ее предельным приоритетом по отношению к соседней компоненте.

Начиная с i-й компоненты контура, мы индексируем соседние компоненты последовательно $i, i_1, i_2, \ldots, i_n, i$. Следующий вывод согласуется с нашими интуитивными ожиданиями.

В простом контуре компонент предельный относительный приоритет i-й компоненты дается собственным вектором, который получается как решение задачи $W_{ii_1}x = x$. Чтобы показать это, нужно учесть предыдущее замечание, сделанное при оценке влияния i-й компоненты (не принимая во внимание стохастические матрицы справа, так как они не влияют на результат),

$$\lim_{k\to\infty}\left(W_{ii_1}\ W_{i_1i_2}\ \ldots W_{i_ni}\right)^k = \lim_{k\to\infty} W_{ii_1}^k\ W_{i_1i_2}^k\ \ldots W_{i_ni}^k = \lim_{k\to\infty} W_{ii_1}^k .$$

Это – стохастическая матрица с одинаковыми столбцами. Следовательно, в пределе приоритет компоненты в контуре дается собственным вектором, который соответствует наибольшему собственному значению (равному единице для стохастической матрицы) его матрицы влияния.

8.5. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ И АБСОЛЮТНЫЕ ПРИОРИТЕТЫ

Нас интересуют приоритеты двух типов: показывающие влияние или воздействие одного элемента на любой другой элемент в системе, известные как относительные приоритеты, а также абсолютный приоритет любого элемента безотносительно того, на какие элементы он влияет. В общем случае мы ищем предельные значения этих приоритетов. Вычисление приоритетов показывает, к чему могут привести существующие тенденции, если нет изменений в предпочтениях, которые влияют на приоритеты. Экспериментируя с процессом модификации приоритетов и наблюдая за их предельными тенденциями, можно направлять систему к более желаемому результату.

Теперь займемся формальными определениями. Если ω_{ij} – относительный приоритет i-го элемента над j-м элементом в системе, тогда [38, 70, 120]

$$\omega_{ij}^{(1)} = \omega_{ij} ,$$

$$\omega_{ij}^{(2)} = \sum_m \omega_{im}\omega_{mj} ,$$

$$\omega_{ij}^{(k+1)} = \sum_m \omega_{im}\omega_{mj}^{(k)} ,$$

$$\omega_{ij}^{(h+k)} = \sum_m \omega_{im}^{(h)} = \omega_{mj}^{(k)} .$$

Сумма относительных приоритетов по всем возможным путям от данного элемента дает приоритет элемента. Это равносильно возведению матрицы W в степени. (Последнее выражение эквивалентно следующему $W^{h+k} = W^h W^k$.)

При заданном начальном приоритете i-го элемента, равном $\omega_i^{(0)}$, имеем следующий абсолютный приоритет j-го элемента по путям длины $k \neq 0$:

$$\omega_j^{(k)} = \sum_i \omega_i^{(0)}\omega_{ij}^{(k)} .$$

Задача заключается в нахождении матрицы предельного относительного приоритета (ПОП) W^∞ и вектора предельного абсолютного приоритета (ПАП) ω^∞ при $k \to \infty$. (Что касается приоритетов системы, нас также может интересовать определение приоритетов для конечных значений k. Это не выдвигает задачи существования, возникающей в предельном случае.) Особый интерес вызывает определение условий, когда ПАП не зависит от начальных приоритетов $\omega_i^{(0)}$. Такая независимость называется *эргодичностью* системы.

Далее следует классификация элементов, полезная для характеристики системы. Читатель при желании может продолжить обсуждение существования и построения ПОП и ПАП решений.

Элемент j может быть достигнут из элемента i, если для некоторого $k \geq 1$, $\omega_{ij}^{(k)} > 0$, где $W^k = \left(\omega_{ij}^{(k)}\right)$. Здесь W^k — k-*предел достижимости* каждого элемента. Подмножество элементов C системы *замкнуто* (в противоположность определению в марковских цепях), если $\omega_{ij}^{(k)} = 0$, где бы ни было i в C и j не в C. Отсюда следует, что ни один элемент в C не может быть достигнут из любого элемента, не находящегося в C. Подмножество C минимально, если оно не содержит соответствующих замкнутых подмножеств элементов. Множество элементов, которые образуют минимальное замкнутое подмножество, соответствует неприводимой матрице. Если матрица всей системы или подсистемы неприводима, то система или подсистема сама называется неприводимой. Система называется разложимой, если она состоит из двух или более замкнутых множеств.

Если мы *вначале* стартуем с j-го элемента для некоторого фиксированного j и обозначим его первое воздействие на самого себя по пути длины $k \geq 1$ через f_j^k, то имеем

$$f_j^{(1)} = \omega_{jj}^{(1)}, f_j^{(2)} = \omega_{jj}^{(2)} - f_j^{(1)}\omega_{jj}^{(1)} \ldots f_j^{(k)} = \omega_{jj}^{(k)} - f_j^{(1)}\omega_{jj}^{(k-1)} - \ldots - f_j^{(k-1)}\omega_{jj}^{(1)}$$

$$f_j = \sum_{k=1}^{\infty} \quad = f_j^{(k)}$$

показывает совокупное воздействие j на себя. *Среднее* воздействие (j на себя) получаем в виде:

$$u_j = \sum_{k=0}^{\infty} k f_j^{(k)} .$$

В соответствии с приоритетом влияния имеем (новые термины, вводимые ниже, существенны, так как мы не занимаемся временными переходами):

1. Если $f_j = 1$, то j называют *устойчивым* (рекуррентным) элементом. Таким образом, элемент называется устойчивым, если сумма его относительных приоритетов на себя за один шаг (петля), два шага (по контуру, включающему один другой элемент), три шага (включающими два других элемента) и т. д., равна единице.

2. Если $f_j < 1$, то j называют *неустойчивым* (преходящим). Элемент j, который является или устойчивым, или неустойчивым, называется *циклическим* (периодическим) с цикличностью (периодом) c, если u_j имеет величины c, $2c$, $3c$, …, где c – наибольшее целое, большее единицы, с этим свойством ($\omega_{ij}^{(k)} = 0$, где k не делится без остатка на c). Устойчивый элемент j, для которого u_j бесконечно, называют *исчезающим* (нулевым). Устойчивый элемент j, который не является ни циклическим, ни исчезающим (т. е. $u_j < \infty$), называют *поддерживающим* (эргодическим).

И для неустойчивого, и для исчезающего элемента j $\omega_{ij}^{(k)} \to 0$ для всех i. Если один элемент в неприводимой подсистеме – циклический с периодом c, то все элементы в этой подсистеме – циклические с периодом c. Известно, что если j – поддерживающий элемент, то при $k \to \infty$, $\omega_{jj}^{(k)} \to 1/u_j$; j – исчезающий элемент, если это число ноль, и поддерживающий элемент, если оно положительно. Все элементы неприводимой подсистемы являются либо неустойчивыми, либо устойчивыми, и соответственно система называется неустойчивой или устойчивой.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ зависит от } j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Замечание. Следующее выражение всегда имеет место, независимо от того, приводима система или нет. В случае неприводимости ее значения известны:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ и } j \text{ неустойчивы,} \\ 1/u_j, & \text{если } i \text{ и } j \text{ устойчивы.} \end{cases}$$

Все конечные системы элементов должны иметь, по крайней мере, один поддерживающий элемент, который образует замкнутое неприводимое подмножество элементов. Так как все устойчивые элементы конечной системы являются поддерживающими, образованный таким образом блок (компонента) называют поддерживающим.

Если j – циклический элемент с периодом $c > 1$, то

если k не является множителем c и

$$\omega_{jj}^{(m)} \to c/u_j \ ,$$

при $m \to \infty$; $k = mc$, m – положительно и c – наибольшее целое, для которого $k = mc$.

Ранее отмечалось, что приводимость и примитивность играют важную роль при доказательстве существования ПОП и ПАП. Теперь представим несколько основных, относящихся к этим понятиям фактов, которые будут полезны при дальнейшем обсуждении.

Неотрицательная неприводимая матрица примитивна, если имеет единственное главное собственное значение. Если матрица имеет другое собственное значение с тем же модулем, что и главное собственное значение, то ее называют импримитивной.

Если главное собственное значение имеет кратность больше единицы (равную единице), но не имеется других собственных значений с таким же модулем, как у главного собственного значения, то матрицу называют правильной (регулярной).

Примитивная матрица всегда регулярна и, следовательно, правильна, однако обратное утверждение неверно, например, что единичная матрица имеет собственным значением единицу. Кратность собственного значения равна порядку матрицы. Матрица правильна тогда и только тогда, когда в нормальной форме изолированные блоки примитивны. Для регулярной матрицы число изолированных блоков равно единице.

Заметим, что если все элементы W положительны, то мы имеем примитивную матрицу и справедлива теорема о стохастических примитивных матрицах, существуют и ПОП и ПАП. Они совпадают и получаются в результате решения задачи о собственном значении $W\omega = \omega$. В действительности ω – любой столбец $\lim W^k$. Такой же результат справедлив, если W – примитивная матрица.

В общем случае неотрицательная матрица W может иметь нулевые элементы. Тогда матрица или неприводимая, или приводимая. Если она неприводимая, то она примитивная, и в этом случае применимы приведенные выше соображения, либо она импримитивная. В последнем случае матрица имеет s не равных единице собственных значений (s называется индексом импримитивности), модули которых равны единице. Это число играет важную роль для получения решения в общем случае, из которого следует решение в данном случае. Здесь достаточно заметить, что все $W, W^2, \ldots, W^{s-1}$ не являются правильными матрицами, и их степени имеют тенденцию к периодическим повторениям. Система циклична с периодом s.

Замечание. Система ациклична, циклична, неприводима, приводима в зависимости от того, является ли соответствующая матрица W примитивной, импримитивной, неприводимой или приводимой.

Если W неотрицательна и приводима, то она приводится к нормальной форме. Если изолированные блоки примитивны (говорят, что они соответствуют существенным компонентам, а оставшиеся матрицы соответствуют несущественным компонентам), то система по определению называется примитивной и ПОП и ПАП существуют (см. [53], стр. 112).

Важное замечание. Когда стохастическая по столбцам матрица приводима, ее существенные компоненты определяют систему, так как они являются «источниками», или воздействующими на приоритет компонентами, в противоположность «сточным колодцам», или переходным – поглощающим состояниям марковской цепи. В любой диаграмме, за исключением петель, стрелки начинаются в этих компонентах и не заканчиваются в них.

Решение для ПОП определяется выражением

$$W^{\infty} \equiv \lim_{k\to\infty} W^k = \frac{\left(I-W\right)^{-1}\Psi\left(1\right)}{\Psi'\left(1\right)},$$

где $\Psi\left(\lambda\right)$ – минимальный полином W, а $\Psi'\left(\lambda\right)$ – его первая производная по λ. Каждый столбец W^{∞} является характеристическим вектором W, соответствующим $\lambda_{\max}=1$. Если $\lambda_{\max}=1$ – простое, т. е. W регулярна, то $\Psi\left(\lambda\right)$ можно заменить на $\Delta\left(\lambda\right)$ – характеристический полином W.

Решение для ПАП получается

$$\omega^{\infty} = W^{\infty}\omega^{(0)},$$

если W – правильная матрица, и как собственный вектор

$$W\omega^{\infty} = \omega^{\infty},$$

если W регулярна.

Замечание. Можно показать, что матрицы W^{∞}, соответствующие существенным компонентам, положительны; что касается матриц воздействий на приоритеты от существенных к несущественным компонентам, то они также положительны (они получаются в результате произведения $\left(I-Q\right)^{-1}\left(R_1, R_2, \ldots, R_k\right)^T$ нормальной формы; см. гл. 7). Только матрицы воздействия от несущественных к несущественным или от несущественных к существенным компонентам равны нулю.

Наконец, если не все изолированные блоки примитивны, то, как было отмечено, каждый имеет индекс импримитивности. Рассмотрим их наименьшее общее кратное, которое представляет собой цикличность c системы. Используя степени W, ПОП получаем в виде

$$\tilde{W} = \frac{1}{c}\left(I+W+\ldots+W^{c-1}\right)\left(W^c\right)^{\infty} = \frac{1}{c}\left(1-W^c\right)\left(1-W\right)^{-1}\left(W^c\right)^{\infty},$$

а ПАП – в виде

$$\tilde{\omega} = \tilde{W}\omega^{(0)}.$$

$\tilde{W}$ называют средним ПОП, $\tilde{\omega}$ – средним ПАП.

Если имеется единственный изолированный блок, то средний ПАП является независимым от начальных приоритетов и определяется единственным образом как решение

$$W\omega = \omega.$$

Это в точности соответствует случаю неприводимой импримитивной системы.

8.6. ПРИМЕРЫ

Два приведенных ниже примера даны по двум соображениям: первый показывает, как действует суперматрица, а второй – как может быть применен метод в социальны науках. Конечно, формулировка вопросов для суждения требует большой квалифицированной подготовки экспертов в данной области деятельности для представления существенных факторов и уверенности в том, что нет смещения или перекрытия сравнительных понятий. Как будет показано далее, интерпретация растущих степеней W имеет практическую важность.

В обоих случаях задача определяется очень кратко, вместе с диаграммой, представляющей систему и ее связи. Здесь не приводятся 68 матриц парных сравнений для элементов и одна для компонент в первом примере, и 33 – для элементов и 4 – для компонент во втором примере, за исключением последних четырёх матриц.

Суперматрица сформирована в два этапа. На первом заполняются блоки собственных векторов. После получения приоритетов для компонент и использования их весов в матрице получается заключительная стохастическая по столбцам суперматрица. Важно отметить, что суммы по столбцам должны быть равными единице, в противном случае может быть расхождение к бесконечности или сходимость к нулю. Важным является вопрос о том, как взвешивать компоненты. Каждый блок в столбце, который соответствует компоненте суперматрицы, взвешивается соответствующим коэффициентом собственного вектора, полученным из матрицы парных сравнений, включающей те компоненты (с ненулевыми элементами блока в том столбце блоков), которые воздействуют на данную компоненту столбца. (На диаграммах эти компоненты имеют стрелки, направленные от них к заданной компоненте столбца.)

В обоих примерах интерес представляет аппроксимация ПОП, получающаяся при возведении W в большие степени. В наш век компьютеров мои ученики (Н. Бамани, который работал над первым примером, и А. Челсон и С. Паркер, работавшие над вторым) предпочли возводить матрицу в большие степени, не используя формул для W^{∞}, приведенных в разд. 8.5.

В первом примере дана невзвешенная суперматрица. Она соответствует полному графу компонент системы. Следовательно, она положительна и более того – примитивна. Для ПОП все столбцы W^{∞} одинаковы и вектор ПАП может быть любым из этих столбцов. Достаточно выдать аппроксимацию ПАП с W^{100}. Для удобства читателя вектор этого решения помещен рядом с начальными определениями факторов и компонент.

Во втором примере представлены блоки суперматрицы до взвешивания. Затем следуют матрицы парных сравнений компонент, а затем суперматрица W, которая получается в результате взвешивания каждого блока согласно приведенному выше описанию. Наконец, W^{89} представляется в качестве аппроксимации W^{∞}.

Отметим, что в нашей совместной работе с Дж. Бенеттом по терроризму [135] показано, что правильно построенная иерархия может дать результаты, близкие к результатам, получаемым для системы с обратной связью.

Пример о воспитании ребенка

Наш первый пример касается воспитания ребенка. Ребенок в ранние годы находится под влиянием некоторых сил. Желательно установить приоритеты этих влияний. Так как при взаимодействии этих сил имеется обратная связь, задача может быть представлена сетью. Основные группы источников влияния и их существенные характеристики даны в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Компоненты	Факторы	Приоритеты (из ПАП аппроксимации)
C_1 – Отец	W – Работа	0,024
	R_f – Отдых	0,022
	RE_f – Религия	0,019
	ED – Образование	0,044

	RWC – Отношение с женой и детьми	0,020
C_2 – Мать	H – Дом R_m – Отдых PE_m – Религия PI – Профессиональные интересы TC – Забота о детях RHC – Отношение с мужем и детьми	0,024 0,026 0,027 0,025 0,028 0,021
C_3 – Дети	RP – Отношение с родителями S – Школа PL – Игры PE – Образование родителей	0,013 0,020 0,012 0,026
C_4 – Внешние силы	S_0 – Школа PR – Ровесники ME – Средства массовой информации C – Культура	0,120 0,074 0,090 0,360

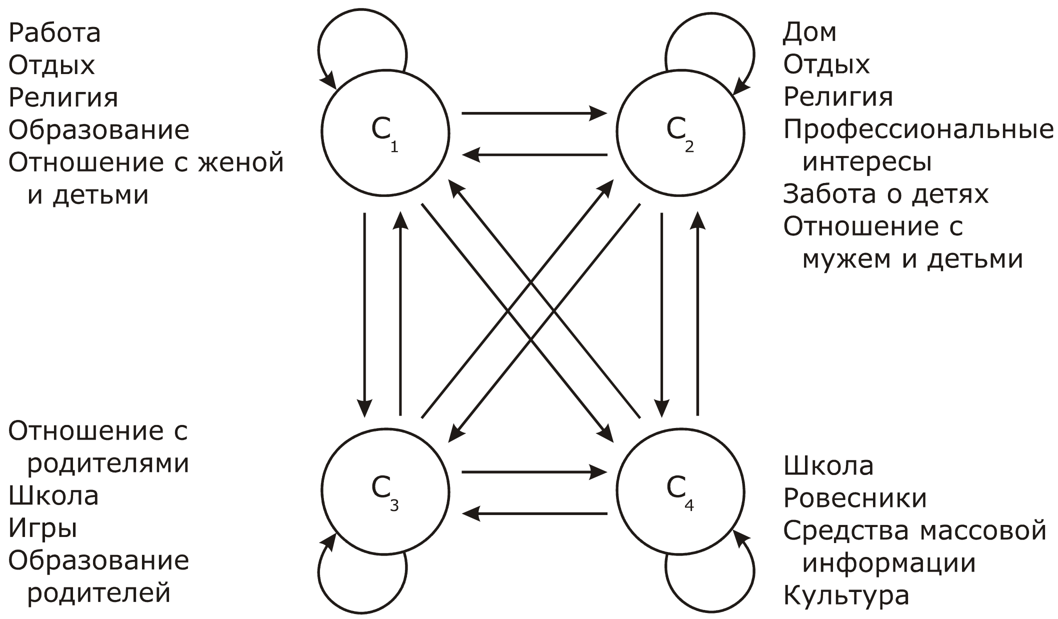


Рис. 8.5

Суждения для матриц парных сравнений были представлены группой студентов, которых особенно интересовала эта тема. Заслуживает внимания, что эти студенты были иностранцами и их суждения могут отличаться от суждений, которые могли быть у группы американцев. Останавливаться на интерпретации результатов, по-видимому, не имеет смысла за исключением того, что преобладающие факторы, которые включают культуру и школу, находятся во «внешней» компоненте.

Сеть взаимодействий показана на рис. 8.5.

Пример со сталелитейной промышленностью

В этом примере рассматриваются компоненты и факторы системы торговли сталью для нахождения изменений в текущих приоритетах. Факторы и компоненты показаны на рис. 8.6.

Эффективность измеряется тем, как производится продукция, и тесно связана с современной технологией.

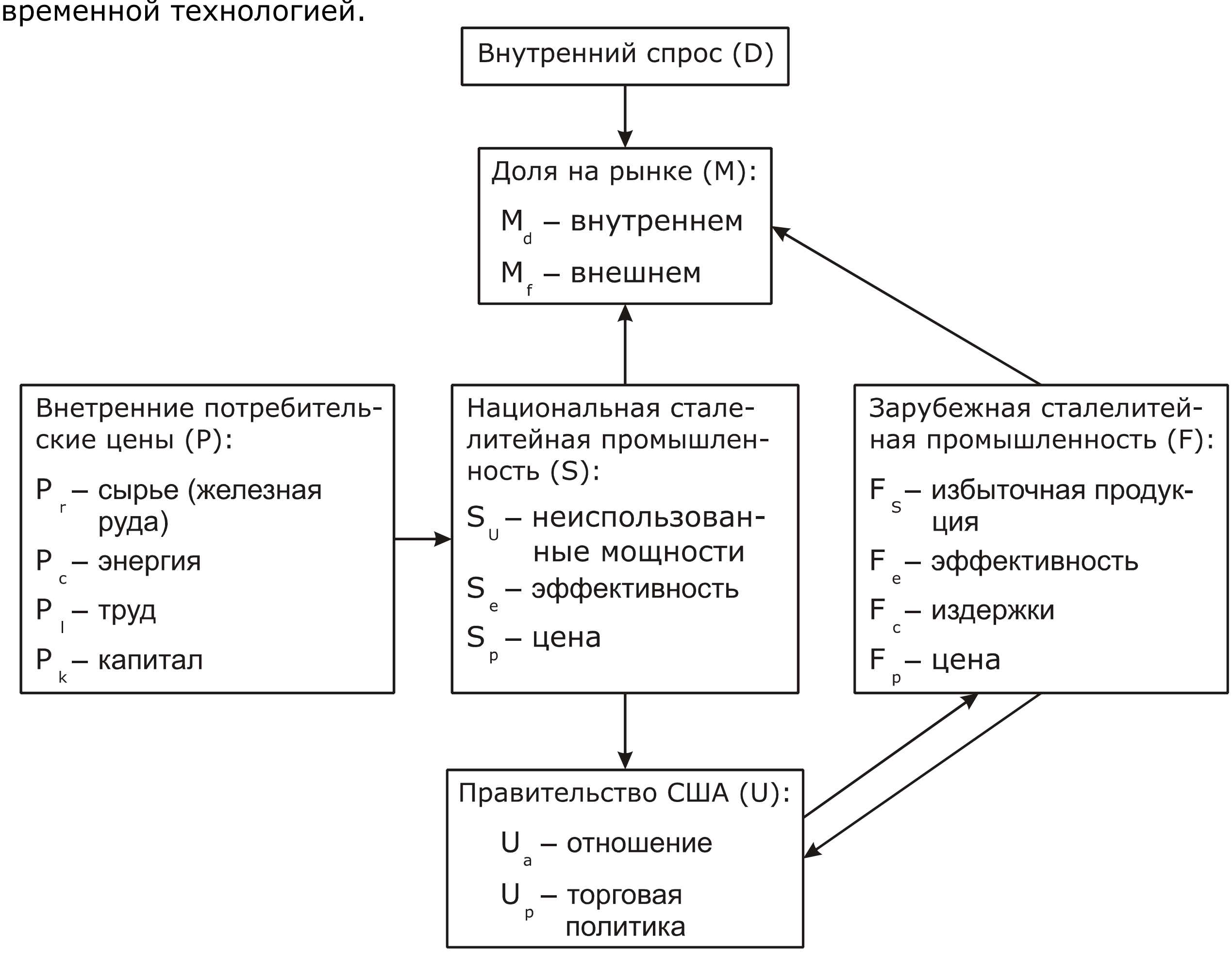


Рис. 8.6

Избыточная продукция: Япония произвела сталь в большом количестве, превышавшем потребление, и, следовательно, может дешево ее продавать.

Неиспользованные мощности появляются в результате уменьшения спроса. Для того чтобы не допустить безработицу и подавить конкуренцию, товар может быть продан по цене ниже себестоимости.

Позиция правительства направлена против инфляции, которая появляется из-за повышения цены на сталь.

Торговая политика правительства выражает нежелание защищать отечественную промышленность.

Цена капитала: низкие процентные ставки в сталелитейной промышленности в зарубежных странах и высокие процентные ставки в США, косвенно вызывающие рост других цен. Невзвешенная суперматрица представлена в табл. 8.3. Для взвешивания суперматрицы (превращения ее в стохастическую по столбцам) взвешиваются компоненты в соответствии с их воздействием на каждый столбец блоков.

Таблица 8.2. Невзвешенная суперматрица для примера о воспитании ребёнка

		C_1					C_2						C_3				C_4			
		W	*R*	*RE*	*ED*	*RWC*	*H*	*R*	*RE*	*PI*	*TC*	*RHC*	*RP*	*S*	*PL*	*PE*	*SO*	*PR*	*ME*	*C*
C_1	*W*	0.222	0.209	0.212	0.208	0.257	0.224	0.224	0.150	0.228	0.198	0.213	0.198	0.170	0.123	0.372	0.246	0.149	0.157	0.143
	R	0.095	0.125	0.140	0.170	0.220	0.151	0.224	0.150	0.170	0.232	0.111	0.111	0.144	0.324	0.148	0.150	0.186	0.142	0.178
	RE	0.100	0.145	0.147	0.100	0.110	0.172	0.149	0.344	0.172	0.174	0.122	0.110	0.127	0.132	0.089	0.126	0.130	0.142	0.161
	ED	0.462	0.396	0.374	0.382	0.194	0.229	0.254	0.161	0.260	0.198	0.245	0.260	0.401	0.303	0.297	0.353	0.375	0.423	0.357
	RWC	0.121	0.125	0.127	0.140	0.219	0.224	0.149	0.105	0.170	0.198	0.309	0.314	0.158	0.118	0.094	0.125	0.160	0.136	0.161
C_2	*H*	0.216	0.185	0.144	0.142	0.145	0.195	0.195	0.220	0.168	0.283	0.200	0.257	0.249	0.148	0.116	0.203	0.131	0.164	0.110
	R	0.105	0.190	0.144	0.162	0.111	0.130	0.137	0.122	0.102	0.122	0.113	0.115	0.124	0.174	0.219	0.132	0.207	0.213	0.198
	RE	0.122	0.148	0.260	0.129	0.127	0.155	0.088	0.122	0.113	0.103	0.113	0.103	0.124	0.111	0.109	0.129	0.145	0.147	0.282
	PI	0.278	0.170	0.144	0.283	0.163	0.135	0.143	0.189	0.178	0.140	0.161	0.139	0.142	0.156	0.268	0.210	0.168	0.147	0.124
	TC	0.140	0.146	0.143	0.142	0.226	0.215	0.239	0.192	0.246	0.221	0.253	0.244	0.249	0.300	0.178	0.165	0.188	0.164	0.176
	RHC	0.139	0.161	0.165	0.142	0.225	0.170	0.198	0.155	0.193	0.131	0.160	0.142	0.112	0.111	0.110	0.161	0.162	0.165	0.110
C_3	*RP*	0.132	0.141	0.250	0.087	0.204	0.278	0.167	0.250	0.183	0.247	0.333	0.236	0.140	0.143	0.166	0.177	0.167	0.147	0.160
	S	0.151	0.140	0.250	0.246	0.246	0.163	0.167	0.250	0.282	0.209	0.167	0.200	0.103	0.270	0.410	0.195	0.333	0.390	0.354
	PL	0.132	0.263	0.250	0.133	0.204	0.163	0.333	0.250	0.164	0.198	0.167	0.095	0.117	0.162	0.103	0.195	0.167	0.159	0.131
	PE	0.585	0.456	0.250	0.534	0.346	0.396	0.333	0.250	0.371	0.346	0.333	0.469	0.340	0.425	0.321	0.433	0.333	0.304	0.355
C_4	*SO*	0.290	0.151	0.135	0.209	0.186	0.220	0.165	0.140	0.343	0.162	0.200	0.186	0.225	0.140	0.262	0.341	0.220	0.177	0.161
	PR	0.108	0.240	0.129	0.095	0.166	0.121	0.200	0.131	0.150	0.162	0.200	0.156	0.124	0.263	0.140	0.109	0.121	0.114	0.080
	ME	0.101	0.085	0.129	0.103	0.156	0.121	0.140	0.140	0.110	0.151	0.200	0.166	0.135	0.140	0.140	0.118	0.121	0.188	0.143
	C	0.501	0.424	0.607	0.593	0.492	0.538	0.495	0.589	0.397	0.525	0.400	0.492	0.516	0.457	0.458	0.532	0.538	0.521	0.616

Таблица 8.3. Невзвешенная суперматрица для примера со сталелитейной промышленностью

		M		S			U		F				P				D
		M_d	M_f	S_u	S_e	S_p	U_a	U_p	F_s	F_e	F_c	F_p	P_r	P_c	P_l	P_k	D
M	M_d	0.5	0.5		0		0			0				0			0
	M_f	0.5	0.5														
S	S_u	0.09	0.09	0.43	0.64	0.08	0.58	0.73		0				0			0
	S_e	0.09	0.09	0.43	0.10	0.23	0.11	0.10									
	S_p	0.82	0.82	0.14	0.26	0.69	0.31	0.17									
U	U_a		0		0		0.9	0.17	0.1	0.1	0.1	0.1		0			0
	U_p						0.1	0.83	0.9	0.9	0.9	0.9					
F	F_s	0.28	0.28		0		0.21	0.31	0.06	0.39	0.26	0.32		0			0
	F_e	0.06	0.06				0.43	0.08	0.18	0.07	0.56	0.13					
	F_c	0.06	0.06				0.05	0.08	0.20	0.39	0.07	0.50					
	F_p	0.60	0.60				0.21	0.53	0.56	0.15	0.11	0.05					
P	P_r		0	0.05	0.05	0.06	0			0			0.12	0.12	0.04	0.04	0
	P_c			0.57	0.31	0.56							0.06	0.06	0.16	0.16	
	P_l			0.28	0.11	0.26							0.26	0.26	0.57	0.23	
	P_k			0.10	0.53	0.12							0.56	0.56	0.23	0.57	
D	D	1	1		0		0			0				0			1

Таблица 8.4. Взвешенная суперматрица

	M		*S*			*U*		*F*				*P*				*D*
M	0.03	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.03	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S	0.05	0.05	0.11	0.16	0.02	0.05	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.05	0.05	0.11	0.03	0.06	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.47	0.47	0.04	0.06	0.17	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
U	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.66	0.12	0.08	0.08	0.08	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.61	0.72	0.72	0.72	0.72	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
F	0.08	0.08	0.00	0.00	0.00	0.04	0.06	0.01	0.08	0.05	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.02	0.02	0.00	0.00	0.00	0.10	0.02	0.04	0.01	0.11	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.02	0.02	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.04	0.08	0.01	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.17	0.17	0.00	0.00	0.00	0.04	0.10	0.11	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
P	0.00	0.00	0.04	0.04	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.12	0.12	0.04	0.04	0.00
	0.00	0.00	0.43	0.23	0.42	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06	0.06	0.16	0.16	0.00
	0.00	0.00	0.21	0.08	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.26	0.26	0.57	0.23	0.00
	0.00	0.00	0.08	0.40	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.56	0.56	0.23	0.57	0.00
D	0.09	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

Таблица 8.5. 89-я степень взвешенной суперматрицы

	M		*S*			*U*		*F*				*P*				*D*
M	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
U	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
F	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
P	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.00
	0.14	0.13	0.14	0.14	0.14	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.14	0.14	0.14	0.14	0.00
	0.34	0.34	0.37	0.36	0.36	0.41	0.41	0.41	0.41	0.41	0.41	0.36	0.36	0.36	0.36	0.00
	0.43	0.43	0.46	0.45	0.45	0.51	0.51	0.51	0.51	0.51	0.51	0.45	0.45	0.45	0.45	0.00
D	0.10	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

Таким образом, строчные компоненты с ненулевыми элементами для блоков в блочных столбцах сравниваются в соответствии с их воздействием на компоненту этих блочных столбцов. Затем каждый блок взвешивается посредством коэффициента собственного вектора, соответствующего компоненте в этой строке. Этот процесс приводит к следующим четырем матрицам парных сравнений.

		M	S	F	D	Собственный вектор
Блочный столбец M	M	1	0,125	0,167	0,333	0,047
	S	8	1	3	6	0,568
	F	6	0,333	1	5	0,293
	D	3	0,167	0,200	1	0,092

		S	P	Собственный вектор
Блочный столбец S	S	1	0,333	0,250
	P	3	1	0,750

		S	U	F	Собственный вектор
Блочный столбец U	S	1	0,143	0,333	0,081
	U	7	1	5	0,731
	F	3	0,20	1	0,188

		U	F	Собственный вектор
Блочный столбец F	U	1	4	0,8
	F	0,25	1	0,2

Взвешивая суперматрицу и используя полученные выше веса, получаем следующую стохастическую по столбцам матрицу (см. табл. 8.4) и её 89-ю степень (см. табл. 8.5).

Возведение матрицы в степени представляет долгосрочные относительные влияния элементов друг на друга. Мы можем, во-первых, сказать, что цена и спрос являются ведущими факторами в сталелитейной промышленности. Отметим, что по мере возведения матрицы в большие степени, важность цены капитала на американском рынке акций растет (что видно из матриц, не приведенных здесь) от 0 до 0,43, поэтому удорожание вкладов в отечественную сталелитейную промышленность означает угрозу ее дальнейшему расширению и даже выживанию. Важность неиспользованных мощностей снижается до нуля, как и всех неустойчивых элементов в системе.

Другим более очевидным заключением является то, что влияние спроса в сталелитейной промышленности не меняется в течение длительного периода. Цена капитала оказывает наибольшее общее влияние на модель. Как и ожидалось, приоритет цены на капитал будет повышаться по сравнению с другими исходными ценами, так как цена на капитал оказывает на них большое влияние. В действительности это то, что происходит в течение длительного времени, но за короткий период времени другие элементы оказывают большое влияние на относительные приоритеты.

Замечание. Может оказаться полезным закончить эту главу указанием на то, что зависимость между элементами заданной компоненты системы может быть вычислена, как показано в гл. 5. Результат затем взвешивается с помощью независимых приоритетов, вычисленных в этой главе.

ГЛАВА 9
ШКАЛИРОВАНИЕ И МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

9.1. ВВЕДЕНИЕ

Наш подход к установлению приоритетов и иерархиям соприкасается с методами шкалирования, теорией полезности и многокритериальными методами. Здесь проводится также анализ главных компонент, обсуждаются метод логарифмических наименьших квадратов и метод наименьших квадратов. После нескольких переработок главу пришлось сократить почти до размеров наброска. Для дополнительного чтения читателю следует обратиться к цитируемой литературе.

9.2. ШКАЛЫ И ИЗМЕРЕНИЕ

Теоретически измерение – это построение шкал посредством изоморфного отображения *эмпирической* системы с отношениями в *численную* систему с отношениями. Производное измерение выводит новую шкалу из других известных шкал. Хорошим примером производной шкалы может быть шкала плотности, полученная из основных шкал для массы и объема.

По-видимому, шкала наилучшим образом представляется в терминах класса преобразований, которые оставляют ее инвариантной, т. е. таких преобразований, которые сохраняют содержащуюся в ней информацию.

Существующие шкалы приводятся ниже в порядке увеличения эффективности:

1. *Шкала наименований*, единственная с точностью до любого взаимнооднозначного преобразования, которая состоит, по существу, из присваиваемых объектам наименований.

2. *Шкала порядков*, которая упорядочивает объекты по рангам и инвариантна по отношению к монотонно возрастающим преобразованиям.

3. *Шкала интервалов*, единственная с точностью до положительного линейного[*] преобразования вида $y = ax + b$, $a > 0$.

4. *Шкала разностей*, инвариантная по отношению к преобразованию вида $y = x + b$.

5. *Шкала отношений* (шкала, используемая для определения приоритетов), инвариантная по отношению к положительным линейным преобразованию вида $y = ax$, $a > 0$.

Существенной разницей между шкалой отношений и шкалой интервалов является то, что в первой за точку отсчета берется начало координат, в то время как второй этого не требуется. Шкала отношений исторически возникла в измерениях частот при вычислении вероятностей.

Формально шкала – это тройка, состоящая из множества элементов S, бинарной операции «$\bigcirc$» на элементах S и преобразования F элементов в действительные числа. В нашем случае S – множество видов деятельности или объектов $S_1, \ldots, S_n$. Бинарный оператор «$\bigcirc$» – бинарное, или попарное, сравнение элементов для выявления превосходства одного из них по отношению к заданному свойству. Например, мы пишем $S_i \bigcirc S_j$, указывая этим на то, что S_i, сравнивается с S_j, для выявле-

[*] Обычно такое преобразование называют афинным. – *Прим. перев.*

ния сравнительного превосходства, например, относительно веса, если элементы S – камни. Для определения преобразования F переводим парные сравнения в форму численных значений, представляющих парные сравнения, и составляем из них матрицу A, затем решаем задачу нахождения собственного значения, чтобы определить точное соответствие между объектами и действительными числами. Весь этот процесс определяет преобразование.

Почему получается шкала отношений, когда используется МАИ? Нужно показать, что парные сравнения, определенные посредством бинарной операции, отображаются в шкалу отношений действительных чисел, соответствующих сравниваемым элементам. Например, если

$$A_1^F \to \omega_1,\ A_2^F \to \omega_2,\ A_1 \bigcirc A_2^F \to \omega_1/\omega_2 .$$

В общем случае бывает трудно показать, какой вид шкалы используется, особенно когда преобразование сложное и включает физические операции, например такие, как подъем и опускание ртути при изменении температуры. Для задачи, связанной с физической системой, вид используемой шкалы устанавливают эмпирически. Тем не менее, когда имеют дело с абстрактной системой, нужен теоретический метод определения вида шкалы. Теперь мы знаем, что решение задачи нахождения главного собственного значения для положительных матриц единственно с точностью до положительного постоянного множителя. Поэтому преобразование дает множество действительных чисел $a\omega_1,\dots,a\omega_n$, по одному для каждого элемента $S_1,\dots,S_n$, где a – произвольное положительное число, что точно соответствует определению шкалы отношений. Следует отметить, что шкала отношений, полученная из матрицы суждений, является нашей оценкой принятой основной шкалы отношений, которая получилась бы, если матрица суждений была бы согласованной.

Дальше следуют полезные выводы по шкалам отношений. Можно сложить пару элементов одной и той же шкалы отношений и получить третий элемент, принадлежащий той же самой шкале отношений. Следовательно, если $y = ax$ и $y = ax'$, то $y + y' = a\left(x + x'\right)$ и множитель остается по-прежнему равным a. Однако ни произведение, ни частное двух таких элементов не принадлежит той же шкале отношений. Следовательно, если $yy' = a^2xx'$ и $y/y' = x/x'$, и ни один из этих двух элементов не принадлежит шкале отношений $y = ax$, так как множитель $a \neq 1$ отсутствует у обоих.

Полезно отметить, что сумма двух элементов из двух различных шкал отношений не принадлежит шкале отношений. Тем не менее произведение и частное принадлежит шкале отношений, отличающейся от исходных шкал отношений, если a или b не равны единице. Чтобы убедиться в этом, напишем $y = ax$ и $y' = bx'$, получим $y + y' = ax + bx'$ и $yy' = \left(ab\right)xx'$, $y/y' = \left(a/b\right)x/x'$. Итак, работая с двумя различными шкалами отношений и желая получить значимые числа в новой шкале отношений, следует умножать и делить, но никак не складывать или вычитать. Вот почему бессмысленно складывать такие величины, как время и расстояние, но можно извлечь смысл из деления длины на время, получая скорость.

Теория измерений связана с некоторыми областями теории представления, теории единственности, процедурами измерений и анализа ошибок. Теория представления включает представление требуемых отношений посредством шкалы; единственность связана с допустимыми гомоморфизмами, которые сохраняют отношения; процедуры измерений оперируют с построением гомоморфизмов и анализ ошибок связан со способом подгонки ошибок.

В своей диссертации Л. Варгас показал, что МАИ является методом измерения. Во-первых, он сформулировал набор аксиом, которые характеризуют существование гомоморфизма между множеством альтернатив и множеством положительных действительных чисел (теорема представления). Во-вторых, показал, что гомоморфизм единственен с точностью до преобразования подобия (теорема единственности), т. е. множество допустимых преобразований гомоморфизма является множеством преобразований подобия. Таким образом, тройка, состоящая из множества альтернатив, множества положительных действительных чисел (или его несчетного подмножества) и гомоморфизма, является шкалой отношения. Тем не менее эта шкала отношений является шкалой отношений только в узком смысле, т. е. её элементы не меняются при преобразовании.

Он подчеркнул также, что иерархическое измерение включает основное и производное измерения и что в результате получается шкала отношений, единственная с точностью до того же самого преобразования подобия, что и второй уровень иерархии.

9.3. ТЕОРИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

Предметом теории полезности является представление в действительных числах относительных предпочтении отдельного лица при выборе из некоторого множества элемента.

Порядковая функция полезности перечисляет элементы, расположенные по рангу. Кардинальная полезность включает информацию о силе предпочтений. (Существуют также упорядоченное метрическое ранжирование и многомерная теория полезности.)

Как сравнить полезности альтернативных решений, когда при оценке полезности каждой альтернативы должен быть учтён вклад многих существенных факторов?

Теории аддитивной полезности предлагают возможный подход к этой проблеме в предположении, что, грубо говоря, полезность целого равна сумме полезностей, приписываемых его частям.

Процедура, разработанная в [77] и применённая для решения проблемы аэропорта города Мехико, основана, по существу, на использовании многомерной функции полезности.

Желательно оценить множество альтернатив с целью выбора наилучшей в зависимости от их воздействия на n аспектов. Воздействия описываются вектором чисел $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$. В момент принятия решения не может быть уверенности в последствиях. Поэтому вводится функция плотности вероятности $p\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, описывающая правдоподобность каждого итога. Используя эту функцию плотности, можно «определить» функцию полезности $u\left(x\right)$. Затем можно вычислить ожидаемую полезность каждой альтернативы. Выбирается альтернатива с наибольшей ожидаемой полезностью.

Определять полезность с одновременным учетом более чем двух аспектов чрезвычайно трудно, в результате делаются упрощающие допущения для получения такой функции f, что

$$u\left(x\right) = f\left[u_1\left(x_1\right), \ldots, u_n\left(x_n\right)\right],$$

где $u_i\left(x_i\right)$ – функция полезности относительно аспекта i.

9.4. КРАТКОЕ СРАВНЕНИЕ МЕТОДА СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ С ДРУГИМИ МЕТОДАМИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИМИ ШКАЛЫ ОТНОШЕНИЙ

В своей краткой статье Шепард [146] указывает, что исследования по матрицам превосходства и соответствующим измерениям не были такими обширными, какими были исследования по трем другим типам: близости, сечению и совместимости. Мы, по существу, интересовались матрицами превосходства и их использованием для получения шкал отношения и далее для измерения иерархических воздействий. Сравним этот метод с другими исследованиями. Мы надеемся, что нас простят за не такое полное сравнение, как хотелось бы некоторым читателям. В действительности, суть идеи была сымпровизирована и развилась полностью из приложений. Затем ей нужно было придать законченный вид в основном потоке печатных трудов.

В модели сравнительных суждений Терстона [162] требуются парные сравнения объектов только в том смысле, что один более предпочтителен, чем другой. Он собирает информацию о стимулах в предположении нормальности процесса суждений. При дополнительных требованиях к параметрам, например при равных дисперсиях или нулевых ковариациях, он собирает различную «метрическую» информацию о стимулах.

Если k экспертов сравнивают n объектов и если f_{ij} – эмпирическая частота, соответствующая числу предпочтений экспертами объекта i над объектом j, то доля p_{ij}, с которой i предпочтительнее j,

$$p_{ij} = f_{ij}/k .$$

Терстон в [162] постулировал, что распределение всех различающихся процессов, которые определяются стимулом i, нормально относительно модального различающего процесса (или среднего). Средний различающий процесс s_i^0, ассоциируемый со стимулом i, называется значением в шкале стимула, а дисперсия различающего процесса обозначается через σ_i. В предположении о нормальности p_{ij} может быть выражено как стандартное нормальное отклонение $z_{ij} = s_i - s_j$. Поэтому $p_{ij} = 0{,}5$, когда $z_{ij} = 0$, и это имеет место в случае $s_i^0 = s_j^0$. Если $z_{ij} > 0$, то считается, что различающий процесс j выше, чем i. Имеем

$$p_{ij} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z_{ij}} \exp\left(-x^2/2\right) dx .$$

Распределение разностей $s_i - s_j$ нормально со стандартным отклонением

$$\sigma_{i-j} = \left(\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2r_{ij}\sigma_i\sigma_j\right)^{1/2} ,$$

где r_{ij} – корреляция между s_i и s_j.

Имеем закон сравнительных суждений

$$s_j - s_i = z_{ij}\sigma_{i-j} .$$

Каждая пара будет обладать таким разложением. Для четырёх объектов имеется шесть таких уравнений с 14 неизвестными: 4 искомых значения шкалы, 4 стандартных отклонения и 6 взаимных корреляций. Известны только z_{ij}. Поэтому невозможно получить единственное решение системы. В качестве первого приближения можно предположить, что все стандартные отклонения равны σ^2, а все взаимные корреляции равны r. В результате получим

$$s_i^0 - s_j^0 = z_{ij}\left[2\sigma^2(1-r)\right]^{1/2}.$$

Величина в скобках – постоянная и может служить как общая единица разделения шкал различных пар стимулов: ее можно установить равной единице.

Если обозначить

$$s^0 = (1/n)\sum_{i=1}^{n} s_i^0\ ,\ z_j^0 = (1/n)\sum_{i=1}^{n} z_{ij}\ ,$$

то, полагая $s_1^0 = 0$, можно показать, что

$$s_j^0 = s_{j-1}^0 + \left(z_j^0 - z_{j-1}^0\right).$$

С подходом Терстона связывают ряд ограничений. Например, Гилфорд [59] рекомендует ограничить диапазон вероятностей.

Торгерсон [163] систематизировал и распространил метод Терстона на шкалирование, в частности на случай, когда ковариационные члены постоянны, корреляции равны, а распределения гомоскедастичны.

Льюс предложил то, что Кумбс [26] называет моделью Брэдли-Тэрри-Льюса (БТЛ), используя логистическую кривую, которая является логарифмическим преобразованием распределения вероятностей. Хотя это отличается от предположения нормальности, практически трудно провести различие между моделью БТЛ и случаем из работы Терстона, где он предполагает нормальность распределений и равенство дисперсий. Модель БТЛ более строго основана на теории выбора поведения. Кумбс рассматривает существенное различие между двумя моделями.

Можно сопоставить наши допущения с психометрическими традициями. Мы не начинаем с гипотезы о том, что суждения в виде отношений являются независимыми вероятностными процессами. Вместо этого последствия изменений в суждениях исследуются через возмущения во всем множестве суждений. Подход такого типа приводит к критерию согласованности. Поэтому получение решений нашим методом не является статистической процедурой.

Короче говоря, многие психометрические методы производят выработку суждений, пригодных для решения в той или иной шкале. Предполагается, что если вырабатываются суждения, то это происходит до оценки в виде отношения между двумя стимулами. Поэтому наша процедура формирования решения не связана с предположениями о распределении суждений. Тем не менее, если мы хотим сравнить любое решение с критерием согласованности, следует обратиться к статистическим доводам и возмущениям всей матрицы суждений.

Использование метрической информации в матрице суждений субъектов создает аналогии с анализом главных компонент, за исключением того, что данные дают информацию о превосходстве, а не о подобии или ковариациях. (Дальнейшие рассуждения см. в конце этого раздела.) При анализе главных компонент выделяется $\lambda_{\max}$, однако решение получают также и для всех остальных λ. Тем не менее результаты должны быть интерпретированы по-другому (см. [67]).

В проводимом анализе природа стимулов и задача, которая ставится перед субъектами, также подобны «психофизическому» шкалированию, как оно мыслится Стивенсом и Галантером [156]. В последнее время оно широко используется во многих попытках построить составные меры политических переменных, включая «силу страны». Техника Стивенса навязывает согласованность тем, что экспертов просят сравнить одновременно каждый стимул со всеми другими, формируя только одну строку матрицы. Это означает, что гипотеза одномерности не может быть проверена непосредственно. Если используется метод Стивенса, то следует обратить внимание на то, чтобы суждения о стимулах были согласованными или близкими к согласованным. Вдобавок не существует способа отнести одну шкалу к другой, как это имеет место в иерархии.

Крантц [86] аксиоматизировал альтернативные процессы, связывающие стимулы с суждениями, и получил теоремы существования для шкал отношений. Подобная аксиоматизация не была распространена на иерархии шкал отношений.

Некоторые исследователи подошли к проблеме шкалирования так, как если бы познавательное пространство стимулов было бы по существу многомерным, однако вместо этого мы выбираем иерархическую декомпозицию этой многомерной структуры, чтобы установить количественные, а также качественные отношения между величинами. Отдельные величины в решениях многомерного шкалирования функционально напоминают отдельные собственные векторы на каждом уровне нашей иерархии.

Формально задача построения шкалы в виде нормализованного собственного вектора ω в уравнении $A\omega = \lambda\omega$ (для максимального λ) подобна выделению первой главной компоненты. Когда экспертов просят заполнить клетки только одной строки или одного столбца, а другие клетки вычисляются по ним (для обеспечения «совершенной согласованности»), первое собственное значение n воспроизводит, 100% изменения матрицы. Если «совершенная согласованность» накладывается на данные за исключением того, что к каждой клетке матрицы добавляется нормально распределенная случайная компонента, то теория приводит к анализу главных факторов, и получится «однофакторное» решение. Следовательно, если совершенная согласованность навязывается экспериментатором, то получается неинтересный результат точного шкалирования, которое было гарантировано, когда эксперимент представлялся в виде одного сравнения. В действительности можно убедиться, что если субъект заполняет только одну строку или столбец матрицы и если задачей субъекта является генерация отношений между парами стимулов, то процедура формально эквивалентна тому, как если бы субъекты располагали каждый стимул вдоль полупрямой с нулём на одном конце: это и есть метод «непосредственной интенсивности» психофизического шкалирования.

Не существует простого взаимоотношения между решением, полученным с помощью собственного значения, и решениями, полученными методом наименьших квадратов, хотя имеются статьи (например, [31, 72, 80]), в которых рассматривается аппроксимация матрицы данных матрицей более низкого ранга, минимизирующей сумму квадратов разностей. В общем случае оба решения одинаковы при наличии согласованности. Общепринятого критерия сравнения не существует. Следовательно, неясно, какой из методов лучше. Повторные применения процедуры нахождения собственного значения помогают достичь согласованности, которая является наиболее предпочтительным для нас критерием.

В [164] предлагается метод «определения параметров функционального отношения посредством факторного анализа». Однако утверждается, что «задача вращения осей остается нерешённой...», т. е. факторный анализ определяет параметры только в пределах линейного преобразования. В [24] обсуждаются методы определения таких преобразований, где априорный теоретический анализ или наблюдаемые величины позволяют сформулировать критерий, по отношению к которому происходит вращение решения относительно произвольного фактора.

Иерархическая композиция является индуктивным обобщением следующей идеи. Заданы веса независимых элементов одного уровня. По отношению к каждому элементу заданного уровня формируется матрица собственных векторов-столбцов элементов уровня, находящегося непосредственно ниже заданного. Затем вектор весов элементов этого уровня используется для взвешивания соответствующих собственных векторов-столбцов. Умножая матрицу собственных векторов на вектор-столбец весов, получаем составной вектор весов элементов нижнего уровня.

Так как матрица собственных векторов не является ортогональным преобразованием, в общем случае результат не может быть интерпретирован как вращение. В действительности, вектор в единичном n-мерном симплексе умножается на стохастическую матрицу. В результате получаем другой вектор в единичном симплексе.

Алгебраисты часто указывают на отличие задач, в которых алгебра имеет структурную геометрическую интерпретацию, от задач, в которых она служит удобным методом проведения вычислений. Статистические методы имеют удобную геометрическую интерпретацию в отличие от методов возмущений, которые часто ею не обладают.

В работе [61] проявлен интерес к поведению экспертов в ситуациях, включающих как линейные, так и нелинейные отношения между стимулами, после чего делается заключение, что процесс индуктивного вывода в основном линейный. В нашей модели реакция экспертов на линейные и нелинейные сигналы кажется адекватно отраженной в описанном в этой книге методе парного шкалирования с привлечением подхода иерархической декомпозиции для агрегирования элементов, попадающих в сравнимые классы в соответствии с возможным диапазоном шкалы сравнений.

Отметим, что мы подходим к решению проблемы интеграции информации, которая обсуждалась в [4], путем формулирования задачи о собственном значении, имеющей линейную структуру. Однако сама шкала, определяемая собственным вектором, является в значительной степени нелинейной функцией данных. Процесс построения собственного вектора включает сложные операции, состоящие из сложения, умножения и усреднения. Чтобы ощутить эту сложность, можно проверить способ получения собственного вектора как предельного решения нормализованных строчных сумм степеней матрицы.

В [4] также акцентируется внимание на том, что принятая шкала реакции должна удовлетворять критерию, который налагает алгебраическая модель суждений. Таким критерием в нашем случае вновь оказывается согласованность.

Наконец, может быть полезным краткое рассмотрение графо-теоретического подхода к согласованности. Направленный граф с n вершинами, который предполагается полным (так как любая пара его вершин соединяется направленной дугой), называется турниром. Его можно использовать для представления доминантных парных сравнений между n объектами, тогда контуры будут представлять нетранзитивность. Например, каждые три вершины определяют треугольник, но не все треугольники образуют 3-контуры. Число контуров заданной длины используется для определения индекса нетранзитивности данного порядка, например тройки или четвёрки. Несогласованность определяется (см. [100]) в зависимости от отношения числа трех, четырех или более контуров в заданном графе к максимальному числу контуров данного порядка. Для 3-контуров максимальное число будет $\left(n^3-n\right)/24$ для нечетного n и $\left(n^3-4n\right)/24$ – для четного n; для 4-контуров оно будет $\left(n^3-n\right)\left(n-3\right)/48$ для нечетного n и $\left(n^3-4n\right)\left(n-3\right)/48$ для четного n. Эти результаты не были обобщены на k-контуры. Тем не менее среднее число k-контуров для случайной ориентации дуг полного графа – $\left(k-1\right)!\binom{n}{k}\left(1/2\right)^k$. До сих пор не найдена зависимость между этим определением несогласованности и нашим, относящимся к собственному значению. Непохоже, что зависимость будет найдена. Приведённый выше результат для 3-контуров вместе с его статистическими следствиями принадлежит Кендаллу. Он подробно обсуждается в обычной статистической справочной литературе (см., например, [108]).

Выше мы ссылались на анализ главных компонент. Обсудим кратко эту процедуру.

Рассмотрим случайный вектор X с p компонентами, вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей C. Распределение X неизвестно. Пусть b есть p-

компонентный вектор-столбец, $b^T b = 1$; тогда $E\left(b^T X\right)^2 = E\left(b^T X X^T b\right) = b^T C b$ обозначает операцию математического ожидания.

Нормализованные линейные комбинации $b^T X$ с максимальной дисперсией при условии $b^T b = 1$ получаются из функции Лагранжа, определенной в виде

$$b^T C b = \lambda\left(b^T b - 1\right),$$

где λ – множитель Лагранжа.

Приравнивая производную по b нулю, получаем уравнение

$$(C - \lambda I) b = O,$$

нетривиальным решением которого будет λ – собственное значение C.

Если умножить эти выражения на b^T и использовать условие ограничения, то получим $b^T C b = \lambda b^T b = \lambda$. Это показывает, что λ является дисперсией величины $b^T X$. Поэтому в качестве максимальной дисперсии нам следует использовать $\lambda_{\max}$. Если нормализовать соответствующее решение b_1, разделив его на сумму квадратов коэффициентов, то получим $b_1^T X$ в качестве нормализованной линейной комбинаций с максимальной дисперсией. Затем получаем новую нормализованную комбинацию $b^T X$ с максимальной дисперсией всех линейных комбинаций, некоррелированных с $b^T X$, т. е.

$$0 = E\left(b^T X b_1^T X\right) = E\left(b^T X X^T b_1\right) = b^T C b_1 = \lambda_{\max} b^T b_1.$$

Однако $C b_{\max} = \lambda_{\max} b_1$ и, следовательно, $b^T X$ ортогонально к $b_{\max}^T X$. Используя $b^T b_1 = 0$ в качестве нового ограничения, образуем новую функцию Лагранжа.

$$b^T C b = \alpha\left(b^T b - 1\right) - 2\beta\left(b^T C b_1\right)$$

с множителями Лагранжа α и β. Действуя таким образом, можно показать, что $\beta = 0$ и α будет вторым наибольшим собственным значением C. (Отметим, что поскольку C как ковариационная матрица симметрична, все её собственные значения деиствительны). Действуя как и прежде, теперь получим соответствующий собственный вектор при условии, что $b^T X$ имеет максимальные дисперсии из всех нормализованных линейных комбинаций, не коррелированных с $b_1^T X$ и $b_2^T X$ и т. д.

Когда собственные векторы получены таким образом, отношение каждого собственного значения ко всей сумме собственных значений представляет долю всей дисперсии, отраженную в соответствующих компонентах. Поэтому первым (и практически важным) приближением считают главную компоненту и ищут изменения в условиях, ведущих к изменениям в выражении $b_1^T X$.

В [115] сделана попытка определить влияние отдельных журналов, проверяя число цитирований. Устанавливается матрица цитирования числа статей из каждого журнала, упомянутого в каждом источнике. Столбцы затем нормализуются, чтобы принять во внимание различные размеры журналов. Далее следует вычисление весов влияние в соответствии с разработанной ими процедурой нахождения собственного вектора общей матрицы (которая не ориентирована на шкалу отношений).

9.5. ПОДХОД, ОСНОВАННЫЙ НА ВОЗМУЩЕНИЯХ: МЕТОД ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В случае несогласованности задачу можно поставить следующим образом: определить такие $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, чтобы

$$a_{ij} - f_{ij}\left(\omega_i, \omega_j; \alpha_i, \alpha_j; \ldots, \omega_i, \omega_j\right) = \frac{\omega_i}{\omega_j} g_{ij}\left(\cdot\right),$$

где для параметров возмущения имеем

$$\lim g_{ij}\left(\cdot\right) = 1.$$

Здесь аргумент в $g_{ij}\left(\cdot\right)$ включает те же самые переменные и параметры, что и f_{ij}. Отметим, например, что мультипликативный параметр следует устремить к единице, а аддитивный параметр – к нулю. Другими словами, если есть надежда восстановить хорошие оценки ω_i/ω_j из a_{ij}, то возмущения должны быть малы. Отметим, например, что

$$a_{ij} = \frac{\alpha_i \omega_i + \mathrm{\omega}_i}{\alpha_j \omega_j + \mathrm{\omega}_j} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \frac{1 + \mathrm{\omega}_i / \alpha_i \omega_i}{1 + \mathrm{\omega}_i / \alpha_i \omega_i} \tag{9.1}$$

Можно зависать (9.1) в виде

$$a_{ij} \omega_j / \omega_i = g_{ij}. \tag{9.2}$$

Это основная, недоопределённая система n^2 уравнений с $n^2 + n$ переменными ω_j и g_{ij}, требуется n дополнительных уравнений относительно g_{ij}, чтобы система стала разрешимой. Выбор этих отношений может быть свободным. Тем не менее оказывается, что эти n отношений могут быть получены, если основываться на выходе, связанном с возмущением рассмотренного выше идеального случая. Исходя из соображений о генераторе бесконечно малых величин требуем, чтобы следующая система соотношений всегда выполнялась:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij} = \lambda_{\max}, \; i = 1, \ldots, n,$$

и множество этих условий зависит от $A = \left(a_{ij}\right)$.

Задача 1: Найти ω_i, $i = 1, \ldots, n$, которые удовлетворяют

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \omega_j = \alpha_{\max} \omega_i, \; i = 1, \ldots, n. \tag{9.3}$$

Системы соотношений (9.2), а также (9.3), часто используются в качестве необходимых условий, возникающих при решении задачи оптимизации. Например, (9.2) можно записать в виде $\log a_{ij}\left(\omega_j/\omega_i\right) = \log g_{ij}$; возводя в квадрат обе стороны этого равенства и суммируя по i и j, получим задачу минимизации ошибки относительно ω_i, $i = 1, \ldots, n$.

Задача 2 заключается в нахождении ω_i, которые минимизируют

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left[\log a_{ij} - \log\left(\omega_j/\omega_i\right)\right]^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\log g_{ij}\right)^2.$$

Это – задача логарифмических наименьших квадратов. Однако она имеет точно такое же решение

$$\omega_i = \left[\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right]^{1/n} \left[\sum_{j=1}^{n} \omega_j\right]^{1/n} = \left[\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right]^{1/n}, \text{ если } a_{ji} = 1/a_{ij},$$

которое получается при рассмотрении произведения по j в обеих частях (9.2) при условии $\sum_{j=1}^{n} g_{ij} = 1$ – системы n условий, не зависимых от $A = (a_{ij})$. Это решение может быть интерпретировано как решение, порождающее ближайшую согласованную матрицу к заданной матрице в смысле логарифмических наименьших квадратов.

В статистике анализ главных компонент использует систему (9.3) в качестве необходимых условий для задачи оптимизации следующего типа. Минимизировать квадратическую форму

$$f(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\omega_i\omega_j, \quad a_{ji} = a_{ij},$$

при условии

$$g(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = 1.$$

Лагранжиан этой задачи будет

$$L(\omega_1, \ldots, \omega_n; \lambda) \equiv f - \lambda(g-1).$$

Параметр λ появляется в задаче как множитель Лагранжа (который также является параметром возмущения в задаче оптимизации), а не как собственно параметр, как в (9.3). Действительно, можно построить широкий класс задач оптимизации, используя (9.2) или (9.3) в качестве системы необходимых условий.

Полезно взять уравнения возмущений (9.2) и создать таблицу условий, налагаемых на различные методы вместе с соответствующими решениями. Назовём левый собственный вектор, который является решением задачи, сформулированной в терминах гармонического среднего, вектором антиприоритетов. Он представляет меру того, насколько элемент доминируется другими элементами того же уровня. Соответствующий вектор, полученный посредством иерархической композиции, измеряет воздействие иерархии на каждый элемент уровня (см. табл. 9.1).

Замечание. Решения задачи логарифмических наименьших квадратов, связанной с двумя матрицами оптического примера из гл. 2, будут (0,61; 0,24; 0,10; 0,05) и (0,61; 0,23; 0,10; 0,06).

Если связать арифметические, геометрические и гармонические средние в нашей задаче шкалирования, то табл. 9.1 легко объясняется.

Таблица 9.1. Четыре метода возмущений при $a_{ij}\dfrac{\omega_j}{\omega_i}=g_{ij}$

	Предположения в случае согласованности	Задача	Решение	Предположения в общем случае	Задача	Решение
Арифметическое среднее	$g_{ij}=1$, $\sum_{j=1}^{n} g_{ij}=n$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dfrac{\omega_i}{\omega_j}=n$, $i=1,\ldots,n$, $A\omega=n\omega$	$\omega_i=\dfrac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}$, $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$	$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}=\lambda_{\max}$, $j=1,\ldots,n$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dfrac{\omega_i}{\omega_j}=\lambda_{\max}$, $A\omega=\lambda_{\max}\omega$	Нормализованный правый собственный вектор; индекс согласованности $(\lambda_{\max}-n)/(n-1)$
Среднегеометрическое по строкам	$g_{ij}=1$, $\prod_{j=1}^{n} g_{ij}=1$	$\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\dfrac{\omega_j}{\omega_i}=1$, $i=1,\ldots,n$	$\omega_i=(na_{ij})^{1/n}$	$\prod_{j=1}^{n} g_{ij}=\mu$	$\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\dfrac{\omega_j}{\omega_i}=\mu$ Обычно заменяется на критерий логарифмических средних квадратов: $\min\sum_{i,j=1}^{n}\left[\log a_{ij}-\log\dfrac{\omega_i}{\omega_j}\right]^2=\min\log^2\mu$	То же, что и в случае согласованности; не имеется меры согласованности
Гармоническое среднее	$g_{ij}=1$, $\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{g_{ij}}=n$	$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_{ij}u_j/u_i}=n$, $uA=nu$	$u_i=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}{a_{ij}}$, $\sum_{i=1}^{n}u_i=1$ (обратное первому случаю наверху)	$\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{g_{ij}}=\lambda_{\max}$	$uA=\lambda_{\max}u$	Нормализованный левый собственный вектор; индекс согласованности $(\lambda_{\max}-n)/(n-1)$
Среднегеометрическое по таблицам	То же, что и для среднегеометрического по строчкам					

9.6. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ МАТРИЦЫ МАТРИЦЕЙ МЕНЬШЕГО РАНГА

Матрица $W = \left(\omega_i / \omega_j\right)$ ранга один получается после решения задачи о собственном значении. Она является приближением к матрице $A = \left(a_{ij}\right)$. Мы используем тот факт, что любая матрица может быть аппроксимирована другой матрицей меньшего ранга. Это делается следующим образом. Во-первых, отметим, что

$$tr\left(AA^T\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 ,$$

$$tr\left(A-W\right)\left(A-W\right)^T = \sum_{i,j=1}^{n} \left[a_{ij} - \omega_i / \omega_j\right]^2 ,$$

$$\min tr\left(A-W\right)\left(A-W\right)^T = \min \sum_{i=1}^{n} \alpha_i ,$$

где α_i – собственные значения матрицы $\left(A-W\right)\left(A-W\right)^T$.

Теперь для любой матрицы X матрица XX^T симметрична, и все ее собственные значения действительны. Кроме того, X и X^T положительны. Поэтому XX^T положительна и имеет единственное действительное положительное наибольшее собственное значение.

Согласно Джонсону [72]

$$AA^T \equiv P\Lambda P^T ,$$
$$A^T \equiv Q\Lambda Q^T$$

где Λ – диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения A в порядке убывания величины; собственные векторы матрицы AA^T являются соответствующими столбцами матрицы P, а собственные векторы матрицы $A^T A$ – соответствующими строками матрицы Q^T. Наконец, отметим, что наилучшее приближение методом наименьших квадратов матрицы A матрицей ранга r может быть задано выражением

$$P_r \Lambda^{1/2} Q_r^T$$

где P_r и Q_r^T – части P и Q^T, соответственно связанные с первыми r столбцами Λ.

Пусть $r = 1$, тогда P_1 – собственный вектор матрицы AA^T, ассоциируемый с максимальным собственным значением; Q_1 – собственный вектор матрицы $A^T A$, ассоциируемый с максимальным собственным значением. Если, как в согласованном случае,

$$Q_1 = \left[\frac{1}{p_{11}}, \frac{1}{p_{12}}, \ldots, \frac{1}{p_{1n}}\right],$$

где

$$P_1 = \left(p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}\right),$$

то наше решение в согласованном случае будет наилучшим приближением методом наименьших квадратов. Это может быть не так в несогласованном случае.

Проиллюстрируем идею наилучшего приближения методом наименьших квадратов на одной из матриц A примера из оптики, сформировав AA^T, $A^T A$ и получим их собственные значения и собственные векторы. Собственные значения, одинаковые для обеих матриц, являются диагональными элементами матрицы Λ, расположенными в порядке убывания. Собственные векторы матрицы AA^T совпадают с соответствующими столбцами матрицы P, а матрицы $A^T A$ – со строками матрицы Q^T.

Имеем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 132,9000 & & 0 & \\ & 1,4710 & & \\ 0 & & 0,1283 & \\ & & & 0,0007 \end{bmatrix};$$

$$\Lambda^{1/2} = \begin{bmatrix} 11,528 & & 0 & \\ & 1,213 & & \\ 0 & & 0,358 & \\ & & & 0,027 \end{bmatrix};$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,875 & -0,475 & 0,087 & -0,041 \\ 0,436 & 0,690 & -0,568 & 0,109 \\ 0,188 & 0,512 & 0,669 & 0,505 \\ 0,097 & 0,192 & 0,471 & 0,855 \end{bmatrix};$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 0,089 & 0,349 & 0,589 & 0,723 \\ 0,158 & 0,819 & 0,146 & -0,533 \\ -0,347 & -0,341 & 0,767 & -0,418 \\ 0,920 & -0,303 & 0,207 & -0,136 \end{bmatrix};$$

$$P\Lambda^{1/2}Q^T = \begin{bmatrix} 0,796 & 3,034 & 5,879 & 7,586 \\ 0,655 & 2,508 & 2,931 & 3,279 \\ 0,221 & 1,178 & 1,554 & 1,136 \\ 0,099 & 0,516 & 0,827 & 0,611 \end{bmatrix}.$$

Используя подход, при котором находится максимальное собственное значение, получаем вектор в качестве оценки основной шкалы отношений. Основываясь на методе наименьших квадратов, можно получить матрицу $P_r\Lambda_r^{1/2}Q_r$ пониженного ранга (в нашем случае единичного), которая является наилучшим приближением в смысле наименьших квадратов к заданной матрице суждения. Естественно, что эта матрица является лучшим приближением в смысле наименьших квадратов, чем матрица $W = \left(\omega_i/\omega_j\right)$, т. е. если определить $F = A - P_r\Lambda_r^{1/2}Q_r^T$ и $G = A - W$ и просуммировать квадраты их элементов, то можно легко показать, что первая сумма равна $tr\left(FF'\right) = tr\Lambda_s$, где Λ_s – диагональная матрица собственных значений, не включенных в Λ_r (в нашем случае Λ_r – наибольшее собственное значение матрицы $A^T A$ и

$tr\Lambda_s$ – сумма остальных собственных значений). Можно показать, что $tr\left[\left(A-W\right)^T\left(A-W\right)\right] \geq tr\left(FF'\right)$, как и должно быть на самом деле. Однако задача заключается в получении вектора шкалы из аппроксимированной методом наименьших квадратов матрицы $P_r\Lambda_r^{1/2}Q_r^T$. Если предположить, что эта матрица почти согласованна, то можно использовать любой из ее столбцов (нормализованных) как приближение к основной шкале. Но теперь возникает вопрос, насколько хорош этот вектор по сравнению с максимальным собственным вектором. В нашем примере использовалось среднеквадратичное отклонение от известных основных шкал в задачах, где желательно было провести сравнение. Как будет показано в приведенном ниже примере, максимальный собственный вектор явно превосходит вектор, полученный методом наименьших квадратов (как мы его интерпретировали), если его рассматривать как приближение к реальности.

Если образовать Λ_r, полагая, что все диагональные элементы, кроме первого, наибольшего из них, равны нулю в Λ, то будем иметь

$$P_r\Lambda_r^{1/2}Q_r^T = \begin{bmatrix} 0,90 & 3,52 & 5,94 & 7,29 \\ 0,45 & 0,76 & 2,97 & 3,64 \\ 0,19 & 0,76 & 1,28 & 1,57 \\ 0,10 & 0,39 & 0,66 & 0,81 \end{bmatrix}.$$

Если сформировать $F_r = A - P_r\Lambda_r^{1/2}Q_r^T$ и просуммировать квадраты ее элементов, получается 1,6, но сумма остальных собственных значений $tr\Lambda_s$ также равна 1,6. Полагая сформированную выше матрицу согласованной, для получения вектора шкалы нормализуем первый столбец и получаем $s=\left(0,548;\,0,274;\,0,118;\,0,061\right)$. Интересно отметить, что все другие столбцы дают один и тот же результат, так как матрица единичного ранга.

Хотя этот вектор не является таким хорошим приближением, как собственный вектор, находим, что его среднеквадратичное отклонение от фактического вектора $\left(0,61;\,0,22;\,0,11;\,0,06\right)$ равно 0,00155, по сравнению с 0,00005 для максимального собственного вектора $\omega=\left(0,62;\,0,22;\,0,10;\,0,06\right)$, соответствующего $\lambda_{\max}=4,1$. Это показывает, что для данного примера решение, полученное с помощью собственного вектора, лучше решения методом наименьших квадратов.

Теперь используем элементы ω и s для формирования матрицы отношений $W=\left(\omega_i/\omega_j\right)$ и $S=\left(s_i/s_j\right)$. Затем вычислим $A-W$ и, просуммировав квадраты ее элементов, получим 13,42. Проделав то же самое для $A-S$, получим 11,45, что близко к первому результату, однако несколько лучше. Это означает, что аппроксимация методом наименьших квадратов лучше для минимизации суммы квадратов разностей. Для этого примера можно сделать вывод: так как нас интересует шкала, а не матрица отношений, ответ, полученный с помощью собственного вектора – лучше; и это несмотря на то, что он не удовлетворяет критерию минимума квадратов.

9.7. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Существуют разнообразные методы для анализа решений при многих целях. Некоторые из них разработаны для прогнозирования действий и выборов в ситуациях принятия решений. Другие разработаны для помощи лицу, принимающему решения, в виде практической техники, которая может быть использована для усовершенствования процедуры принятия решений.

Методы взвешивания

В [152] рассмотрены ранние обзоры по следующим методам оценки весов, приведенным в [151, 13];

1. Взвешивание частных критериев на основе их предсказуемости (с использованием канонической корреляции).
2. Взвешивание частных критериев пропорционально их средней корреляции с другими частными критериями.
3. Взвешивание частных критериев с целью максимизации разности стимулов в величине общего критерия.
4. Взвешивание частных критериев с целью максимизации объясненной дисперсии (с помощью факторного анализа).
5. Взвешивание частных критериев пропорционально их надежности.
6. Равновесное взвешивание частных критериев.
7. Взвешивание частных критериев с целью уравновешивания «эффективных весов» (т. е. долей дисперсии общего критерия).
8. Взвешивание на основе денежного критерия.
9. Взвешивание частных критериев по суждениям экспертов.
10. Взвешивание частных критериев посредством множественной регрессии по построенному в шкале интервалов глобальному критерию.

Эти методы исследуются или критикуются с точки зрения трех основных критериев: релевантности, многомерности и измеримости. Методы 1–7 имеют недостаточную релевантность. Она игнорируется, используются произвольные статистические цели, или релевантность учитывается непрямым и несовершенным образом через другие частные критерии, а не через глобальный критерий. Методы 5–9 содержат смешенную оценку, так как выносится суждение относительно одного частного критерия, а затем независимо относительно другого. Поэтому результирующий многомерный вектор имеет смешение между компонентами, выражающееся подчас в двойном подсчете важности частного критерия. Методы 8–10 страдают сложностью получения мер, которые имеют смысл при взвешивании относительно глобального критерия. Ниже представлены примеры методов взвешивания.

Сопоставление исходов с целями. Допустим, имеются исходы $O_1, O_2, \ldots, O_m$. Этапы процедуры следующие [1, 54]:

1 Ранжировать цели по порядку значений.

2. Присвоить значение 1,00 первой цели и присвоить приемлемые значения другим целям:

цель $O_1\ O_2\ \ldots\ O_m$

значение $\upsilon_1 = 1{,}00\ \upsilon_2\ \ldots\ \upsilon_m$.

3. Сравнить наиболее важную цель с совокупностью остальных целей. Короче, сравнить O_1 с $O_2 + \ldots + O_m$. Если $1 \geq \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_m$, то сравнить O_2 с $O_3 + \ldots + O_m$. Если $\upsilon_2 \geq \upsilon_3 + \ldots + \upsilon_m$, то сравнить O_3 с $O_4 + \ldots + O_m$. и т. д., пока не завершится сравнение O_{m-2} с $O_{m-1} + O_m$.

4. Если $1<\upsilon_2+\ldots+\upsilon_m$, то сравнить O_1 с $O_2+\ldots+O_{m-1}$. Если условие $1<\upsilon_2+\ldots+\upsilon_{m-1}$ все еще выполняется, то сравнить O_1 с $O_2+\ldots+O_{m-2}$ и т. д., до тех пор, пока O_1 не станет предпочтительнее остальных или пока не завершится сравнение O_1 с O_2+O_3, тогда следует возвратиться к этапу 3.

5. После того как величины υ_i найдены, нормализовать их, разделив на $\sum_{i=1}^{m}\upsilon_i$.

Предположения, лежащие в основе этой процедуры, следующие:
С каждым исходом мы сопоставляем действительную неотрицательную величину.
Если O_i предпочтительнее O_j, то $\upsilon_i>\upsilon_j$.

Если O_i и O_j равнозначны, то $\upsilon_i=\upsilon_j$.

Если исходам O_i и O_j соответствуют значения υ_i и υ_j, то исходу O_i+O_j соответствует значение $\upsilon_i+\upsilon_j$. Это предположение несправедливо, если O_i и O_j взаимно исключающие друг друга исходы.

Когда имеется большое число исходов, эта процедура очень трудоемка. К тому же она не формирует единственную шкалу и с ее помощью нельзя справиться с задачами иерархического типа. В [82] использован метод непосредственного сравнения n объектов. Во-первых, объекты располагаются в ряд по порядку от наиболее предпочтительного к наименее предпочтительному. Сравниваются наиболее предпочтительный объект со вторым по предпочтительности, второй с третьим и т. д., при этом каждый раз этому отношению приписываются численные значения. По завершении процесса число 1 приписывается наименее предпочтительному из n объектов и для получения веса $(n-1)$-го объекта 1 умножается на отношение, полученное в результате сравнения $(n-1)$-го с n-м объектом, и т. д., продвигаясь в обратном направлении и получая относительную шкалу оценок для n объектов. В этом методе отсутствует способ оценки согласованности.

Сопоставление исходов с функциями целей. В [40, 43] предлагается подход, основанный на использовании теории аддитивной полезности, что означает выполнение условия: полезность целого равна сумме полезностей, приписываемых его частям. Если все цели O_j соответствующим образом определены и для каждого плана измерен его вклад в реализацию каждой цели, то результаты могут быть записаны в следующем матричном виде:

План	Цели					
	O_1	O_2	$\ldots$	O_j	$\ldots$	O_n
u_1	x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1j}	$\ldots$	x_{1n}
u_2	x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2j}	$\ldots$	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
u_i	x_{i1}	x_{i2}	$\ldots$	x_{ij}	$\ldots$	x_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
u_m	x_{m1}	x_{m2}	$\ldots$	x_{mj}	$\ldots$	x_{mn}

Каждому плану u_i приписывается вектор целей $\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}\right)$. Нужно взвесить планы для определения того, который следует использовать. Согласно теории полезности общая мера вклада u_i (которую обозначим $V\left(u_i\right)$) получается как функция n-мерного вектора $\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}\right)$, т. е. $V\left(u_i\right)=V\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}\right)$. Используя условие аддитивности

$$V\left(u_i\right)=\upsilon_{i1}+\upsilon_{i2}+\ldots+\upsilon_{ij}+\ldots+\upsilon_{in},$$

можно получить, что значение цели для каждого плана определяется как произведение относительной важности цели $\upsilon\left(O_j\right)$ на полезность численной меры x_{ij}, обозначенной через $\upsilon\left(x_{ij}\right)$. В наших обозначениях

$$\upsilon_{ij}=\upsilon\left(O_j\right)\upsilon\left(x_{ij}\right).$$

Оценка $\upsilon\left(X_{ij}\right)$. Первой попыткой оценки $\upsilon\left(x_{ij}\right)$ можно считать использование линейных функций полезности, которые нормализованы так, что получают значение от 0 до 1. Для целей, меры которых прямо пропорциональны уровням полезности (например, вклад в национальный доход), можно считать

$$\upsilon\left(x_{ij}\right)=x_{ij}\Big/\sum_{j=1}^{m}x_{ij},$$

а для тех целей, которые обратно пропорциональны уровням полезности (например, вклад в загрязнение окружающей среды)

$$\upsilon\left(x_{ij}\right)=\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(1-x_{ij}\right)}{\sum_{i=1}^{m}x_{ij}}.$$

Оценка $\upsilon\left(O_j\right)$. *1. Методы ранжирования.* $\upsilon\left(O_j\right)$ ранжируются, от наименьшего к наибольшему так, что $\upsilon\left(O_1\right), \upsilon\left(O_2\right), \ldots, \upsilon\left(O_n\right)$, где номера целей соответствуют рангам. Иногда эксперта просят перенумеровать цели в порядке убывания предпочтительности. Существуют и другие методы упорядочивания – разновидности этого метода.

2. Метод непосредственного оценивания. Целям могут быть приписано бесконечное или конечное число дискретных значений, например числа от 0 до 10. Для каждого $\upsilon\left(O_j\right)$ эксперта просят оценить важность данной цели. Эксперту может быть дозволено выбирать точки с учетом десятых долей, например 2,7, и он может приписать одно и то же значение из шкалы более чем одной цели.

3. Метод сопоставления исходов с целями (описан выше).

4. *Полусуммы.* Допустим, что $O<\upsilon\left(O_1\right)<\ldots<\upsilon\left(O_n\right)$. Основная идея подхода заключается в образовании цепочки половинных значений следующим образом. Начнем с k, близкого к n, и оценим такое j, что $\upsilon\left(O_j\right)+\upsilon\left(O_{j+2}\right)=\upsilon\left(O_k\right)$ и положим $\upsilon\left(O_{j+1}\right)=(1/2)\upsilon\left(O_k\right)$. Повторим процесс, заменив $\upsilon\left(O_k\right)$ на $\upsilon\left(O_{j+1}\right)$, и продолжим формирование цепочки половинных значений до тех пор, пока это будет возможно. Сглаженная кривая, проходящая по цепочке половинных значений, может быть использована в качестве оценки искомой функции полезности. Например, допустим, что тридцать целей были ранжированы следующим образом:

$$0<\upsilon(O_1)<\upsilon(O_2)<\ldots<\upsilon(O_{30}).$$

Допустим

$$\upsilon(O_{22})+\upsilon(O_{24})=\upsilon(O_{30}),\ \upsilon(O_{17})+\upsilon(O_{19})=\upsilon(O_{23}),\ \upsilon(O_9)+\upsilon(O_{11})=\upsilon(O_{18}),$$
$$\upsilon(O_2)+\upsilon(O_4)=\upsilon(O_{10}).$$

Используя цепь половинных значений $\left[\upsilon(O_{30}),\upsilon(O_{23}),\upsilon(O_{18}),\upsilon(O_{10}),\upsilon(O_3)\right]$ и полагая $\upsilon(O_3)=1$, можно получить графическую оценку функции полезности.

5. Методы упорядоченной метрики. Допустим, $0<\upsilon(O_1)<\upsilon(O_2)<\ldots<\upsilon(O_n)$, тогда ранжирование по упорядоченной метрике в бинарном случае будет ранжированием смежных разностей

$$\upsilon(O_1)-0,\ \upsilon(O_2)-\upsilon(O_1),\ \upsilon(O_3)-\upsilon(O_2),\ \ldots,\ \upsilon(O_n)-\upsilon(O_{n-1}).$$

В одном случае о разностях $\upsilon(O_i)$ можно судить непосредственно; в другом, например, можно сравнить $\upsilon(O_2)-\upsilon(O_1)$ и $\upsilon(O_4)-\upsilon(O_3)$, сравнивая $\upsilon(O_1)+\upsilon(O_4)$ с $\upsilon(O_3)+\upsilon(O_2)$. Сравнение производится непосредственно, когда одно и то же $\upsilon(O_i)$ присутствует в обеих разностях, например при сравнении $\upsilon(O_3)-\upsilon(O_2)$ с $\upsilon(O_2)-\upsilon(O_1)$.

6. Метод кривых безразличия. Во многих задачах желательно определить функцию полезности или ценности распределения ресурсов на различные виды деятельности и максимизировать ее при ограничивающих условиях, которые могут быть наложены на имеющиеся величины в связи с их ценой и денежными фондами. Однако обычно такую функцию построить трудно и вместо нее определяют кривые безразличия для пар видов деятельности в обход численного подхода. Чтобы построить такую кривую, экспертам задают вопросы для определения компромиссов между двумя сравниваемыми показателями. На кривой безразличия значения обоих показателей имеют одинаковую ценность. Здесь получаются двумерные кривые, с помощью которых должна быть получена некоторая многомерная поверхность и на ней найден максимум. Недостатком метода является потеря количественной информации.

Методы последовательного исключения

Лексикографический порядок. Термин «лексикографический» отражает аналогию между этим методом и методом упорядочивания слов в словаре. При лексикографическом подходе требуется ранжирование показателей по важности, а значения показателей располагаются на шкале порядка. После того как важнейший показатель выбран, может быть определена альтернатива, имеющая наивысшее значение по этому показателю. Если такая альтернатива одна, то ее выбирают и процедура заканчивается. Если по определенному показателю имеется несколько альтернатив с одним и тем же наивысшим значением, то они сравниваются по второму по важности показателю. Процесс продолжается таким образом до тех пор, пока не будет выявлена единственная альтернатива, или пока не будут проверены все показатели.

Недостатком лексикографического порядка является то, что бесконечно малое приращение одной из компонент не перевешивает больших приращений других. Более слабым критерием является *принцип оптимальности по Парето*. Одна альтернатива превосходит вторую, если она превосходит ее, по крайней мере, по одной компоненте и не хуже второй по любой другой компоненте. Если альтернатива удовлетворяет этому свойству относительно всех других альтернатив, то ее называют парето-оптимальной.

Методы математического программирования

Глобальная функция цели. Здесь главная задача – свести вместе многие цели для оптимизации результата при ограничениях

в рамках линейного программирования. Идея заключается в том, чтобы использовать выпуклую комбинацию этих функций цели при различных параметрах и решить в итоге задачу параметрического программирования. Мы получаем конечное семейство решений, соответствующих мозаике из ячеек пространства параметров. Для выбора решения, которое представляется наиболее приемлемым, используют суждения.

Цели в ограничениях; целевое программирование. Все глобальные оптимумы являются в более широком контексте локальными оптимумами. Мы знаем, что решения оптимальны только в ограниченном контексте. Оптимальное решение – это не та стратегия, которой нужно следовать, это дополнительная информация, которую следует учесть в контексте большой системы, для которой данная задача является компонентой. В большинстве случаев наша цель – максимизация прибыли всего производства. Это создает впечатление, что у нас только одна цель – прибыль. Но предположим, что принята более широкая точка зрения, включающая несколько отдельных целей, которые нельзя легко объединить в одну оптимизируемую функцию. Например, можно рассмотреть уровни производства для двух разных изделий, для которых получены наибольшие чистая и общая прибыль, а также состояние денежных средств при некоторых ограничениях на ресурсы.

Безусловно, вряд ли решение, которое максимизирует чистую прибыль, будет таким же, что максимизирует и две другие цели. Чтобы разрешить неопределенность большей цели, следует заново определить, является ли вообще максимизация нашей целью.

В действительности мы добиваемся не максимизации или минимизации при принятии решений по линии поведения, а скорее «удовлетворения». Последнее означает определение целей и поиск такого распределения, которое предлагает наилучшую перспективу достижения этих целей. Это выражает смысл целевого программирования.

Рассмотрим следующий пример:

цель 1: $60x_1 + 50x_2 = 1500$ (цель – чистая прибыль);

цель 2: $2x_1 + 4x_2 \le 80$;

цель 3: $3x_1 + 2x_2 \le 60$, $x_1, x_2 \ge 0$;

x_1 и x_2 – количество единиц изделий 1 и 2 соответственно; 80 и 60 – соответственно время работы машин A и B, которое не может быть превышено. Эти три цели несовместимы. Для решения проблемы несовместимости принимаем высший приоритет цели 1, следующий по величине приоритет будет у цели 2, а затем у цели 3. Припишем следующие точные значения приоритетам:

цель 1 следует удовлетворить как можно лучше, каковы бы ни были результаты приближения к целям 2 и 3;

как только цель 1 достигнута, следует удовлетворить цель 2 как можно лучше при условии, что это не поставит под угрозу реализацию цели 1;

как только цель 2 достигнута, следует удовлетворить цель 3 как можно лучше при условии, что это не поставит под угрозу реализацию цели 2.

Итак, задача ставится следующим образом:

минимизировать

$$P_1\left(d_1^- + d_1^+\right) + P_2 d_2^+ + P_3 d_3^+ ,$$

при условиях

$$60x_1 + 50x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1500 ,$$
$$2x_1 + 4x_2 + d_2^- - d_2^+ = 80 ,$$
$$3x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 60 ,$$

и неотрицательности всех переменных. Здесь d_i^- и d_i^+ – переменные нехватки и излишка соответственно.

Если P_1, P_2 и P_3 рассматриваются как коэффициенты переменных, то мы будем иметь дело с несоизмеримыми вещами, так как d_1^- и d_2^+ измеряются в деньгах, а остальные переменные – в часах. Чтобы устранить эту трудность, будем считать, что P_1, P_2 и P_3 – ярлыки, определяющие порядок приоритета соответствующих целей, а не коэффициенты. Итак, вычислить $P_1\left(d_1^- + d_1^+\right)$ означает: во-первых, сделать $d_1^- + d_1^+$ возможно малым при единственном условии – неотрицательности всех переменных. Вычислить $P_2 d_2^+$ означает: сделать d_2^+ возможно малым, не угрожая реализации первой цели, и так далее для $P_3 d_3^+$. Считается, что соотношения приоритетов P_1, P_2 и P_3 таково, что P_1 намного больше P_2, которое, в свою очередь, намного больше P_3.

Связь между целевым программированием и иерархиями проходит через концепцию согласованных сценариев в планировании. В сложной ситуации планирования применение иерархического подхода позволяет получить обобщенный сценарий, который устраивает всех лиц, принимающих решение. Однако этот сценарий должен быть реалистическим и совместимым со всеми размерностями задачи. Например, реалистический означает, что мы не можем использовать ресурсов больше, чем имеем. Совместимый означает, что цели не должны быть конфликтующими. Если определить сценарий посредством вектора состояния переменных – X, а множество переменных решения обозначить через Y, то сценарий $\left(X, Y\right)$ является согласованным, если $X = g\left(Y\right)$, где g – модель процесса формирования системы, т. е. физических потоков в системе. Метод собственного значения и принцип иерархической композиции могут быть использованы для построения обобщенного сценария, переменные состояния которого принимают значение R. Если R не может быть получено в виде функции от переменных решения, т. е. в форме $g\left(Y^*\right)$, где Y^* – конкретное подмножество решений задачи, то R не согласованно, и тогда используется целевое программирование для пересмотра целей планирования, представляемых R.

В частности, предположим, что A – матрица прямых затрат заданной экономической системы. Пусть X – валовая продукция, а Y – конечный спрос. Известно, что $X = \left(I - A\right)^{-1} Y$. Предположим, что значение переменной состояния X^* обеспечивает некоторый уровень потребления определенного ресурса, стоимость, зависящую от технологии, а также эмиссию полютантов при этой технологии. Общие коэффициенты воздействия и модель «вход–выход» D воспроизводят процесс функционирования системы. Имеем $X^* = DX$ при $X = \left(I - A\right)^{-1} Y$. Чтобы величины R обобщенного сценария были согласованны, должно соблюдаться следующее условие:

$X^* = R$. Если оно не соблюдается, то основу для получения реалистических и совместимых R представляет следующая задача оптимизации.

Минимизировать

$$z = p_- d^- + p_+ d^+$$

при условиях

$$BU + Id^+ + Id^- = R,\ U \geq 0,$$

где

$$B = \left[\frac{(I - A)}{D} \right].$$

Решение U этой задачи обеспечивает существование согласованного сценария, подходящего для конкретной реальной ситуации.

Локальные цели: интерактивное программирование. Рассматриваемую задачу со многими критериями можно записать в виде:

$$\max_{x \in X} U\{f(x)\},$$

где f – r-мерный вектор вещественных функций, x – n-мерный вектор вещественных переменных, X – допустимая область в R^n, связанная с x, и U – функция полезности лица, принимающего решение, определенная на области значений f. Можно предположить, что U – возрастающая по каждому f_i функция и что X – выпуклая и компактная; U по каждой компоненте f – вогнутая и непрерывно дифференцируемая.

Нормы предельного замещения лица, принимающего решение, между критериями для отдельной точки могут быть использованы для оценки направления градиента его функции полезности в этой точке. Эта информация может быть использована в контексте существующих алгоритмов нелинейного математического программирования для получения оптимального решения задачи.

Методы пространственной близости

Совместные измерения. Они связаны с объединением множества независимых переменных в некоторую функциональную форму (в общем случае полином) для предсказания значений зависимой переменной. Коэффициенты или параметры функции обычно оцениваются методами регрессии. Существуют несколько алгоритмов или подходов получения этой оценки путем взвешивания важности переменных заинтересованными лицами (см. [58]). В [58] также можно ознакомиться с различными аспектами приложений, а именно, по производству и маркетингу.

Многомерное шкалирование. Главная цель многомерного шкалирования – восстановление основной пространственной структуры процесса восприятия по конфигурации, в которой каждый стимул (альтернатива) представлен точкой таким образом, что два стимула, субъективно рассматриваемые как схожие, расположены ближе друг к другу, чем стимулы, которые считаются менее похожими друг на друга. Процесс развивается так:

1. Строится матрица несходства δ_{ij}, на главной диагонали которой стоят нули. Матрица симметрична относительно главной диагонали.

2. Из матрицы δ_{ij} получается матрица расстояний между стимулами d_{ij}.

3. Требуется удовлетворение условия монотонности

$$\delta_{i_1 j_1} < \delta_{i_2 j_2} \Rightarrow d_{i_1 j_1} < d_{i_2 j_2}.$$

4. Определяется напряжение $S = \sqrt{S^*/T^*}$, где $S^* = \sum_{i<j} d_{ij} - d_{ij}^0$

$$T^* = \sum d_{ij}^e$$

(d_{ij} – расстояние между точками начальной конфигурации).

Задача заключается в минимизации S по всем d_{ij}^0, удовлетворяющим гипотезе монотонности.

В подходе по изучению маркетинга, предложенном в [58], исследуются пять показателей проекта, включающих наименование, цену, оформление упаковки и гарантию. В данной специфической задаче существует 108 комбинаций этих пяти показателей. Из всех альтернатив было выбрано 18 и проранжировано. С помощью ЭВМ проводился поиск значений в шкале для каждого показателя. Значения в шкале выбраны таким образом, что при их суммировании общая полезность каждой комбинации соответствует рангам. Меры того, насколько лучше каждая альтернатива, не приводится.

В [20] предлагается метод в помощь специалистам по планированию при формулировке стратегий и прогнозировании исходов при последовательном применении этих стратегий. Формируется матрица перекрестных воздействий условных вероятностей. Далее вычисляются меры несходства пар событий и определяется евклидово расстояние между строками матрицы перекрестных воздействий (причин), а затем – евклидово расстояние между столбцами (эффектами).

В [183] определяется матрица несходства (расстояния). В качестве заголовков строк и столбцов используются элементы из множества понятий, где каждое определяет отношение понятия ко всем другим. Данные собираются в последовательность прямых парных сравнений и затем трактуются как точки в пространственном многообразии (неевклидовом N-мерном пространстве). Определяется местоположение этих точек и затем минимизируются квадраты расстояния между ними.

В [165] исследуется математическая структура полиномиальной теории измерений (применимой к структуре данных в том и только в том случае, если для нее выполнена аксиома иррефлексивности), и устанавливается взаимосвязь различных моделей измерений в общих концептуальных рамках, приводящих к математическим задачам, решение которых считается полезным. У теории нет простых эмпирически проверяемых условий. Этот подход предусматривает анализ данных с помощью многомерного шкалирования и факторных методов. Упорядочение расстояний между парами задает определенный порядок между ними, который может быть выражен в виде полиномиальной функции координат. Теория описывает погружение этого полинома в действительное n-мерное пространство с фиксированной размерностью.

В [118] проведено исследование по «выбору «наилучших» линий поведения из ряда альтернативных возможностей, где каждая линия поведения оценивается в терминах степени достижения множества целей». Предложенный метод основан на технике многомерного шкалирования, развитой Кендаллом для вычерчивания карт на основе фрагментарной информации.

Экспериментальная проверка метода анализа иерархии была проведена в [142], где он сравнивается с подходами множественной регрессии (МР), многоаспектной полезности (МАП) [79] и простой непосредственной оценкой (НО). Эти четыре метода отличаются следующим: они требуют суждений различного типа, они требуют различных форм отклика (от порядкового до отношений) и, наконец, каждый из них имеет область приложений с ограниченным применением других методов.

В данном эксперименте экспертам предложили оценить гипотетических кандидатов, поступающих в колледж, с помощью парных сравнений только по четырем характеристикам: количественному тесту на способности, устному тесту на способности, среднему школьному баллу и показателю внешкольной деятельности. После этих начальных суждений экспертов просили о дальнейших суждениях, необходимых для построения линейных аддитивных представлений на основе названных выше четырех методов. Эксперимент осуществлялся в рамках факторного анализа. Тридцати трем экспертам предложили высказать предварительные суждения о 20 парах альтернатив. Требовалось указывать как направление, так и степень предпочтения для каждой пары. Для линейных аддитивных моделей, использовавших МАИ, MP, МАП и НО, было получено соответственно 84, 57, 86 и 84% правильных предсказаний по этим предварительным суждениям. Пирсоновские корреляции произведений моментов между предсказанными и наблюденными степенями предпочтений были 0,72; 0,19; 0,75 и 0,77 соответственно.

Этими методами авторы проверяли только то, что каждый из методов должен был предоставить по аддитивному, линейному представлению многоаспектных предпочтений. Приоритеты показателей или критериев, определенные посредством МАИ, были использованы как веса линейной функции полезности, что позволило авторам сравнить их.

Хотя методы и различны, каждый из них имеет определенное преимущество перед другими. Для МАИ не требуется допущения о согласованности в предпочтениях, в то время как построение функции полезности при использовании подхода МАП требует транзитивности отношения предпочтений. Кроме того, при парных сравнениях в МАИ информация более детализирована и применима в сферах, где существуют неизмеримые показатели.

Подход МАП обладает некоторыми преимуществами, а именно: хорошо развитой методологией для трактовки ситуаций с риском, а также нелинейными функциями полезности, (т. е. аддитивно линейными по каждой переменной, мультипликативными и мультилинейными).

В [79] обсуждается методика оценки функции полезности. Процесс МАП приводит к одному из немногих установленных типов функций. Метод анализа иерархий генерирует функциональные значения функции полезности, а не саму функцию. Для повторяющихся ситуаций при принятии решений выгоднее иметь функцию полезности. Однако на практике функция полезности быстро меняется во времени и, следовательно, ее надо заново оценивать. Поэтому в операционном смысле МАП действует не лучше, чем МАИ, и, кроме того, требует слишком много времени и усилий, а также не обладает преимуществами группового процесса, присущими МАИ. Используя МАИ, можно возмущать суждения в пределах иерархии для получения нового набора приоритетов. Вместе с процедурой проведения МАИ это менее затруднительно, чем построение функции полезности для каждого периода времени.

Относительно метода MP отмечается, что «использование МАИ предпочтительнее, чем метода MP в любой неповторяющейся ситуации по принятию решений, такой, как стратегическое планирование или технологический прогноз, поскольку эти ситуации не позволяют легко вывести измеримые свойства». Однако в МАИ возникает одна операционная проблема – для получения суждений он требует больше времени, чем необходимо для одного заседания, и должен быть растянут на несколько заседаний. Это неудобство не кажется очень важным по сравнению с тем, что при МАП выводится функция полезности, процесс, при котором люди могут чувствовать себя не очень удобно. Их предпочтения могут оказаться несогласованными с функцией полезности*.

---

* Разбор некоторых работ последних лет, в которых МАИ сравнивается с другими методами, приведен в дополнении. – *Прим. перев.*

9.8. ДРУГИЕ СРАВНЕНИЯ

Хирш [66] провёл тщательный анализ аксиоматических методов, используемых для изучения как порядкового, так и количественного ранжирования. Синтезировав информацию, содержащуюся в аксиомах, он смог сформулировать минимальный набор аксиом, из которых далее вывел около сорока аналитических условий для суждений о пригодности многокритериальных методов. Вероятно, чем большему количеству условий удовлетворяет метод, тем более он предпочтителен.

Определим три основные группы многокритериальных методов следующим образом. *Автоматические методы*, в которых окончательное ранжирование элементов получается из начальных данных, общих предположений и условий, а также из определенного алгоритма, основанного на дополнительном множестве аксиом. Нет ни взаимодействия с ЛПР, ни процесса обратной связи. *Полуавтоматические методы*, в которых ЛПР совершает выбор только на определенных этапах метода и в соответствии с некоторыми правилами. Существуют процессы обратной связи, которые привносят гибкость и адаптируемость к реальной ситуации. *Неавтоматические методы*, в которых ЛПР может принимать решения в любой момент и дозволены изменения в аксиомах и предположениях.

Для сравнения и оценки многокритериальных методов Хирш дает их основные структурные характеристики. Каждая характеристика должна быть определена по шкале характеристик, так что любой многокритериальный метод идентифицируется множеством его характеристических уровней, измеренных по каждой шкале характеристик. Сначала определяются шкалы измерений: количественно абсолютную, количественно относительную, количественно интервальную, упорядоченной метрики, порядковую и номинальную. Над шкалами измерений определяются пять характеристических шкал, а именно: I, O, G, D и W. I-характеристическая шкала отражает степень определенности, необходимую в шкалах измерений для нескольких критериев (степень количественности); O-характеристическая шкала – качество полученного ранжирования; W-характеристическая шкала – некоторую информацию об относительной важности критериев. Мерами относительной важности критериев являются одномерные показатели. Они могут быть порядковыми или количественными. Однако порядковые меры относительной важности недостаточны, так как не могут быть использованы для получения глобального ранжирования. Поэтому Хирш вводит еще две шкалы, основанные на сравнениях межшкальных расстояний: G и D-характеристические шкалы. Основываясь на этих шкалах, определяются некоторые объективные меры оценки многокритериальных методов: рациональные условия.

Среди исследованных Хиршем методов – целевое программирование, многоцелевое линейное программирование и некоторые другие, появившиеся в последнее время. Он рассмотрел «преаналитические» условия: нейтральности/независимости, упорядоченности, устойчивости, откликаемости, парето-оптимальности, степени структуры, анонимности и гомогенности.

Метод собственного значения, не требующий строгой независимости, упорядоченности, анонимности или гомогенности, тем не менее обладает устойчивостью, откликаемостью, парето-оптимальностью и некоторыми структурными свойствами. Он также имеет нормализованную шкалу. Однако подход Хирша не позволяет судить, насколько один метод лучше другого и в какой системе ценностей.

Замечание. Хотя серьезной попытки аксиоматизации нашего подхода, допускающего нетранзитивность, не делалось, изложим кратко идеи, которые следует принять во внимание при попытке такой аксиоматизации. Обычно аксиомы используют для получения неконструктивных доказательств существования функций полезности. Для той же цели мы использовали существующую математическую теорию. Однако при этом были приняты определенные допущения, а именно:

система может быть расчленена на классы (компоненты) сравнимости в рамках направленной сети;

элементы в каждой компоненте могут сравниваться относительно некоторых или всех элементов смежной компоненты (начальной вершины дуги);

можно проводить сравнения в абсолютной численной шкале для формирования отношений;

при парных сравнениях применяются обратносимметричные матрицы (необязательно);

допускается нетранзитивность и исследуется ее воздействие на согласованность результатов;

приоритет или обобщенный показатель элемента получается с помощью композиции или взвешивания;

любой элемент, присутствующий в иерархии, считается релевантным, хотя его приоритет может быть и низким. Не имеет смысла вводить в иерархию «несущественные альтернативы» и проверять независимость от них*.

---

* Аксиоматические основы МАИ из работы Т. Саати (Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process, Management Science v 32, № 7, 1986, приведены в дополнении. – *Прим. перев*.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
МАТРИЦЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В этом приложении приводится краткое введение в алгебру матриц и задачи о собственном значении.

Матрицы и линейные системы уравнений

Матрица A – это прямоугольная таблица, включающая массив из $m \times n$ чисел, расположенных в m строк и n столбцов. Число или элемент матрицы A в i-й строке и j-м столбце обозначается через a_{ij}. Таким образом, имеем $(m \times n)$-матрицу A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Обычно матрицу A обозначают через (a_{ij}) и определяют число ее строк и столбцов. Индексы i и j относятся к той строке и столбцу соответственно, в которых расположен элемент. Матрица называется квадратной порядка n, если $m = n$.

Строки и столбцы матрицы A называют векторами. Матрица A может состоять из единственного вектора-строки или вектора-столбца. В этом случае достаточно приписать к ее элементам один индекс. Например, $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$ есть вектор-строка. Диагональные элементы квадратной матрицы A порядка n будут a_{ij}, $i = 1, \dots, n$. *Диагональная* матрица A обладает свойством $i_{ij} = 0$ для всех i и j при $i \neq j$. Некоторые из диагональных элементов – ненулевые. Если также все $a_{ii} = 0$ для всех i, то A называют *нулевой* матрицей и обозначают O. *Единичная* матрица I – это диагональная матрица с $a_{ii} = 1$ для всех i. *Треугольная* матрица A – это квадратная матрица с $a_{ij} = 0$ для $i > j$, или $a_{ij} = 0$ для $i < j$. *Транспонированная* матрица к матрице $A = (a_{ij})$ обозначается $A^T = (a_{ji})$ и определяется заменой элемента A в положении i, j элементом в положении j, i, т. е. для получения A^T нужно поменять местами строки и столбцы A, поворачивая .матрицу относительно главной диагонали. Так как две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы, можно определить *симметрическую* матрицу $A = A^T$; т. е. $a_{ij} = a_{ji}$. Для *кососимметрической* матрицы $A = -A^T$, т. е. $a_{ij} = -a_{ji}$ при $a_{ii} = 0$. Для *эрмитовой* матрицы $a_{ji} = a_{ij}$ (элемент a_{ij} является комплексно-сопряженным с элементом a_{ij}). Определим также *обратносимметричную* матрицу, для которой $a_{ji} = 1/a_{ij}$ при $a_{ii} = 1$. Матрица $A = (a_{ij})$ *положительна*, если $a_{ij} > 0$ для всех i и j, и *неотрицательна*, если $a_{ij} \geq 0$. Кроме того, $A \geq B$, если $a_{ij} \geq b_{ij}$ для всех i и j.

Существуют правила сложения, вычитания, умножения и «деления» матриц A и B. Эти операции составляют алгебру матриц, в некотором роде подобную алгебре обычных чисел, однако следует быть осторожным, так как не все правила, пригодные для обычных чисел, применимы к матрицам, составляющим более общую алгебру. В то же время матрица порядка 1×1 – это просто число, которое называется скаляром, и все правила, применимые для матриц вообще, могут применяться к этому специальному виду матриц, т. е. к обычным числам.

Исторически матрицы появились как стенографический метод записи коэффициентов системы уравнений. В общем случае система из m уравнений с n неизвестными обычно бывает задана в виде

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2, \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = y_m. \end{aligned}$$

Записывать такую систему легче, если коэффициенты, т. е. массив (a_{ij}), отделить от переменных x_j. Тогда x_i, который повторяется в каждой строке, можно записать только один раз таким образом:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Если записать x_j в виде столбца, то правило для восстановления исходной системы таково: каждый a_{ij} связан с соответствующим x_j, например a_{32} и x_2 дает $a_{32}x_2$. Таким образом, двигаясь вдоль строк коэффициентов и одновременно вниз по столбцу x, можно получить соответствующее соединение. Эта простая операция – основа для общего правила умножения матриц.

Можно обозначить $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как вектор x, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – как вектор y. Отметим, что в общем случае число элементов x не равно числу элементов y. Произведение $(m\times n)$-матрицы на $(p\times q)$-матрицу возможно только в случае $p=n$, в результате получается матрица размерности $m\times q$. Поэтому, если $q=1$, т. е. вторая матрица суть вектор, то произведение также будет вектором. Чтобы избежать путаницы, следует помнить, что буквы с индексами обозначают элементы матриц или векторов, а буквами без индексов обозначены вся матрица или вектор. Сложение и умножение матриц можно соотнести с операциями над системами уравнений.

Рассмотрим вновь систему уравнений:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

и предположим, что есть другая система уравнений:

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \\ z_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{aligned}$$

Поскольку элементы x являются общими для обеих систем, для объединения этих двух систем следует сложить первое уравнение первой системы с первым уравнением второй системы, сгруппировать подобные члены, перейти ко вторым уравнениям, проделав то же самое и т. д.:

$$y_1 + z_1 = (a_{11} + b_{11})x_1 + (a_{12} + b_{12})x_2,$$
$$y_2 + z_2 = (a_{21} + b_{21})x_1 + (a_{22} + b_{22})x_2.$$

Это дает тот же результат, что и применение для матриц коэффициентов правила сложения. Допустим, A – матрица коэффициентов первой системы, а B – матрица коэффициентов второй системы. Тогда для их сложения описанным выше образом A и B должны быть одного и того же порядка. Правило такое:
$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij});$$
соответствующие элементы в матрицах суммируются.

Имеем
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}.$$

Конкретнее
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+3 & 3+(-3) \\ 0+0 & 2+2 & -4+(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -12 \end{bmatrix}.$$

Правило сложения может быть распространено на любое число матриц одного и того же порядка: $A + B + \ldots + Z = (a_{ij} + b_{ij} + \ldots + z_{ij})$.

Аддитивная обратная матрицы $A = (a_{ij})$ есть матрица $-A = (-a_{ij})$ такая, что $A + (-A) = 0$.

По отношению к аддитивности существует ассоциативность
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
и коммутативность
$$A + B = B + A.$$

Допустим, нужно умножить уравнения на некоторую константу (или скаляр) α (еще один способ, применяемый в элементарной алгебре для решения системы уравнений). Если это проделать следующим образом:
$$\alpha y_1 = \alpha a_{11}x_1 + \alpha a_{12}x_2 + \ldots + \alpha a_{1n}x_n,$$
$$\alpha y_2 = \alpha a_{21}x_1 + \alpha a_{22}x_2 + \ldots + \alpha a_{2n}x_n,$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\alpha y_m = \alpha a_{m1}x_1 + \alpha a_{m2}x_2 + \ldots + \alpha a_{mn}x_n,$$
то $\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$, т. е. существует правило: для умножения матрицы A на скаляр α следует каждый ее элемент умножить на α.

Например,
$$-3\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -12 \\ -9 & -18 & -3/2 \end{bmatrix}.$$
Сочетанием умножения на скаляр и сложения можно выразить правило для линейной комбинации матриц
$$\alpha A + \beta B + \ldots + kZ = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij} + \ldots + kz_{ij}),$$
где $\alpha, \beta, \ldots, k$ – скаляры.

Рассмотрим следующий набор уравнений, выражающих y_j, $j = 1, 2, 3$ через x_i, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4, \\
y_2 &= x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4, \\
y_3 &= 2x_2 + x_3 - x_4.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим также второй набор уравнений, выражающих z_k, $k = 1, 2$ через y_j:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 3y_1 + y_2 + 2y_3, \\
z_2 &= y_1 - y_2 + 5y_3.
\end{aligned}
$$

Выразим z_k через x_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Это реализуется подстановкой y_j, $j = 1, 2, 3$ из первой системы во вторую. Получаем z_k, $k = 1, 2$ в зависимости от x_i, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$z_1 = 3\left(2x + 4x_2 - x_3 + x_4\right) + \left(x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4\right) + 2\left(2x_2 + x_3 - x_4\right) =$$

$$z_1 = \left(3\times 2 + 1\times 1 + 2\times 0\right)x_1 + \left[3\times 4 + 1\times\left(-3\right) + 2\times 2\right]x_2 + \left[3\times\left(-1\right) + 1\times 2 + 2\times 1\right]x_3 +$$

$$+\left[3\times 1 + 1\times\left(-2\right) + 2\times\left(-1\right)\right]x_4 = 7x_1 + 13x_2 + x_3 - x_4 .$$

Здесь коэффициент при x_1 получен в результате суммирования произведений. Это произведения коэффициентов при y_1, y_2 и y_3 соответственно в выражении для z_1 на соответствующий коэффициент при x_1 из трёх уравнений для y_1, y_2 и y_3. Аналогично получаются коэффициенты при x_2, x_3 и x_4. Для z_2 получаем:

$$z_2 = x_1 + 17x_2 + 2x_3 - 2x_4 .$$

Всё это можно проделать, умножая матрицу коэффициентов первой системы на матрицу коэффициентов второй системы.

Для этих матриц запишем

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 7 & 13 & 1 & -1 \\ 1 & 17 & 2 & -2 \end{bmatrix}
\end{array};
$$

z_k через y_i, y_j через x_i, z_k через x_i.

Умножение производится для получения коэффициентов в скобках, связывающих x_1, x_2, x_3 и x_4 с z_1 и z_2. Так, элемент в позиции 1,1 результирующей матрицы получается умножением элементов первой строки исходной матрицы, расположенной слева, на соответствующие элементы первого столбца исходной матрицы, расположенной справа, и суммированием, т. е.

$$3\times 2 + 1\times 1 + 2\times 0 = 7$$

Элемент 2 в позиции 2,3 получается в результате умножения элементов второй строки исходной матрицы, расположенной слева, на элементы третьего столбца исходной матрицы, расположенной справа. Имеем

$$1\times\left(-1\right) + \left(-1\right)\times 2 + 5\times 1 = 2 .$$

В общем случае, при умножении матриц $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ для получения $C = c_{ij}$, т. е. $AB = C$, имеем для элемента в позиции i, j матрицы C

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} ,$$

т. е. 1-я строка A и j-й столбец B умножаются на коэффициенты в соответствующих позициях, указанных индексом k, и затем суммируются. Ясно, что умножение имеет смысл только в том случае, если A – матрица размерности $m \times n$, а B – матрица размерности $n \times q$.

Для приведенных ниже A и B матрица C будет следующей:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31},$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32},$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31},$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}.$$

Произведения матриц удовлетворяют:

закону ассоциативности $C(BA) = (CB)A$;

закону дистрибутивности относительно сложения $C(A+B) = CA + CB$, $(C+B)A = CA + BA$;

ассоциативности относительно умножения на скаляр: $(kA)(k'B) = kk'AB$. Так, если k и k' равны 1 или –1, имеем

$$(-A)B = A(-B) = -AB, \ (-A)(-B) = AB.$$

В общем случае произведение матриц некоммутативно. Например, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ то } AB = 0, \text{ но } BA = \begin{bmatrix} -10 & 18 & 28 \\ 10 & -18 & -28 \\ -10 & 18 & 28 \end{bmatrix}.$$

Это означает, что $AB = 0$ при $A \neq 0$, $B \neq 0$. Также из $AB = AC$ имеем $A(B-C) = 0$. Но отсюда нельзя заключить, что либо $A = 0$, либо $B = C$.

Тем не менее сложение матриц удовлетворяет всем свойствам сложения чисел. Например, из $A + B = A + C$ следует, что $B = C$.

Умножение любой матрицы на скалярную матрицу (диагональную матрицу, все диагональные элементы которой равны) есть не что иное, как умножение матрицы на константу. Так, например,

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что $AI = IA = A$. Обратная матрица A, если она существует, представляет собой матрицу, которая обозначается A^{-1}А "' и удовлетворяет соотношению $AA^{-1} = I$. Имеем $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ и $(AB)^T = B^T A^T$. Две матрицы A и B называются ортогональными, если $AB = 0$. Матрицы AA^T и $A^T A$ симметричны.

Примечание. Заметим, что в произведении матриц $AB = C$ c_{ij} формируется при участии i-го вектора-строки A и j-го вектора-столбца B. В общем случае произведение двух векторов $v=(v_1,\ldots,v_n)$ и $w=(w_1,\ldots,w_n)$ называется *скалярным* или *точечным* произведением и обозначается $(v,w)=v_1w_1+v_2w_2+\ldots+v_nw_n$. Оно получается в результате умножения соответствующих компонент и сложения.

Длина вектора $v=(v_1,\ldots,v_n)$ обозначается $|\,v\,|$ и определяется как $|\,v\,|=\left(v_1^2+\ldots+v_n^2\right)^{1/2}$, что является евклидовой длиной. Из аналитической геометрии известно, что угол θ между любыми двумя прямыми, направляющие которых суть $(v_1,\ldots,v_n)$ и $(w_1,\ldots,w_n)$, удовлетворяет выражению $\cos\theta=(v_1w_1+\ldots+v_nw_n)/|v||w|$. Поэтому $(v,w)=|v||w|\cos\theta$ Заметим, что два вектора $(1,3,2)$ и $(4,0,-2)$ – ортогональны.

С матрицей A порядка n ассоциируется число, которое называется ее определителем (детерминантом) и обозначается $|A|$ или $\det(A)$. Определитель – это алгебраическая сумма всех возможных произведений n элементов, в каждом из которых имеется один элемент из каждой строки и каждого столбца A. Можно расположить элементы каждого члена этой суммы в порядке, соответствующем порядку столбцов A. Получим n вариантов для элементов первого столбца, затем $n-1$ вариантов для элементов из второго столбца, два варианта для элементов предпоследнего столбца и один для элементов последнего столбца. Это дает $N=n(n-1)\ldots2$ вариантов. (Произведение первых n положительных целых чисел называется n-факториал и обозначается $n!$.) Каждому варианту соответствует отдельное слагаемое. Следовательно, определитель порядка n состоит из $n!$ слагаемых.

В алгебраической сумме каждому слагаемому придается положительный или отрицательный знак в соответствии со следующим правилом. Расположим элементы каждого слагаемого в соответствии с порядком столбцов матрицы и рассмотрим последовательность индексов соответствующих строк. Эту последовательность можно построить перестановками пар элементов в последовательности натуральных чисел $1,2,\ldots,n$. Если число перестановок четное (нечетное), знак слагаемого будет положительным (отрицательным). Следовательно, знак будет $(-1)^s$, где s – число перестановок. Например, слагаемое $a_{21}a_{32}a_{13}$ в определителе матрицы A размерности 3×3 приводит к последовательности строчных индексов 2, 3, 1. Чтобы привести эту последовательность к форме 1, 2, 3, следует провести две перестановки: переставить 1 и 2, а затем переставлять 2 и 3. Две перестановки приводят к положительному знаку слагаемого. Слагаемому $a_{11}a_{32}a_{23}$ со строчными индексами 1, 3, 2 требуется одна перестановка элементов 3 и 2 для приведения к форме 1, 2, 3. Следовательно, слагаемое получает отрицательный знак. Применяя это правило, легко увидеть, чему равен определитель матрицы

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2)(0)(-1)+(-1)(-5)(1)+(4)(3)(-1)-(4)(0)(1)-(1)(3)(-1)-$$

$$-(2)(-5)(-1)=-24\,.$$

Из многих известных свойств определителей отметим следующие: $|AB|=|A||B|$; если строка или столбец умножается на α, то определитель A умножается на α;

однако $\left|\alpha A\right| = \alpha^n \left|A\right|$, $\left|A\right| = \left|A^T\right|$; перестановка строки соответствующим столбцом не изменяет $\left|A\right|$; перестановка двух строк или двух столбцов в матрице A изменяет знак $\left|A\right|$; определитель равен нулю, если два столбца или две строки матрицы A идентичны или же один из них получается умножением другого на постоянную; если столбец A, например первый, имеет вид $a_{11} + b_{11}, a_{21} + b_{21}, \ldots, a_{n1} + b_{n1}$, то $\left|A\right|$ – сумма двух определителей; первый столбец первого определителя будет $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$, а второго – $b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1}$, остальные столбцы остаются неизменными как у A. Отсюда следует, что определитель не меняется, если добавить к любому столбцу другой столбец, умноженный на постоянную; если A – треугольная матрица, то $\left|A\right| = a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Ранг матрицы A есть порядок наибольшего квадратного массива (подматрицы), детерминант которого не равен нулю. Квадратная матрица – *невырожденная*, если ее ранг равен ее порядку, т. е. $\left|A\right| \neq 0$. Если $\left|A\right| = 0$, то матрица A будет *вырожденной*. Например, матрица, каждая строка которой может быть получена умножением одной строки на некоторую постоянную, не только вырожденная, но и имеет единичный ранг.

Порядок разложения (раскрытия) определителя таков: минор D_{ij}, элемента a_{ij} – это определитель матрицы, полученной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Сомножитель A_{ij}, элемента a_{ij} будет $\left(-1\right)^{i+j} D_{ij}$.

Для разложения $\det\left(A\right)$ по i-й строке имеем

$$\left|A\right| = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Аналогично проводится разложение по столбцу.

Матрицу $adj\left(A\right)$ называют присоединенной к матрице A, если ее i, j-м элементом является A_{ij}. Из приведенного выше уравнения видно, что $A \cdot adj\left(A\right) = \left|A\right| \cdot I$. Следовательно, матрица A обратима (т. е. имеет обратную матрицу) тогда и только тогда, когда $\left|A\right| \neq 0$ (т. е. матрица A – невырожденная), и в этом случае $A^{-1} = adj\left(A\right) / \left|A\right|$.

Рассмотрим линейную систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1, \ldots, n.$$

В матричной записи эта система имеет вид

$$Ax = b,$$

где A – матрица коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

а x и b – векторы-столбцы:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Когда $b \neq 0$, т. е. некоторые из элементов b_i ненулевые, система называется *неоднородной*; в противном случае систему называют *однородной*.

Если матрица A – невырожденная, то у нее есть обратная матрица A^{-1} и можно записать единственное решение неоднородной системы $x = A^{-1}b$. Правило Крамера обеспечивает удобный способ решения неоднородной системы, эквивалентный вышеприведенному способу, но оно включает использование определителей, а не обращение матриц. Компонента x_i вектора x – это дробь, числитель которой – определитель матрицы, полученной из A заменой i-го столбца A вектор-столбцом b, а знаменатель – определитель A. Отметим, что при решении однородной системы числитель x_i всегда равен нулю и, следовательно, не существует иного решения, кроме тривиального $x = (0, 0, \ldots, 0)$, за исключением случая, когда матрица A – вырожденная и ее определитель равен нулю. Если определитель $|A|$ также равен нулю, то нужен удобный способ получения ненулевого решения, так как правило Крамера приводит к неопределенному выражению (нуль, деленный на нуль) для x_i. Имеются различные пути получения решения в этом случае. Наиболее известны методы исключения, в которых одно уравнение решается относительно неизвестного и его значение подставляется в другие уравнения. Если переменных больше, чем уравнений, то избыточным или независимым переменным присваиваются произвольные значения для определения оставшихся (зависимых) переменных.

Условимся все векторы считать вектор-столбцами и будем применять транспонирование для обозначения соответствующих векторов-строк. Чтобы это не привело к путанице, иногда будем применять символ без знака транспонирования. Система векторов $v_1, \ldots, v_n$ будет *линейно независимой*, если для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из равенства

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots a_n v_n = 0$$

(где правая часть является нулевым n-компонентным вектором) следует, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Поэтому ни один из векторов линейно независимой системы не может быть получен в результате умножения других на постоянную и сложения. В противном случае векторы будут *линейно зависимыми*, т. е. приведенное выше условие выполняется не для всех a_i, $i = 1, \ldots, n$, не равных нулю.

Линейная комбинация векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – это сумма вида $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, где a_i – произвольные числа. Линейная комбинация называется *выпуклой комбинацией* v_i, $i = 1, \ldots, n$, если $a_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Говорят, что множество векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ формирует *базис* пространства n-компонентных векторов (n-векторов), если:

они линейно независимы;

любой вектор является их линейной комбинацией (то же самое, что сказать, что они дополняют пространство).

В пространстве n-векторов базис должен состоять n векторов. В частности, система векторов v_i, $i=1,\ldots,n$, элементы которой равны нулю, кроме i-го, равного единице, формирует базис пространства n-векторов.

Отметим, например, что $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(0,1,0)$ и $v_3=(0,0,1)$ – линейно независимые, так как

$$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=(a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3)=(a_1,a_2,a_3).$$

Для того чтобы этот вектор был нулевым вектором $(0,0,0)$, нужно иметь $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=0$. Векторы $v_1=(1,0)$, $v_2=(0,1)$, $v_3=(1,1)$ – линейно зависимые, так как требование того, чтобы $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=(a_1+a_3,a_2+a_3)$ было $(0,0)$, даёт $a_1+a_3=0$, $a_2+a_3=0$, что выполняется при $a_1=-a_3$, $a_2=-a_1$, которые могут быть и не нулями. Для нахождения коэффициентов в $v=a_1v_1+\ldots a_nv_n$ нужно решить систему линейных уравнений. Например, $(2,3)=a_1(1,7)+a_2(4,2)$ приводит к двум уравнениям $2=a_1+4a_2$ и $3=7a_1+2a_2$.

Множество всех векторов, которые являются линейными комбинациями n линейно независимых векторов (единичных векторов), называется n-симплексом (единичным n-симплексом).

Так как строки и столбцы матрицы являются векторами, получается, что ранг матрицы – это максимальное число линейно независимых строк, а это то же самое, что и максимальное число линейно независимых столбцов. В матрице единичного ранга любая строка (столбец) – это произвольный постоянный множитель единственной строки (или столбца).

Два вектора v_1 и v_2 (как и две матрицы) ортогональны, если $v_1v_2=0$, где v_1 записан как вектор-строка, а v_2 – как вектор-столбец. Существует стандартная процедура преобразования множества n линейно независимых векторов в множество попарно ортогональных векторов. Если исходное множество формирует базис, новое множество также формирует базис, и он называется ортогональным базисом.

Характеристическое уравнение: собственные значения и собственные векторы

Собственный вектор (характеристический вектор) матрицы A – это такой ненулевой вектор w, что $Aw=\lambda w$, или $(1/\lambda)A$ преобразует w в w, т. е. оставляет w инвариантным. Величины λ, соответствующие такому w, называются собственными значениями (характеристическими значениями) матрицы A. Следовательно, w будет собственным вектором, если он является нетривиальным (т. е. ненулевым) решением уравнения $(A-\lambda I)w=0$ для некоторого числа λ. Компоненты w составляют множество решений однородной линейной системы с матрицей $A-\lambda I$. Такая система фактически имеет тривиальное решение $w_1=\ldots=w_n=0$, где $w=(w_1,\ldots,w_n)$. Но для получения нетривиального решения матрица $A-\lambda I$ должна быть вырожденной, т. е. ее определитель $|A-\lambda I|$ должен быть равен нулю. Этот определитель представляет собой полином n-й степени от λ. Он имеет вид

$\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A)$ и называется характеристическим полиномом матрицы A. Условие равенства определителя нулю ведёт к уравнению n-й степени, которое называется характеристическим уравнением матрицы A. Это уравнение согласно теореме Гамильтона–Кэли тождественно равно нулю, если λ заменить на A, (т. е. получая матричное уравнение). Корни λ_i, л,-, $i = 1, \ldots, n$, характеристического уравнения $|A - \lambda I| = 0$ являются искомыми собственными значениями. Основная теорема алгебры утверждает существование n-корней для полиномиального уравнения степени n. Собственные векторы получаются в результате решения соответствующей системы уравнений $Av_i = \lambda_i v_i$. Следует обратить внимание на получение всех собственных векторов, когда имеются кратные корни.

Отметим, что

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(A),$$

и корни характеристического уравнения, являясь корнями уравнения n-й степени, удовлетворяют

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = a_1 = tr(A)$$

и

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|.$$

Это можно увидеть, разлагая факторизацию $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$ характеристического полинома. Отметим, что характеристическое уравнение может иметь кратные корни, и, следовательно, общее число различных корней может быть меньше, чем n. Очевидно, что кратный корень λ_i, кратности k появится в факторизации в виде $(\lambda - \lambda_i)^k$. Для простого корня $k = 1$.

Так как λ – постоянная, из $Aw = \lambda w$ и $A\lambda = \lambda A$ имеем

$$A^2 w = A(Aw) = A(\lambda w) = \lambda Aw = \lambda(\lambda w) = \lambda^2 w.$$

Следовательно, λ^2 – собственное значение A^2 и аналогично λ^k – собственное значение A^k, т. е. $trA^k = \lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k$.

Пример. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},\ A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix},$$

$$|A - \lambda I| = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0.$$

Так как в данном случае характеристическое уравнение квадратное, решим его, используя хорошо известную квадратичную формулу для нахождения корней такого уравнения. Для собственных значений имеем

$$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2},\ \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2},$$

и чтобы получить собственный вектор, соответствующий λ_1, запишем $Aw = \lambda_1 w$, т.е.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix},$$

или

$$w_1 + 2w_2 = \lambda_1 w_1,$$

откуда

$$3w_1 + 4w_2 = \lambda_1 w_2.$$

Так как матрица $A - \lambda_1 I$ – вырожденная, существует зависимость между её строками, и поэтому второе уравнение не содержит новой информации. Собственный вектор w получается в результате присваивания произвольного значения w_2 и вычисления w_1 согласно полученному выше соотношению. Присвоим w_2 значение 1. Тогда имеем

$$w = \left[\frac{2}{\lambda_1 - 1}, 1 \right].$$

Можно нормализовать w, приравнивая сумму коэффициентов единице. Разделим каждый коэффициент на сумму $w_1 + w_2$, которая равна $(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 - 1)$. Получим результирующий нормализованный вектор

$$\left[\frac{2}{\lambda_1 + 1}, \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 + 1} \right].$$

Поскольку умножение на постоянную не влияет на решение уравнения $Aw = \lambda w$, будем рассматривать собственные векторы w всегда в нормализованном виде. Аналогично можно получить собственный вектор, соответствующий λ_2. Собственные значения как корни любого полиномиального уравнения можно получить, используя различные стандартные численные методы. В настоящее время существуют пакеты компьютерных программ для нахождения этих корней. Для уравнения, являющегося характеристическим уравнением матрицы, существуют компьютерные программы, которые для данной матрицы находят собственные векторы.

Собственные значения матрицы, будучи корнями ее характеристического уравнения, могут быть комплексными числами и, следовательно, попарно комплексно-сопряженными. Напомним, что комплексное число имеет вид $a + ib$, где $i = \sqrt{-1}$, a и b – действительные числа. Модуль такого числа обозначается $|a + ib|$ и равен $\left(a^2 + b^2\right)^{1/2}$. Если элементы матрицы – действительные и она симметричная, все ее собственные значения действительны. Собственные ректоры, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Этим же свойством обладает эрмитова матрица. Матрицы A и A^T имеют одни и те же собственные значения, но в общем случае не одни и те же собственные векторы.

Следующая теорема (см. [48]) может быть применена к

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \varepsilon_{ij},$$

если использовать непрерывное преобразование, например логарифмическую функцию. Теорема утверждает, что собственные значения матрицы непрерывно зависят от ее коэффициентов (это то же, что непрерывная зависимость корней полинома от его коэффициентов).

Теорема. Если произвольная матрица $A=\left(a_{ij}\right)$ имеет собственные значения $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$, где кратность λ_j есть m_j с $\sum_{j=1}^{s} m_j = n$, то при заданном, достаточно малом $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое, что при $\left|a_{ij}+\varepsilon_{ij}-a_{ij}\right|=\left|\varepsilon_{ij}\right|\le\delta$ для $i,j=1,\ldots,n$ матрица $B=\left(a_{ij}+\varepsilon_{ij}\right)$ имеет ровно m_j собственных значений в окружности $\left|\mu-\lambda_j\right|<\varepsilon$ для каждого $j=1,\ldots,s$, $\mu_1,\ldots,\mu_n$ являются собственными значениями B.

Доказательство. Определим $f(\mu,B)=\det(\mu I-B)$.

Пусть $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\min\left|\lambda_i-\lambda_j\right| 1\le i<j\le s$ и $\varepsilon<\varepsilon_0$. Окружности $C_j:\left|\mu-\lambda_j\right|=\varepsilon$, $j=1,\ldots,s$ – непересекающиеся. Пусть $r_j=\min\left|f(\mu,A)\right|$ для μ на C_j. Заметим, что $\min\left|f(\mu,A)\right|$ определен, так как f – непрерывная функция μ. Также $r_j>0$, поскольку корни $f(\mu,A)=0$ являются центрами окружностей.

Определитель $f(\mu,B)$ – непрерывная функция $1+n^2$ переменных и $a_{ij}+\varepsilon_{ij}$, $i,j=1,\ldots,n$, и, следовательно, для некоторых $\delta>0$, $f(\mu,B)\ne0$, для μ на любой C_j, $j=1,\ldots,s$, если $\left|\varepsilon_{ij}\right|\le\delta$, $i,j=1,\ldots,n$. Из теории функций комплексной переменной известно, что число m_j корней μ уравнения $f(\mu,B)=0$, лежащих внутри окружности C_j, определяется формулой

$$n_j(B)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j}\frac{f'(\mu,B)}{f(\mu,B)}d\mu,\quad j=1,\ldots,s,$$

которая из-за $f(\mu,B)\ne0$ является непрерывной функцией $1+n^2$ переменных в $\left|\mu-\lambda_j\right|=\varepsilon$, $\left|\varepsilon_{ij}\right|\le\delta$, $i,j=1,\ldots,n$. В частности, это непрерывная функция $a_{ij}+\varepsilon_{ij}$ при $\left|\varepsilon_{ij}\right|\le\delta$.

Теперь для $B=A$ по предположению имеем $n_j(A)=m_j$, $j=1,\ldots,s$. Так как интеграл непрерывен, не может быть скачка с $n_j(A)$ на $n_j(B)$, они должны быть равны и иметь общее значение m_j, $j=1,\ldots,s$ для всех B с $\left|a_{ij}+\varepsilon_{ij}-a_{ij}\right|\le\delta$, $i,j=1,\ldots,n$.

Существуют различные способы оценки $\lambda_{\max}$, здесь представлен один из хорошо известных:

$$\lambda_{\max}=\lim_{k\to\infty}\left(trA^{2k}\right)^{1/2k}.$$

Например, для обратносимметричной матрицы размерности 3×3

$$trA^4=3\left[19+\frac{4a_{12}a_{23}}{a_{13}}+\frac{4a_{13}}{a_{12}a_{23}}\right].$$

Аналогичное вычисление для обратносимметричной матрицы размерности 4×4 дает

$$trA^4 = 4\left[34+\frac{4a_{12}a_{23}}{a_{13}}+\frac{4a_{13}}{a_{12}a_{23}}+\frac{4a_{12}a_{24}}{a_{14}}+\frac{4a_{14}}{a_{12}a_{24}}+\frac{4a_{13}a_{34}}{a_{14}}+\frac{4a_{14}}{a_{13}a_{34}}+\right.$$

$$\left.+\frac{a_{12}a_{24}}{a_{13}a_{34}}+\frac{a_{13}a_{34}}{a_{12}a_{24}}+\frac{a_{13}a_{24}}{a_{14}a_{23}}+\frac{a_{13}a_{24}}{a_{14}a_{23}}+\frac{a_{12}a_{23}a_{34}}{a_{14}}+\frac{a_{14}}{a_{12}a_{23}a_{34}}\right].$$

Отметим, что слагаемые компенсируют друг друга, так как коэффициент в числителе одного члена также появляется в знаменателе следующего. Поэтому возрастание этого коэффициента увеличивает один член и уменьшает другой. В общем случае это неверно для необратносимметричных матриц.

Часто встречаются функции матрицы A, такие, как степени и экспоненты. Имеет смысл рассмотреть такие функции. Существует следующая теорема из этой области, принадлежащая Сильвестру (см. [49]):

$$f(A)\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=0}^{m_i-1}\frac{(A-\lambda_i I)^m}{m!}f^{(m)}(\lambda_i)Z(\lambda_i).$$

Здесь k – количество различных характеристических значений матрицы A; m_i – кратность i-го корня λ_i; $f^{(m)}(\lambda_i)$ – (формальная) производная f m-го порядка, вычисленная при λ_i; $Z(\lambda_i)$ – полные ортогональные идемпотентные матрицы матрицы A, т. е. они обладают свойствами

$$\sum_{i=1}^{k}Z(\lambda_i)=I;\ Z(\lambda_i)Z(\lambda_j)=0,\ i\neq j;\ Z^2(\lambda_i)=Z(\lambda_j),$$

где I и O – единичная и нулевая матрицы соответственно.

При различных характеристических значениях для матрицы A порядка n имеем [64]

$$f(A)=\sum_{i=1}^{n}f(\lambda_i)Z(\lambda_i),$$

где

$$Z(\lambda_i)=\frac{\prod\limits_{j\neq i}(\lambda_i I-A)}{\prod\limits_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)}.$$

Для иллюстрации того, как это получается когда f является полиномом матрицы A, отметим, что из полинома n-й степени $|\lambda I-A|=0$ матрица A^n может быть выражена через низшие степени A и, следовательно, f всегда может быть сведена к полиному степени, не превышающей $n-1$. Если написать

$$f(A)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}(A-\lambda_j I)$$

и умножить выражение справа последовательно на v_i, $i=1,\dots,n$ – характеристический вектор λ_i с учетом того, что $Av_i=\lambda_i v_i$, и, следовательно, $f(A)v_i=f(\lambda_i)v_i$, то получим

$$\alpha_i = \frac{f(\lambda_i)}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j)},$$

что и дает искомый результат.

При $f(A)=\exp(At)$ и различных характеристических значениях A имеем спектральное разложение $f(A)$, заданное выражением

$$f(A)=\sum_{i=1}^{n}\exp(\lambda_i t)Z(\lambda_i).$$

Случай кратных характеристических корней выводится из иного варианта теоремы Сильвестра. Если напишем для краткости

$$f(A)=\sum_{i=1}^{k}T(\lambda_i),$$

где k – количество различных корней, тогда

$$T(\lambda_i)=f(\lambda_i)Z_{m_i-1}(\lambda_i)+f'(\lambda_i)Z_{m_i-2}(\lambda_i)+\frac{f''(\lambda_i)}{z!}Z_{m_i-3}(\lambda_i)+\ldots$$

Здесь m_i относится к кратности корня λ_i, а

$$Z_{m_i}(\lambda_i)=\frac{1}{m_i!}\frac{d^{m_i}}{d\lambda^{m_i}}\frac{F(\lambda)}{\Delta_{m_i}(\lambda)}\bigg|_{\lambda=\lambda_i},$$

где

$$F^{m}(\lambda_i)=m!(-1)^{n-m-1}(\lambda_i I-A)^{m_i-m-1}\prod_{j\neq i}(\lambda_i I-A)$$

есть производная F порядка m, а

$$\Delta_{m_i}(\lambda)=\prod_{j\neq i}(\lambda-\lambda_i).$$

Заметим, например, что

$$Z_1(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}=\frac{\Delta(\lambda)F'(\lambda)-F(\lambda)\Delta'(\lambda)}{\left[\Delta(\lambda)\right]^2}.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=x+y,\ \dot{y}=x-y,$$

или просто

$$\dot{X}=AX,\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Исходя из формулы Сильвестра при $\lambda_1=\sqrt{2}$, $\lambda_2=-\sqrt{2}$, имеем

$$\exp(At)=\frac{\exp(\lambda_1 t)}{\lambda_1-\lambda_2}(A-\lambda_2 I)+\frac{\exp(\lambda_2 t)}{\lambda_2-\lambda_1}(A-\lambda_1 I),$$

и применим ее для получения решения системы.

Аналогично можно показать, что если

$$B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},$$

то

$$B^{100} = \begin{bmatrix} \dfrac{3^{100}+1}{2} & \dfrac{3^{100}-1}{2} \\ \dfrac{3^{100}-1}{2} & \dfrac{3^{100}+1}{2} \end{bmatrix}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Определения

Граф – это множество точек V, *вершин* или *узлов*, и множество простых кривых E, *граней* или *ребер*, связь которых с вершинами, называемыми его концевыми точками, описывается определенным правилом. Говорят, что вершины инцидентны ребру. *Открытое* ребро инцидентно в точности двум различным вершинам. *Замкнутое* ребро (называемое петлей) инцидентно в точности одной вершине и, следовательно, его концевые точки совпадают. Ребра не имеют общих точек, за исключением вершин.

На рис. П.1 v_1 и v_2 – примеры вершин; e_1 – петля, концевая точка которой – v_5; e_2 – открытое ребро с концевыми точками v_2 и v_3.

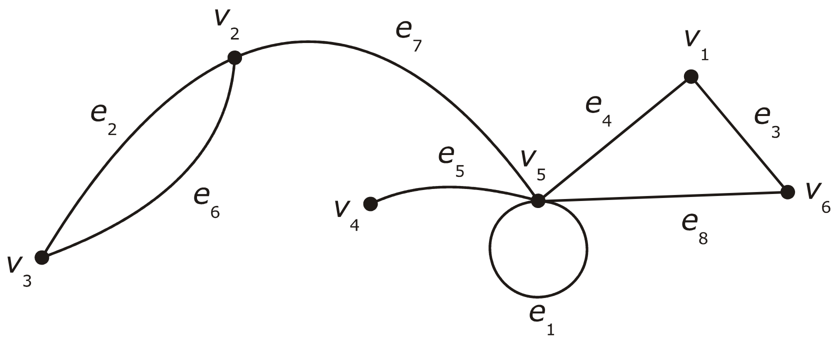


Рис. П.1

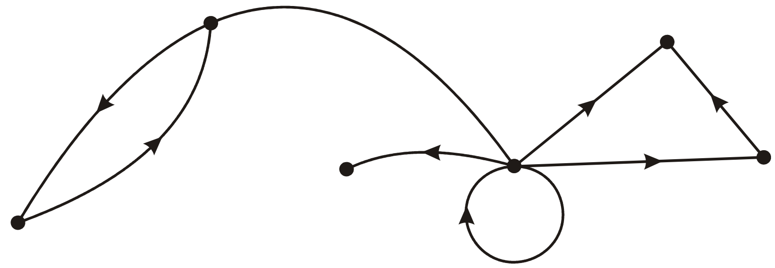


Рис. П.2

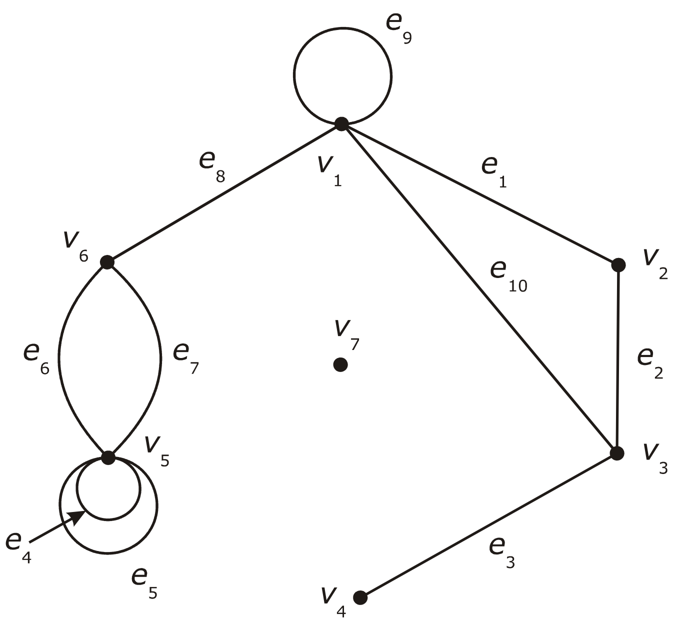


Рис. П.3

Два ребра с общей вершиной, или две вершины, являющиеся концевыми точками ребра, называют *смежными*. Вершина является *изолированной*, если она не инцидентна никакому ребру. Обозначим граф следующим образом: $G = (V, E)$.

Подграф графа G – это подмножество V_1 множества вершин V и подмножество E_1 множества ребер E с теми же связями между вершинами и ребрами, что и в G.

Граф называют *простым*, если он не имеет ни петель, ни параллельных ребер, т. е. кратных ребер между парами вершин. В основном будем рассматривать простые графы, но поскольку в определение графов введены петли и параллельные ребра, при рассмотрении непростых графов будем вносить ясность.

С каждым ребром можно ассоциировать направления или ориентацию, указанную стрелкой. Тогда граф называют *направленным* (*ориентированным*) графом и его ребра называют дугами (см. рис. П.2). Направленный граф обозначают так: $D = (V, A)$.

Число ребер инцидентных вершине $v \in V$ называют степенью вершины и обозначают $d(x)$. Обозначим $d^-(v)$ число дуг, направленных к v, а $d^+(v)$ – число дуг, направленных от v. При определении степени инцидентная вершине петля считается дважды. Для изолированной вершины имеем $d(v) = 0$.

Обозначим число вершин и число ребер графа $G = (V, E)$ через $|V|$ и $|E|$ соответственно, $|V|$ называют степенью графа. Граф на рис. П.3 имеет $|V| = 7$ и $|E| = 10$. Граф называется конечным, если и $|V|$ и $|E|$ конечны, в противном случае – граф бесконечный. Рассматривать будем только конечные графы. Степень v_1 графа на рис. П.3 равна 5: v_7 – изолированная вершина.

Легко показать, что в любом графе число вершин нечетной степени четно. Для этого отметим, что $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, так как каждое ребро считается дважды. Если обозначить через V_0 и V_e множество вершин, имеющих нечётные и чётные степени соответственно, то получим этот результат, учитывая, что

$$\sum_{v \in V_e} d(v) + \sum_{v \in V_0} d(v) = \sum_{v \in V} dv = 2|E|,$$

следовательно, $\sum_{v \in V_e} d(v)$ – четное число. Это может быть только в том случае, если в сумму входит четное число членов.

Последовательность n ребер $e_1, \ldots, e_n$ в графе G называется *маршрутом*, если существует соответствующая последовательность $n+1$ (не обязательно различных) вершин $v_0, v_1, \ldots, v_n$, таких, что e_i инцидентно v_{i-1} и v_i, $i = 1, \ldots, n$. Маршрут *замкнут* (*циклический*), если $v_0 = v_n$, в противном случае *разомкнут*. Если $e_i \neq e_j$ для всех i и j, $i \neq j$, маршрут называют *цепью*. Замкнутая цепь называется *циклом* (*контуром*). Если все вершины различны, маршрут называется *простой цепью*, в то время как при $v_0 = v_n$ и различных всех остальных вершинах имеем *простой цикл* при условии $n \geq 3$. Пример простой цепи дан последовательностью ребер

$$\{e_3, e_4, e_7, e_2\} \equiv \{(v_6, v_1), (v_1, v_5), (v_5, v_2), (v_2, v_3)\}$$

на рис. П.1. Здесь каждое ребро в последовательности заменено парой вершин, которые являются его концевыми точками, так как следуют друг за другом в маршруте v_6, v_1, v_5, v_2, v_3. Аналогичные определения могут быть даны для направленных графов, если учитывать направление каждой дуги. Здесь речь идет о *направленных* (*ориентированных*) *маршрутах*, *путях* и *контурах*, а также о *простых путях* и *простых контурах*.

Граф называют *связным* (сильно связным) в ненаправленном (направленном) смысле, если существует простая цепь (путь) между любой парой вершин. Граф с $n+1$ вершинами является n-связным, если после удаления $n-1$ или менее вершин он остается связным. Две цепи называют параллельными, если у них нет общих вершин, за исключением их концевых точек.

Компонента C графа G – максимальный связный подграф (т. е. каждая вершина, которая смежна вершине в C, также принадлежит C, и все ребра G инцидентные вершинам C, также принадлежат C).

Поддерево – это связный подграф, не имеющий циклов. *Перекрывающее дерево* – это (максимальное) поддерево, которое содержит все вершины графа. Ребро графа, не принадлежащее дереву, называют *хордой*. Ребро графа, принадлежащее дереву, называют *ветвью*. Когда хорда добавляется к перекрывающему дереву, в результате получается цикл, который называется *фундаментальным циклом*. На рис. П.4 приводится перекрывающее дерево для направленного графа. *Корень* дерева находится в вершине v_0, из которой начинаются все пути, существующие на дереве.

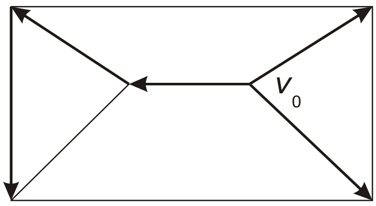


Рис. П.4

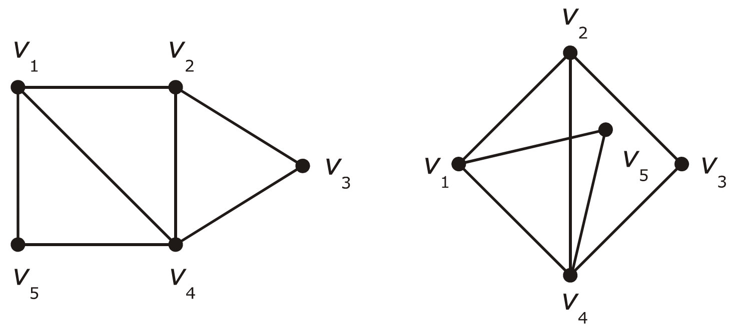


Рис. П.5

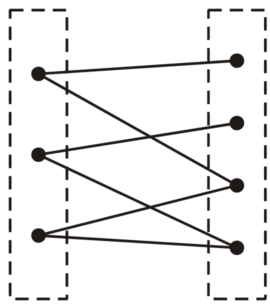


Рис. П.6

Специальный тип цикла в графе, важный для практических применений, назван в честь известного ирландского математика Уильяма Гамильтона (1805–1865). Мы называем цикл, который проходит через каждую вершину графа только однажды, *гамильтоновым циклом*. В то же время отметим, что имя швей царского математика Л. Эйлера (1707—1783) ассоциируется с *эйлеровым графом*, в котором ребра формируют цепь с каждым ребром графа, включенным в цепь только однажды. Цепь может быть разомкнута или может образовать цикл.

Два графа $G=(V,E)$ и $G'=(V',E')$ *изоморфны* друг другу, если существует взаимно однозначное соответствие между V и V' и между E а E', сохраняющее инцидентность. Например, два графа, показанные на рис. П.5, изоморфны.

Простой граф $G=(V,E)$, у которого $|V|=n$ и любая пара вершин соединена ребром, называется *полным графом* для n-вершин. Легко убедиться, что полный граф имеет $n(n-1)/2$ ребер. Так как любые два полных графа, имеющие одинаковое число вершин, изоморфны, говорят о полном графе для n-вершин.

Граф называется *двудольным*, если его вершины могут быть так разделены на два непересекающихся множества, что ребра графа будут только соединять вершины одного множества с вершинами другого (см. рис. П.6).

Обсуждение

Важным элементарным понятием, связанным с графом G на n вершинах, является связность. По сути, большая часть алгоритмической теории графов имеет отношение к связности, ее избыточности и даже ее отсутствию в графе.

Граф не связан (или несвязный), когда множество вершин V может быть разделено на два множества V_1 и V_2 так, что нет ребра, соединяющего вершину в V_1 с вершиной в V_2, в противном случае говорят, что граф связный. Хотя две вершины могут не быть прямо связанными ребром, оказывается возможно достижение одной из этих вершин из другой простой цепью. Если такая цепь, соединяющая любую пару вершин, имеется, то говорят, что граф связный. Иногда предпочитают применение первого определения, но чаще используется эквивалентное ему второе определение. В действительности второе определение намного богаче, так как охватывает целую область проблем *достижимости* графа или подграфов этого графа. Например, можно начать требовать большего. Можно ли начать с вершины и пройти по ребрам графа последовательно без повторения? Можно ли проделать это и закончить перемещение на начальной вершине? Можно ли, стартуя с вершины, пройти простую цепь через все вершины с возвращением или без возвращения к начальной вершине? Можно ли проделать это, если рассматривать только подграфы $n-1$ вершин?

Другой вопрос касается того, насколько велика связность графа. Имеются два пути исследования этой проблемы: через ребра графа и через его вершины. Граф можно сделать несвязным, убрав одновременно несколько ребер.

Минимальный набор из таких ребер известен как *разрез*, а наименьшее число ребер в разрезе называется *степенью связности* графа. Степень связности дерева равна единице. Ясно, что дерево – это наиболее слабый тип связного графа. С другой стороны, если убрать из цикла ребро, то останется связный граф (фактически дерево).

В терминах реберной связности величину связности графа можно измерить через минимальное число цепей, связывающих любую пару вершин, или через существующие простые циклы различных размеров. Цепи и циклы, с одной стороны, и разрезы – с другой, являются двумя дополнительными путями изучения связности и ее отсутствия. Даже вопросы *планарности* (построение графа на плоскости без пересечений ребер в точках, не являющихся вершинами) и *непланарности* графов относятся к связности. Уменьшая число ребер непланарного графа, его можно сделать планарным.

Существуют два подхода к изучению того, как вершины разделяют граф. Первый ассоциируется с понятием *степени* вершины. Например, если в дереве с вершиной степени два исключить ее вместе с инцидентными ей ребрами, то оставшийся граф будет несвязным. С другой стороны, если граф является простым циклом и, следовательно, любая вершина имеет степень два, исключение вершины не превратит граф в несвязный. Представляется допустимым тот факт, что чем выше степени вершин, тем сильнее будет связность. Однако выражение такого типа слишком общее и нуждается в уточнении в контексте конкретной проблемы.

Вершина графа называется *точкой артикуляции*, или *разделяющей вершиной*, если ее исключение делает граф несвязным. *Кратность* разделяющей вершины – это число компонент, на которые распался граф после ее удаления. Может существовать более чем одна вершина, являющаяся точкой артикуляции. Например, на рис. П.1 v_2 и v_5 – точки артикуляции, v_6 не является таковой. Набор точек артикуляции образует множество вершин артикуляции, которые в контексте коммуникационных сетей можно считать «узким местом» графа. Конечно, граф может не иметь точки артикуляции (такой граф называют несепарабельным), однако удаление одновременно k вершин делает его несвязным. Такое множество известно как *множество артикуляции степени* k.

Граф k-связный, $0 \le k \le n$, если удаление $k-1$ или менее вершин не делает его несвязным. Любая пара вершин такого графа может быть соединена k параллельными цепями (из которых никакие две не имеют общих вершин). Граф, не имеющий множества артикуляции степени k, называется k*-несводимым*. В противном случае говорят, что граф k-сводимый.

До сих пор речь шла об общем ненаправленном графе. Вопросы связности несколько усложняются, если ребрам графа приписываются направления. Здесь граф может быть связным в ненаправленном смысле и может быть, но только *слабо связным*, в направленном смысле. Следовательно, возможен путь из одной вершины в другую, но не наоборот, т. е. граф – не сильно связный. Ясно, что циклы играют важную роль в сильно связных графах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ackoff, R. L., S. K. Gupta and J. S. Minas: "Scientific Method," Wiley, 1962.
2. Alexander, Joyce, and T. L. Saaty: The Forward and Backward Processes of Conflict Analysis, *Behavioral Science*, vol. 22, pp. 87-98, March 1977.
3. ——— and ———: Stability Analysis of the Forward-Backward Process, *Behavioral Science*, vol. 22, pp. 375-382, November 1977.
4. Anderson, N. H.: Information Integration Theory: A Brief Survey, in D. H. Krantz, R. C. Atkinson, R. D. Luce, and P. Suppes (Eds.) *Contemporary Developments in Mathematical Psychology*, vol. II, Freeman, San Francisco, 1974.
5. Arrow, Kenneth J.: "Social Choice and Individual Values," Yale University Press, New Haven and London, p. 28, 1970.
6. Ball, W. W. Rouse: "Mathematical Recreations and Essays," MacMillan, New York, 1947.
7. Batschelet, E.: "Mathematics for Life Scientists," Springer-Verlag, New York, 1973.
8. Bauer, Louis, H. B. Keller, and E. L. Reiss: Multiple Eigenvalues Lead to Secondary Bifurcation, *Siam Rev*., vol. 17, no. 1. January 1975.
9. Baumol, W.: "Business Behavior, Value and Growth," MacMillan, New York, 1959.
10. Bell, R. and R. Wagner: "Political Power," Free Press, New York, 1969.
11. Bellman, R. E. and L. A. Zadeh: "Decision-Making in a Fuzzy Environment," *Management Sci*., vol. 17, 1970.
12. Berge, C: "Theory of Graphs and Its Applications," Wiley, New York, 1962.
13. Blum, M. L. and Naylor, J. C: "Industrial Psychology – Its Theoretical and Social Foundations," Harper and Row, New York, 1968.
14. Bogart, Kenneth P.: Preference Structures I: Distances between Transitive Preference Relations, *J. Math. Sociology*, vol. 3, pp. 49-67, 1973.
15. ———: Preference Structures II: Distances between Transitive Preference Relations, (publication status unknown).
16. Bouteloup. Jacques: "*L'Algebre Lineaire*," Presses Universitaires de France, Paris, 1967.
17. ———: "Calcul Matriciel Elementaire," Presses Universitaires de France, Paris, 1972.
18. Bronson, Gordon: The Hierarchical Organization of the Central Nervous System, in "International Politics and Foreign Policy: A Reader in Research and Theory." Rev. edn, James A. Rosenau (Ed.), Free Press, New York, 1969.
19. Buck, R. C. and D. L. Hull: The Logical Structure of the Linnaean Hierarchy, *Systematic Zoology*, vol. 15, pp. 97-111, 1966.
20. Carroll, J. Douglas: "Impact Scaling: Theory, Mathematical Model, and Estimation Procedures, " Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey, 1977.
21. Chipman, J.: The Foundations of Utility, Econometrica, vol. 28, no. 2, 1960.
22. Churchman, C. West and Philburn Ratoosh (Eds.): "Measurement – Definitions and Theories," Wiley, New York, 1959.
23. ——— and H. B. Eisenberg: Deliberation and Judgment, Chapter 3, in M. W. Shelley II and G. L. Bryan (Eds.), "Human Judgments and Optimally," Wiley, New York, 1969.
24. Cliff, N.: Complete Orders from Incomplete Data: Interactive Ordering and Tailored Testing, *Psychological Bull*., vol. 82. no. 2, pp. 289-302, 1975.
25. Cogan, E. J., J. G. Kemeny, R. Z. Norman, J. L. Snell, and G. L. Thompson: "Modern Mathematical Methods and Models," vol. II, Committee on the Undergraduate Program, Mathematical Association of America, 1959.
26. Coombs, Clyde H.: "A Theory of Data," Wiley, New York, 1964.

27. David, H. A.: "The Method of Paired Comparisons," Griffin, London, 1969.
28. Dobson, Ricardo, T. F. Golob, and R. L. Gustafson: Multidimensional Scaling of Consumer Preferences for a Public Transportation System: An Application of Two Approaches, *Socio-Economic Planning Science*, vol. 8, pp. 23-36, 1974.
29. Duimage, A. L. and N. S. Mendelsohn: Graphs and Matrices, "Graph Theory and Theoretical Physics," Frank Harary (Ed.), Academic, pp. 167-227. New York, 1967.
30. Dyer, J. S.: An Empirical Investigation of a Man-Machine Interactive Approach to the Solution of the Multiple Criteria Problem, in "Multiple Criteria Decision Making," Cochrane James L., and Milan Zeleny, University of South Carolina Press, Columbia, S.C., 1973.
31. Eckart, Carl and Gale Young: The Approximation of One Matrix by Another of Lower Rank, *Psychometrika*, vol. 1, r.o. 3, pp. 211-217, September 1936.
32. Eckenrode, R. T.: Weighting Multiple Criteria, *Management Sci.*, vol. 12. no. 3, pp. 180-192, November 1965.
33. Eisler, Hannes: The Connection Between Magnitude and Discrimination Scales and Direct and Indirect Scaling Methods, *Psychometrika*, vol. 30, no. 3. pp. 271-289, September 1965.
34. Emshoff, J. R. and T. L. Saaty: Prioritized Hierarchies as a Vehicle for Long Range Planning. May 1978 (to appear)
35. Encarnation, J.: A Note on Lexicographical Preferences, *Econometrica*, vol. 32, no. 1-2, 1964.
36. Farquhar, Peter H.: A Survey of Multiattribute Utility Theory and Applications, *Studies in the Management Sciences*, vol. 6, North-Holland Publishing, Amsterdam, pp. 59-89, 1977.
37. Fechner, G.: "Elements of Psychophysics," vol. 2, translated by Helmut E. Adler, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.
38. Feller, W.: "An Introduction to Probability Theory and Its Applications," Wiley, New York, 1950.
39. Feraro, T.: "Introduction to Mathematical Sociology," Wiley, 1973.
40. Fishburn, P. C: "Decision and Value Theory," Wiley, New York, 1964.
41. ——— : Independence in Utility Theory with Whole Product Set, *Operations Research*, vol. 13, pp. 28-45, 1965.
42. ——— : Additive Utilities with Incomplete Product Set: Applications to Priorities and Assignments, *Operations Research,* 1967a.
43. ——— : Methods of Estimating Additive Utilities, *Management Sci*., vol. 13, no. 7, pp 435-453, 1967b.
44. ——— : Arrow's Impossibility Theorem: Concise Proof and Infinite Voters, J. *Econ. Theory*, vol. 2. pp. 103-106, 1970.
45. ——— : "Utility Theory for Decision Making," Wiley, New York, 1972.
46. ——— : "Lexicographic Orders, Utilities and Decision Rules: A Survey," July 1974.
47. Fitz, .Raymond and Joanne Troha: "Interpretive Structural Modeling and Urban Planning," University of Dayton, 1977.
48. Franklin, Joel N.: "Matrix Theory," Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N.J., 1968.
49. Frazer, R. A., W. J. Duncan, and A. R. Collar: "Elementary Matrices and some Applications to Dynamics and Differential Equations," Cambridge University Press, 1955.
50. Frobenius, G.: Uber Matrizcn aus nicht negativen Elementen, *Sitzber*. *Akad*. *Wiss*. *Berlin*, *Phys*. *Math*. *Kl*., pp. 456-477, 1912.
51. Gal, T. and J. Nedoma: Multiparametric Linear Programming, *Management Sci*., vol. 18, no. 7, 1972.

52. Gale, David: "The Theory of Linear Economic Models." McGraw-Hill, New York. 1960.
53. Gantmacher. F. R.: "Applications of the Theory of Matrices," Interscience, New York, 1960.
54. Gardner, Martin: The hierarchy of Infinites and the Problems it Spawns, *Scientific American*, vol. 214, pp. 112-118, March 1966
55. Geoffrion, A. M., J. S. Dyer, and A. Feinberg: An Interactive Approach for Multicriterion Optimization with an Application to the Operation of an Academic Department, *Management Sci*., vol. 19, no. 4. 1972.
56. Gillett, J. R.: The Football League Eigenvector. *Eureka*, October 1970.
57. Green, P. and F. Carmone, "Multidimensional Scaling and Related Techniques in Marketing Analysis," Allyn and Bacon, Boston, 1970/
58. ——— and Yoram Wind: "Multiattribute Decision in Marketing," Dryden, Hinsdale, III., 1973.
59. Guilford, J. P.: The Method of Paired Comparisons as a Psychometric Method, *Psychological Rev*., vol. 35, pp. 494-506. 1928.
60. Guttman, Louis: The Principal Components of Scalable Attitudes, in " Mathematical Thinking in the Social Sciences," Paul F. Lazarsfeld (Ed.), pp. 216-257, Russell and Russell, New York, 1969.
61. Hammond, K. R. and D. A. Summers: Cognitive Dependence on Linear and Nonlinear Cues, *Psychological Rev*., vol. 72, no. 3, pp. 215-224. 1965.
62. Harris, E. E.: Wholeness and Hierarchy, Chapter 7 in *Foundations of Metaphysics in Science*, Humanities Press, New York, 1965.
63. Herbst, Ph. G.: "Alternatives to Hierarchies," H. E. Stenfert Kroese b.v., Leiden, Netherlands, 1976.
64. Hildebrand, F. B.: "Methods of Applied Mathematics," Prentice-Hail Englewood Cliffs, N. J., 1952.
65. Hill, J. Douglas and John N. Warfield: Unified Program Planning, *IEEE Transactions on Systems*, *Man, and Cybernetics*, vol. SMC-2, no. 5, pp. 610-621, November 1972.
66. Hirsch, G.: Logical Foundation, Analysis and Development of Multicriterion Methods, Ph.D. Thesis, Operations Research, University of Pennsylvania, 1976.
67. Hotelling, H.: Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components, *J. Ed. Psychology*, vol. 24, pp. 417-141, 498-520, 1933.
68. Huber, George P.: Multi-Attribute Utility Models: A Review of Field and Field-Like Studies, *Management Sci*., vol. 20, no. 10, June 1974.
69. Intriligator, Michael D.: A Probabilistic Model of Social Choice, *Rev. of Economic Studies*, vol. XL, pp. 553-560, October 1973.
70. Isaacson, Dean L. and Richard W. Madsen: "Markov Chains. Theory and Applications," a volume in the Series in Probability and Mathematical Statistics; Probability and Mathematical Section, Wiley, New York, 1976.
71. Johnson, Charles R., Theodore Wang, and William Beine: A Note on Right-Left Asymmetry in an Eigenvector Ranking Scheme, *J. Math. Psychology*, January 1979.
72. Johnson, Richard M.: "On a Theorem Stated by Eckart and Young," *Psychometrika*, vol. 28, no. 3, pp. 259-263, September 1963.
73. Johnson, Stephen C: Hierarchical Clustering Schemes, *Psychometrika*, vol. 32, pp. 241-254, September 1967.
74. Julien, Pierre-Andre, P. Lamonde, and D. Latouche: "La Methode Des Scenarios," University of Quebec and Ministere D'Etat Sciences et Technologie, Quebec, Canada. 1974.
75. Kahneman, Daniel and Amos Tversky: Subjective Probability: A Judgment of Representativeness, *Cognitive Psychology*, vol. 3, pp. 430-454, 1972.

76. ——— and ——— : Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk, *Econometrica*, in publication.
77. Keeney, Ralph L.: Decision Analysis with Multiple Objectives: The Mexico City Airport, *Bell J. Econ. Management Sci*., Spring 1973.
78. ——— and Craig W. Kirkwood: Group Decision Making Using Cardinal Social Welfare Functions, *Management Sci*., vol. 22, no. 4, December 1975.
79. ——— and h. Raiffa: "Decisions with Multiple Objectives: Preference and Value Tradeoffs," Wiley, New York, 1976.
80. Keller, J. B.: Miscellanea, Factorization of Matrices by Least-Squares, *Biometrika*, vol. 49, pp. 1-2, 1962.
81. Kemeny, John G. and J. Laurie Snell: "Mathematical Models in the Social Sciences," Blaisdell, New York, 1962.
82. Klee, A. J.: The Role of Decision Models in the Evaluation of Competing Environmental Health Alternatives, *Management Sci*., vol. 18, no. 2, 53-67, October, 1971.
83. Knorr, K.: Power and Wealth, Basic Books, New York, 1973.
84. Koestler, Arthur and J. R. Smythies (Eds.): "Beyond Reductionism: New Perspectives in the Life of the Sciences," MacMillan, London, 1970.
85. Krantz, David H., R. Duncan Luce, Patrick Suppes, and Amos Tversky, "Foundations of Measurement," vol. 1, Academic, New York, 1971.
86. ——— : A Theory of Magnitude Estimation and Cross-Modality Matching, *J. Math. Psychology*, vol. 9, no. 2, pp. 168-199, May 1972.
87. ——— : Fundamental Measurement of Force and Newton's First and Second Laws of Motion, *Philos. Sci*., vol. 40, no. 4, pp. 481-495, December 1973.
88. Kruskal, J. B.: Multidimensional Scaling by Optimizing Goodness of Fit to a Nonmetric, Hypothesis, *Psychometrika*, vol. 29, no. 1, 1964.
89. ——— : Nonmetric Multidimensional Scaling: A Numerical Method, *Psychometrika*, vol. 29, no. 2, 1964.
90. ——— : "How to Use MDSCAL, a Multidimensional Scaling Program," The Bell Telephone Lab. Inc., Murray Hill, N.J., 1967.
91. Kunreuther, H. and Paul Slovic: Economics, Psychology, and Protective Behavior, *Amer. Econ. Rev.*, vol. 68, November 1978.
92. Lindgren, B. W.: *Elements of Decision Theory*, Macmillan, New York, 1971.
93. Linstone, H. A. and Murray Turoff, "The Delphi Method: Techniques," Addison-Wesley, Reading, Ma., 1975.
94. Lootsma, F. A..;" Saaty's Priority Theory and the Nomination of a Senior Professor in Operations Research," University of Technology, Delft, Holland, 1978.
95. Luce, R. D. and P. Suppes: Preference, Utility and Subjective Probability, in *Handbook of Mathematical Psychology*, vol. III, 1964.
96. MacCrimmon, K. R.: An Overview of Multiple Objective Decision Making, in "Multiple Criteria Decision Making," Cochrane, James L., and Milan Zeleny (Eds), University of South Carolina Press, Columbia S.C., 1973.
97. Malone, David W.: An Introduction to the Application of Interpretive Structural Modeling, *Proc. IEEE*, vol. 63, no. 3, pp. 397-404, 1975.
98. Manheim, .Marvin L.: *Hierarchical Structure: A Model of Planning and Design Processes*, The M.I.T., Cambridge, Mass., p. 222, 1966.
99. Marcus, Marvin and Henryk Minc: "A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities," Allyn and Bacon, Boston, 1964.
100. Marshall, C. W.: *Applied Graph Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1971.
101. May, Kenneth Q.: Intransitivity, Utility, and the Aggregation of Preference Patterns, *Econometrica*, vol. 22, no. 1, January 1954.

102. McCracken, R. F.: "Multidimensional Scaling and the Measurement of Consumer Perception," University of Pennsylvania (Thesis) 1967.
103. McNeil, D. R. and J. W. Tukey: Higher-Order Diagnosis of Two-Way Tables, Illustrated on Two Sets of Demographic Empirical Distributions, *Biometrics*, vol. 31, no. 2, June 1975.
104. Mesarovic, M. D. and D. Macko: Scientific Theory of Hierarchical Systems, in "Hierarchical Structures," L. L. White, A. G. Wilson, and D. Wilson (Eds.). American Elsevier, New York, 1969.
105. ——— , ——— ,and Y. Takahara: "Theory of Hierarchical Multilevel Systems," Academic, New York, 1970.
106. Miller, G. A.: The Magical Number Seven Plus or Minus Two: Some Limits on our Capacity for Processing Information, *Psychological Rev*., vol. 63, pp. 81-97, March 1956.
107. Moreno, J. L.: "Fondements de la Sociometrie," translated by Lesage-Maucorps, Presses Universitaires de France, Paris, 1954.
108. Moreney, M. J.: "Facts from Figures," Penguin, Baltimore, 1968.
109. Morris, Peter C.: Weighting Inconsistent Judgments, Pi Mu Epsilon J., 1979.
110. Nikaido, H.: "Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics," North-Holland, Amsterdam/American Elsevier, New York. 1970.
111. Patee, H. H.: The Problem of Biological Hierarchy, in *Towards a Theoretical Biology*, vol. III, C. H. Waddington (Ed.), Edinburgh University Press, 1969.
112. ——— (Ed.): "Hierarchy Theory, the Challenge of Complex Systems," George Braziller, New York, 1973.
113. Perlis, Sam: "Theory of Matrices." Addison-Wesley, Reading, Ma., 1952.
114. Perron, O.: Zur Theorie der Matrices, *Math. Ann*., vol. 64, pp. 248-263. 1907.
115. Pinski, Gabriel and Francis Narin: Citation Influence for Journal Aggregates of Scientific Publications: Theory, with Application to the Literature of Physics, *Information Processing and Management*, vol. 12, Pergamon, Oxford, pp. 297-312. 1976.
116. Proceedings of the IEEE, Special Issue on Social Systems Engineering, Chapter 2, "Binary Matrices in System Modeling," March 1975.
117. Rabinovitch, I.: "The Dimension Theory of Semiorders and Interval Orders," Ph.D. Thesis, Dartmouth College, June 1973.
118. Rivett, Patrick: Policy Selection by Structural Mapping. *Proc. R. Soc. Lond*., vol. 354, pp. 407-423, 1977.
119. Rosen, Robert: Hierarchical Organization in Automata Theoretic Models of Biological Systems, in *Hierarchy Theory: the Challenge of Complex Systems*, Howard H. Pattee (Ed), Braziller, New York, 1973.
120. Rosenblatt, M.: "Random Processes," Oxford University Press, New York, 1962.
121. Russell, Bertrand: A History of Western Philosophy, Simon & Schuster, New York, 1945.
122. Saaty, Thomas L.: "An Eigenvalue Allocation Model for Prioritization and Planning," Energy Management and Policy Center, University of Pennsylvania, 1972. 1977b. See also "Facing Tomorrow's Terrorist Incident Today," U.S. Department of Justice, LEAA, Wash. D.C. 20531, 28-31, 1977.
123. ——— and Reynaldo S. Mariano: Rationing Energy to Industries; Priorities and Input-Output Dependence, *Energy Systems and Policy*, January, 1979.
124. ——— and Paul C. Rogers: Higher Education in the United Sates (1985-2000): Scenario Construction Using a Hierarchical Framework with Eigenvector Weighting, *Socio-Econ. Plan. Sci.*, vol. 10, pp. 251-263, 1976.

125. ——— and Luis Vargas: "A Note on Estimating Technological Coefficients by Hierarchical Measurement," *Socio-Econ. Plan. Sci.*, vol. 13, no. 6, 333-336, 1979.
126. Sankaranarayanan, A.: "On a Group Theoretical Connection Among the Physical Hierarchies, " Research Communication No. 96, Douglas Advanced Research Laboratories, Huntingdon Beach, California. 1978.
127. Savage, C. Wade: Introspectionist and Behaviorist Interpretations, of Ratio Scales of Perceptual Magnitudes, *Psychological Monographs*: *General and Applied*, vol. 80, no. 19, whole no. 627, 1966.
128. Schoemaker, P. J. H. and C. C. Waid: "A Comparison of Several Methods for Constructing Additive Representations of Muiti-Attribute Preferences," Wharton Applied Research Center, University of Philadelphia, August 1978.
129. Scott, Dana: Measurement Structures and Linear Inequalities, *J. Math. Psychology*, vol. 1, pp. 233-247, 1964.
130. Shepard, R. N.: The Analysis of Proximities: Multidimensional Scaling with an Unknown Distance Function, *Psychometrika*, vol. 27, 1962.
131. ——— : Analysis of Proximities as a Technique for the Study of Information Processing in Man, *Human Factors*, no. 5, 1963.
132. ——— : A Taxonomy of Some Principal Types of Data and of Multidimensional Methods for their Analysis, *Multidimensional Scaling: Theory and Applications in the Behavioral Sciences*,
133. ——— : "Measuring the Fuzziness of Sets," J. Cybernetics, vol. 4, no. 4, pp. 53-61, 1974.
134. ——— : "Hierarchies and Priorities–Eigenvalue Analysis." University of Pennsylvania, 1975.
135. ——— : Hierarchies, Reciprocal Matrices, and Ratio Scales, *Modules in Applied Mathematics*, Cornell University, The Mathematical Association of America, 1976a.
136. ——— : Interaction and Impacts in Hierarchical Systems, *Proceedings of the Workshop on Decision Information for Tactical Command and Control*, Robert M. Thrall and Associates, Rice University, Houston, pp. 54-102, 1976b.
137. ——— : Theory of Measurement of Impacts and Interactions in Systems, *Proceedings of the International Conference on Applied General Systems Research: Recent Developments and Trends*, Binghamton, New York, 1977a.
138. ——— : A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, *J. Math. Psychology*, vol. 15, no. 3, pp. 234-281, June 1977b.
139. ——— : Scenarios and Priorities in Transport Planning: Application to the Sudan, *Transportation Research*, vol. 11, no. 5, October 1977c.
140. ——— : The Sudan Transport Study, *Interfaces*, vol. 8, no. 1, pp. 37-57, 1977d.
141. ——— : "The Faculty Tenure Problem–Determination of Requirements," in publication, with Anand Desai, 1977e.
142. ——— : "A New Paradigm for Queueing and Its Application," in publication, with J. J. Dougherty III, 1977f.
143. ——— : Exploring the Interface Between Hierarchies, Multiple Objectives and Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems*, January 1978.

144. ——— : Modeling Unstructured Decision Problems: Theory of Analytical Hierarchies, *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 20, no. 3, pp. 147-157, September 1978. Also appeared in *Proceedings of the First International Conference on Mathematical Modeling*, University of Missouri-Rolla, vol. 1, pp. 59-77, 1977g.
145. ——— and J. P. Bennett: A Theory of Analytical Hierarchies Applied to Political Candidacy, *Behavioral Science*, vol. 22, pp. 237-245, July 1977a.
146. ——— and ——— : "Terrorism: Patterns for Negotiations; Three Case Studies Through Hierarchies and Holarchies," Study for the Arms Control and Disarmament Agency, 208 pp. vol. 1, R. N. Shephard (Ed.), Seminar Press, New York, 1972.
147. ——— , A. Kimball Romney, and Sara Beth Nerlove (Eds.): "Multidimensional Scaling, Theory and Applications in the Behavioral Sciences," Vol. 1. Seminar Press, New York, 1972.
148. Shinn, A.: An Application of Psychophysical Scaling to the Measurement of National Power. *J. Politics*, vol. 31, pp. 132-951, 1969.
149. Simon, H. A. The Architecture of Complexity, *Proc. Amer. Philosophical Soc.*, vol. 106, pp. 467-481, December 1962.
150. ——— and A. Ando: Aggregation of Variables in Dynamic Systems, *Econometrica*, vol. 29, no 2, pp. 111-138. April 1961.
151. Sluckin, W.: Combining Criteria of Occupational Success, *Occupational Psychology*, Part I, vol. 30, pp. 20-26, 1956, and Part II, vol. 30, pp. 57-67, 1956.
152. Srinivasan. V. and A. D. Shocker: Linear Programming Techniques for Multidimensional Analysis of Preferences, *Psychometrika*, vol. 38, pp. 337-369, 1973.
153. Stevens. S. S. On the Psychophysical Law, *Psychological Reviews*, vol. 64, pp. 163-181, 1957.
154. ——— : Measurement, Psychophysics, and Utility, in "Measurement. Definitions and Theories," C. W. Churchman and P. Ratoosh (Eds.), Wiley, New York, 1959.
155. ——— : To Honor Fechner and Repeal His Law, *Science*, vol. 13. 13 January 1961.
156. ——— and E. Gaianter: Ratio Scales and Category Scales for a Dozen Perceptual Continua, *J. Experimental Psychology*, vol. 54, pp. 377-411. 1964.
157. Stewart, G. W.: Error and Perturbation Bounds for Subspaces Associated with Certain Eigenvalue Problems, *SIAM Review*, vol. 15, no 4, pp. 727-764, October 1973.
158. ——— : Gershgorin Theory for the Generalized Eigenvalue Problem, *Mathematics of Computation*, vol. 29, no. 130. pp. 600-606, April 1975.
159. Stoessinger, J. G. "The Might of Nations," Random House, New York, 1965.
160. Suppes, P. and J. L. Zinnes: "Basic Measurement Theory," *Handbook of Mathematical Psychology,* vol. 1, 1963.
161. Sutherland, John W.: "Systems: Analysis. Administration, and Architecture," Van Nostrand Reinhold, New York, 1975.
162. Thurstone, L. L.: A Law of Comparative Judgment, *Psychological Review*, vol. 34 pp. 273-286, 1927.
163. Torgerson, Warren S.: *Theory and Methods of Scaling*, New York. 1958.
164. Tucker, Ledyard R.: Determination of Parameters of a Functional Relation by Factor Analysis, *Psychometrika*, vol. 23, no. 1, pp. 19-23, March 1958.
165. Tversky, Amos: A General Theory of Polynomial Conjoint Measurement *J. Math. Psychology*, vol. 4, pp. 1-20, 1967.

166. ——— and D. Kahneman: Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases, *Science*, vol. 185, pp. 1124-1131, 27 September 1974.
167. Van der Waerden, B. L.: Hamilton's Discovery of Quaternions. *Mathematics Magazine*, vol. 48, no. 5, pp. 227-234, November 1976.
168. Vargas, L.: Note on the Eigenvalue Consistency Index, 1978.
169. ——— : "Sensitivity Analysis of Reciprocal Matrices," Chapter 3 in Ph.D. dissertation. The Wharton School, University of Pennsylvania, 1979.
170. Waid, Carter: "On the Spectral Radius of Non-negative Matrices," (to appear).
171. Waller, Robert J.: The Synthesis of Hierarchical Structures: Technique and Applications. *Decision Sciences*, vol. 7, no. 4, pp. 659-674, October 1976.
172. Warfield, John N.: On Arranging Elements of a Hierarchy in Graphic Form, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-3, no. 2, pp. 121-140. March 1973.
173. ——— : Developing Subsystem Matrices in Structural Modeling. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-4, no. 1, pp. 74-80, January 1974a.
174. ——— : Developing Interconnection Matrices in Structural Modeling, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-4, no. 1. pp. 81-87, January 1974b.
175. ——— : "Societal Systems: Planning, Policy and Complexity," Wiley, New York, 1976.
176. Wei, T. H.: "The Algebraic Foundations of Ranking Theory," Thesis, Cambridge, Mass., 1952.
177. Weiss, Paul A.: "Hierarchically Organized Systems in Theory and Practice," Hafner, New York, 1971.
178. Weyl, H.: Chemical Valence and the Hierarchy of Structures, Appendix D in "Philosophy of Mathematics and Natural Science," Princeton University Press, N.J., 1949.
179. Whyte, L. L.: Organic Structural Hierarchies, in "Unity and Diversity in Systems, " Essays in honor of L. von Bertalanffy, R. G. Jones and G. Brandl (Eds.), Braziller, New York, 1969.
180. ——— : The Structural Hierarchy in Organisms, "Unity and Diversity in Systems," Essays in honor of L. von Bertalanffy, R. G. Jones and G. Brandl (Eds.), Braziller, New York, (in press).
181. ——— , A. G. Wilson, and D. Wilson (Eds.): "Hierarchical Structures," American Elsevier, New York, 1969.
182. Wielandt, H.: Unzerlegbare, nicht negative mairizen, Mathematische Zeitschrift, vol. 52, pp. 642-648, 1950.
183. Wigand, Rolf T. and George A. Barnett: Multidimensional Scaling of Cultural Processes: The Case of Mexico, South Africa and the United States, *International and Intercultural Communication Annual*, vol. III. pp. 140-172, 1976.
184. Wilf, Herbert S.: "Mathematics for the Physical Sciences," Wiley, New York, London, 1962.
185. Wilkinson, J. H.: "The Algebraic Eigenvalue Problem," Clarendon Press, Oxford, 1965.
186. Williamson, R. E. and H. F. Trotter: "Multivariable Mathematics," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.
187. Wilson, A. G.: Hierarchical Structure in the Cosmos, in *Hierarchical Structures, Proc.*, American Elsevier, New York. 1969.
188. Woodall, D. R.: A Criticism of the Football League Eigenvector, Eureka, October 1971.

189. Yu, P. L.: "A Class of Solutions for Group Decision Problems," Center for System Science, University of Rochester, New York, 1972a.
190. ——— : "Cone Convexity, Cone Extreme Points and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives," University of Rochester, New York, 1972b.
191. ——— and M. Zeleny: "The Set of all Nondominated Solutions in the Linear Case and a Multicriteria Simplex Method," University of Rochester, New York, 1973.
192. Zeleny, M.: Linear Multiobjective Programming, Ph.D. thesis, University of Rochester, New York, 1972.
193. ——— : On the Inadequacy of the Regression Paradigm Used in the Study of Human Judgment, *Theory and Decision*, vol. 7, pp. 57-65, 1976.

Список работ, переведенных на русский язык

11. **Беллман Р., Заде Л. А.** Принятие решений в расплывчатых условиях//Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: Мир. 1976. – С. 172-215.
12. **Берж К.** Теория графов и ее применения/Пер. с франц. под ред. И. А. Вайнштейна. – М.: ИЛ, 1962. – 319 с.
27. **Дэвид Г.** Метод парных сравнении./Пер. с англ. под ред. Ю. Адлера. – М.: Статистика, 1978. – 114 с.
38. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах/Пер. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова. – 3-е изд. – М.: Мир, 1984. – Т. 1-2.
45. **Фишберн П.** Теория полезности для принятия решений/Пер. с англ. под ред. Н. Н. Воробьева. – М.: Наука. 1978. – 352 с.
52. **Гейл Д.** Теория линейных экономических моделей/Пер. с англ. под ред. Н. Н. Воробьева. – М.: ИЛ, 1963. – 418 с.
53. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. Ч. II. Специальные вопросы и приложения. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
55. **Джоффрион А., Дайер Дж., Файнберг А.** Решение задач оптимизации при многих критериях на основе человеко-машинных процедур//Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: Мир, 1976. – С. 116–127.
79. **Кини Р. Л., Райфа Х.** Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
81. **Кемени Дж., Снелл Дж.** Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения/Пер. с англ. под ред. И. Б. Гутчина. – М.: Сов. радио, 1972. – 192 с.
99. **Маркус М., Минк Х.** Обзор по теории матриц и матричных неравенств/Пер. с англ. под ред. В. Б. Лидского. – М.: Наука, 1972. – 232 с.
105. **Месарович М., Мако Д., Такахара И.** Теория иерархических многоуровневых систем/Пер. с англ. под ред. И. Ф. Шахнова. – М.: Мир, 1973.— 344 с.
121. **Рассел Б.** История западной философии/Пер. с англ. под ред. В. Ф. Асмуса. – М.: ИЛ, 1959. – 935 с.
160. **Суппес П., Зинес Дж.** Основы теории измерений. – В кн.: Психологические измерения/Пер. с англ. под ред. Л. Д. Мешалкина. – М.: Мир, 1967. – С. 9-110.
185. **Уилкинсон Дж.** Алгебраическая проблема собственных значений: Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 564 с.

ДОПОЛНЕНИЕ Т. СААТИ

ЗАМЕНА ИНТЕРВАЛЬНОЙ ШКАЛЫ НА ШКАЛУ ОТНОШЕНИЙ В ПРИМЕРЕ РАЗВИТИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ В США[1]

В разд. 6.7 для описания развития высшего образования в США на период 1985–2000 гг. использованы семь взвешенных сценариев и обобщенный сценарий, взятые из статьи Т. Саати и П. Роджерса [124]. В этой работе введены три основных этапа.

Во-первых, разработка иерархической структуры факторов, акторов и их целей, влияющих на семь возможных сценариев. Затем получение с помощью МАИ весов сценариев.

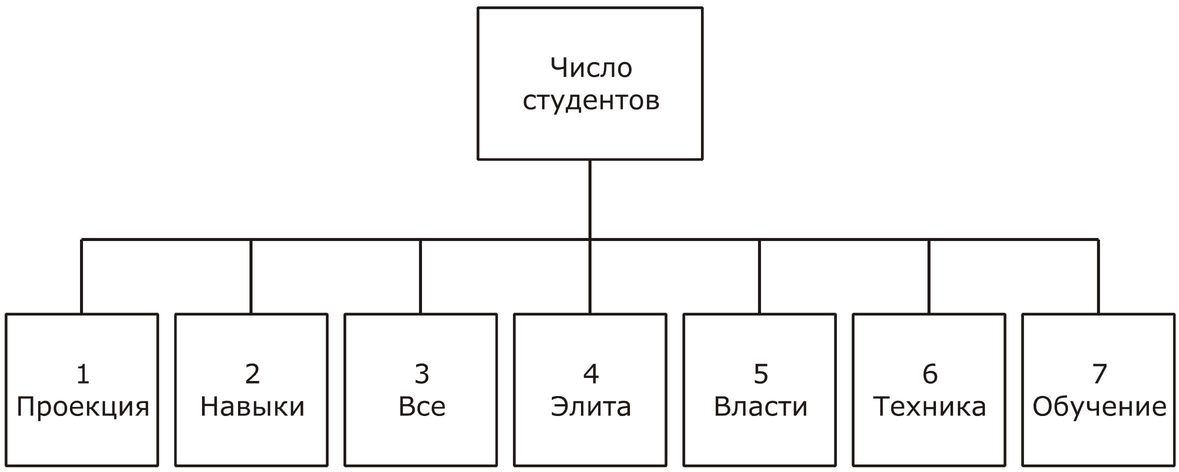
Во-вторых, градуировка рассматриваемых характеристик (переменных состояния) в целых числах между –5 и +5 (в разд. 6.7 градуировка произведена в диапазоне –8… +8). Положительные целые числа используются для воспроизведения различных степеней «возрастания» или «больше, чем в настоящее время», а отрицательные – для воспроизведения различных степенен «уменьшения» или «меньше, чем в настоящее время».

В-третьих, обобщение значений характеристик с использованием «весов сценариев» для получения весов обобщенного сценария, с помощью которых описывается будущее высшего образования в США (см. табл. Д.1).

Попытаемся заменить на втором этапе интервальную шкалу от –5 до +5 на МАИ. Мотивацией здесь служит не только показ возможности использования МАИ вместо интервальной шкалы, но и демонстрация того, что МАИ совпадает с поведенческим образом мышления человека при принятии решений.

В данном случае первый и третий этапы не меняются. На втором этапе применяем МАИ следующим образом:

1. Возьмем семь сценариев в качестве «альтернатив» и каждую характеристику как «критерий» и затем сформируем иерархию для каждой характеристики. Например, для «числа студентов» имеем следующую иерархию.



[1] Здесь, в отличие от текста разд. 6.6 автор применяет термин «интервальная шкала», имея в виду содержательную сторону характеристики. Действительно, при допустимом преобразовании интервальной шкалы фиксируется как нулевая точка шкалы (шкала разностей), так и единица измерений. – *Прим. перев*.

Таблица Д.1

Переменные состояния / Веса сценариев	0,096 1 Проекция	0,259 2 Навыки	0,191 3 Все	0,174 4 Элита	0,122 5 Власти	0,068 6 Техника	0,081 7 Обучение	Обобщённые веса
Студенты								
Число	−2	+2	+4	−3	−1	+2	−2	0,42
Тип	−1	−2	−2	+3	−1	−2	−1	−1,00
Функции	+1	−1	−1	+1	0	−1	+2	0,03
Работа	+1	+4	+4	+4	+1	−2	+1	1,32
Преподаватели								
Число	−2	+2	+4	−3	−1	−5	−4	−0,22
Тип	+1	0	−2	+3	+1	+2	−3	0,25
Функции	−2	−3	−2	+1	−2	−5	−5	−2,12
Обеспеченность работой	−2	+1	+2	−3	−1	−4	−4	−0,79
Академическая свобода	0	−2	0	+2	−1	−4	−5	−0,97
Учебные заведения								
Число	−1	+2	+2	−3	−1	−4	−1	−0,19
Тип	−1	−4	−3	+3	−1	−3	−3	−1,75
Управляющая структура	+2	+4	+1	−2	+2	+5	+5	2,05
Эффективность	+2	+3	−2	+4	−1	−1	0	1,09
Доступность	0	+2	+5	−3	+2	+4	+1	1,55
Культура и досуг	0	−2	+3	+3	+1	−3	−1	0,41
Денежные средства и другие ресурсы	−1	+2	+2	−2	0	−1	−3	0,64
Образование								
Учебная программа	+1	−2	+2	+3	+1	0	−1	0,50
Продолжительность обучения	0	−3	+2	0	+1	+2	0	−0,14
Значимость учебной степени	−1	0	−2	+4	−1	−2	−2	−0,20
Стоимость обучения	+3	+3	+3	+4	+2	−1	−1	2,43
Исследования, проводимые преподавателями	+1	−1	−1	+3	+1	−3	−4	−0,24

Затем для каждой пары сценариев (альтернатив) задаем вопрос: При каком из сценариев будет больше студентов в будущем и насколько? Вычислив собственные векторы матриц попарных сравнений, получим веса этих семи сценариев по отношению к каждой характеристике. Эти результаты даны в табл. Д.2.

2. Для использования данных табл. Д.1 произведем следующее преобразование с целью получения парных сравнений в шкале 1–9.

Пусть S_i – заданное значение i-го сценария по любой из характеристик. Тогда

$\lvert S_i - S_j \rvert$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значения парных сравнений S_i / S_j	$S_i > S_j$	1	2	3	4	4	5	6	6	7	8	9
	$S_i < S_j$	1	1/2	1/3	1/4	1/4	1/5	1/6	1/6	1/7	1/8	1/9

Таблица Д.2

Переменные состояния / Веса сценариев	Проекция 0,096	Навыки 0,259	Все 0,191	Элита 0,174	Власти 0,122	Техника 0,068	Обучение 0,081	Обобщённые веса	Обобщённые веса/веса статус-кво
Студенты									
Число	0,052	0,198	0,378	0,035	0,079	0,198	0,052	0,164	1,312
Тип	0,130	0,073	0,045	0,420	0,130	0,073	0,130	0,144	0,619
Функции	0,181	0,065	0,109	0,188	0,109	0,047	0,301	0,129	1,180
Работа	0,102	0,312	0,032	0,312	0,102	0,039	0,103	0,174	1,851
Преподаватели									
Число	0,084	0,255	0,420	0,057	0,118	0,029	0,038	0,184	0,803
Тип	0,133	0,093	0,048	0,333	0,140	0,218	0,035	0,139	1,490
Функции	0,142	0,089	0,142	0,408	0,142	0,039	0,039	0,158	0,431
Обеспеченность работой	0,090	0,259	0,359	0,062	0,150	0,040	0,040	0,179	0,796
Академическая свобода	0,175	0,077	0,175	0,364	0,135	0,045	0,032	0,155	0,888
Учебные заведения									
Число	0,100	0,311	0,311	0,046	0,100	0,032	0,100	0,180	0,873
Тип	0,164	0,041	0,064	0,440	0,164	0,064	0,064	0,145	0,575
Управляющая структура	0,083	0,190	0,061	0,029	0,083	0,277	0,277	0,125	2,232
Эффективность	0,177	0,244	0,038	0,338	0,056	0,059	0,088	0,164	2,028
Доступность	0,059	0,119	0,345	0,027	0,119	0,252	0,078	0,145	2,458
Культура и досуг	0,103	0,047	0,290	0,301	0,151	0,033	0,075	0,157	1,520
Денежные средства и другие ресурсы	0,086	0,292	0,292	0,051	0,139	0,099	0,040	0,175	1,262
Образование									
Учебная программа	0,138	0,040	0,218	0,327	0,138	0,084	0,058	0,149	0,777
Продолжительность обучения	0,095	0,035	0,261	0,095	0,158	0,261	0,095	0,129	0,989
Значимость учебной степени	0,103	0,171	0,058	0,451	0,103	0,058	0,058	0,165	0,964
Стоимость обучения	0,171	0,171	0,171	0,291	0,112	0,042	0,042	0,164	3,216
Исследования, проводимые преподавателями	0,188	0,090	0,090	0,366	0,188	0,044	0,032	0,150	0,732

3. Делим обобщенные веса каждой из характеристик на соответствующие веса статус-кво каждой характеристики, в результате чего получим последний столбец табл. Д.2. Здесь статус-кво воспроизводит неизменность в будущем. Имеем два случая. В первом случае веса статус-кво уже имеются для некоторых строк (соответствуют нулям в табл. Д.1). Во втором случае ни один из сценариев не остается в положении статус-кво. Здесь нужно аппроксимировать веса статус-кво. Например, для строки «Число студентов» табл. Д.1 сценарии 1 и 2 симметричны по отношению к статус-кво. Поэтому берется среднее их весов в качестве оценки веса статус-кво.

4. Из табл. Д.2 можно сделать выводы, аналогичные полученным ранее в [124]. Крайний справа столбец таблицы представляет собой частное от обобщенных весов сценариев и весов статус-кво соответствующей характеристики Таким образом, приходим к заключению, что любые элементы столбца, большие единицы, означают увеличение в будущем, в то время как числа, меньшие единицы, воспроизводят уменьшение в будущем. Кроме того, величина этих значений определяет степень

увеличения или уменьшения. Сравнивая последние столбцы табл. Д.1 и Д.2, убеждаемся в правомочности проведённой замены.

ДОПОЛНЕНИЕ Р. Г. ВАЧНАДЗЕ

РАЗВИТИЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Д.1. ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемом дополнении проводится краткий исторический экскурс, излагаются наиболее значительные полученные за последние годы теоретические результаты, приложения МАИ в различных сферах, дается характеристика некоторых программных средств. Исследуется вопрос о месте метода анализа иерархий в ряду методов принятия решений. В заключение приводится перечень возможных тем дальнейших исследований по МАИ.

Идея использования собственного вектора для решения так называемой задачи о лидере известна из работы К. Бержа [Д1], предложившего ее в 1958 г. для обработки простых структур (см. определения в [Д2]). В 1972 г. независимо друг от друга в СССР (Б. Брук и В. Бурков [Д3]) и в США (Т. Саати [Д4]) метод собственного вектора был применен для обратносимметричных матриц (матриц со степенной калибровкой по классификации [Д2]). Работа [Д3], по-видимому, не нашла дальнейшего развития, в то время как трудами Т. Саати и его последователей идея использования собственного вектора в качестве вектора приоритетов выросла в довольно мощную методологию системного анализа иерархических структур.

За десятилетие, прошедшее с момента публикации первой книги Т. Саати (1980 г.), метод анализа иерархий получил широкое распространение во многих странах. Т. Саати и его последователями проделана большая работа по теоретическому обоснованию метода, углублению исследования различных его аспектов, многочисленным приложениям метода в различных сферах и созданию соответствующих программных средств. Эти работы нашли отражение во многих публикациях, число которых к данному времени достигло 500. В США, Японии, Китае проводятся симпозиумы и конференции в национальном масштабе. В 1988 г. и г. Тяньцзине (КНР) был проведен первый международный симпозиум по МАИ, в работе которого участвовало около 200 ученых из США, Японии, Китая, Финляндии, Ирана, Канады и СССР. Тяньцзиньским университетом изданы доклады, представленные на симпозиуме |Д5]. Методу анализа иерархий посвящены специальные выпуски журналов: Socio-Economic Planning Sciences, Vol. 20, No 6, 1986 и International Journal on Mathematical Modelling, Vol. 9, № 3–5, 1987. В 1986 г. вышли два обзора :|Д6, Д7], в которых приводятся данные по большинству из работ, опубликованных к тому времени по МАИ.

Д.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Аксиоматические основы

В 1986 г. Т. Саати опубликовал работу [Д8], в которой была сделана попытка аксиоматического обоснования метода анализа иерархий. Аксиомы Т. Саати охватывают основные свойства метода:

1. Обратная симметричность – основная характеристика парных сравнений. Для матрицы парных сравнений $A=\left(a_{ij}\right)$ интенсивность предпочтения a_i, над a_j, обратна интенсивности предпочтения a_j над a_i.

2. Гомогенность (однородность), характеризующая свойство людей сравнивать объекты, которые не слишком сильно отличаются друг от друга, следовательно, не-

обходимость упорядочивания объектов в сохраняющих порядок иерархиях. Гомогенность существенна для сравнения объектов одного порядка, так как человеческий разум склонен к допущению больших ошибок при сравнении несопоставимых элементов. Когда эта несопоставимость большая, элементы располагают в отдельные кластеры сравнимых размеров, что выдвигает идею об уровнях и их декомпозиции.

3. Зависимость нижнего уровня от непосредственно примыкающего к нему высшего уровня.

4. Результат анализа может отражать ожидания экспертов только в том случае, если эти ожидания правильно воспроизведены в иерархии, т. е. все альтернативы, так же как и все критерии, воспроизведены в иерархии. Это не предполагает ни рациональности процесса, ни того, что процесс может приспосабливаться только к рациональной точке зрения. Многие ожидания людей иррациональны.

Аксиомы позволяют получить ряд общих теорем, определяющих операционные возможности МАИ и показывающих удобства парных сравнений и метода собственного вектора при оценке отношений, а также исследовать устойчивость собственного вектора к малым возмущениям в данных (подробнее об этом в [Д8]).

Абсолютные и относительные измерения: перестановка рангов

В появившихся в последнее время работах Т. Саати и других авторов [Д9, Д10, Д11] значительное внимание уделено вопросу сохранения и перестановки рангов, связанного с абсолютными и относительными измерениями.

Известно, что ранжирование альтернатив может быть получено в, результате как относительных измерений (основанных на парных сравнениях, дающих относительные значения), так и абсолютных измерений (основанных на сравнениях с известным стандартом). Тип измерений зависит от рассматриваемой ситуации. При совершенно новой задаче принятия решений, или в старых задачах, для которых не установлены общепринятые стандарты, следует применять относительные измерения, сравнивая альтернативы попарно для выявления их предпочтительности. Если же стандарты имеются, то следует применять абсолютные суждения. Метод анализа иерархий может быть использован при обоих типах измерений. Однако с типом измерений связана одна важная особенность, обусловленная перестановкой рангов в случае добавления дополнительных альтернатив (критериев) или удаления некоторых из рассматривавшихся альтернатив (критериев). Как показано в [Д10, Д11], при абсолютных изменениях добавление или удаление альтернативы не меняет взаимного расположения рангов начальных альтернатив для матрицы. Этот результат верен и для всей иерархии [Д12, Д13].

При относительных измерениях, когда имеется только один критерий и суждения согласованны, добавление или удаление альтернативы не влияет на ранговый порядок начальных альтернатив. В случае многих критериев, при согласованности в суждениях ранговый порядок любых двух альтернатив не меняется (в результате структурных изменений), когда одна альтернатива предпочтительнее другой в матрицах сравнения для всех критериев. Тем не менее даже для согласованных матриц, когда одна альтернатива доминирует над другой не по всем критериям, структурные изменения могут вызвать перестановку рангов альтернатив. В [Д11] приводятся математические условия сохранения рангового порядка иерархических структур в общем случае. Эта проблематика связана с теорией многокритериальных задач и может быть рассмотрена в ее рамках (см. [Д14]).

Неполные сравнения

Как уже известно, для получения матрицы сравнения порядка n необходимо произвести $n(n-1)/2$ суждений. В [Д15] подход, распространен на ситуации, в которых ЛПР позволено отвечать «не знаю» или «не уверен» на некоторые из вопросов. Подход Харкера основан на определении квазиобратносимметричных матриц.

Неотрицательная $n \times n$-матрица A квазиобратносимметрична, если $a_{ij} \geq 0$ и из $a_{ij} > 0$ следует, что $a_{ij} = 1/a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть ЛПР рассмотрено множество n альтернатив и проведено некоторое подмножество $n(n-1)/2$ парных сравнений, которые позволили получить матрицу $C = (c_{ij})$ с элементами $c_{ij} \geq 0$, и из $c_{ij} > 0$ следует, что $c_{ij} = 1/c_{ji}$. Пусть $B = (b_{ij})$ – $n \times n$-матрица, полученная из частично заполненной матрицы C следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{если } c_{ij} > 0, \\ 0, & \text{если } c_{ij} = 0, \end{cases}$$

$b_{ii} = m_i$, т. е. диагональные элементы матрицы B равны числу недополученных суждений в строке i.

Матрица $A = I + B$ – примитивна, т. е. существует такая постоянная $k > 1$, что матрица A^k положительна. Следовательно, решение задачи о собственном значении для матрицы A можно рассматривать как приоритеты альтернатив при неполных сравнениях. В [Д15] доказано также, что корень Перрона неотрицательной, неприводимой, квазиобратносимметричной матрицы A больше или равен n (рангу матрицы A) и равен n только в том случае, если матрица A – согласованна.

Аналогичный подход к выявлению приоритетов для неполной обратносимметричной матрицы предложен и в [Д16].

Неопределенность в суждениях

Неопределенность может быть выражена в следующем виде:

1) точечные оценки с функциями распределения вероятностей,
2) интервальные оценки без вероятностного распределения,
3) нечеткие оценки в виде нечетких чисел (определение последних, см., например, в [Д17, Д18]).

В работе Варгаса [Д19] исследованы матрицы с элементами в виде случайных переменных. Показано, что при условиях полной согласованности, если суждения подчинены гамма-распределению, главный правый собственный вектор результирующей матрицы парных сравнений подчиняется распределению по Дирихле. Утверждается, что этот результат верен и для несогласованности менее 10%.

Саати и Варгам в [Д20| исследовали интервальные оценки моделированием в предположении, что все точки интервала распределены равномерно. Используя тест Колмогорова–Смирнова, они показали, что компоненты собственного вектора удовлетворяют усеченному нормальному распределению. Была подтверждена возможность распространения центральной предельной теоремы на распределение компонент собственного вектора как предельных средних значений доминирования каждой альтернативы над другими альтернативами по путям всех длин. Было показано, каким образом выбираются альтернативы в соответствии с произведением их приоритетов и вероятностью того, что не произойдет перестановки рангов. Данный способ преодоления неопределенности в суждениях ЛПР позволяет измерять одновременно как важность, так и вероятность сохранение рангов.

Применение МАИ при неопределенности, связанной с суждениями виде нечетких чисел, рассмотрено в [Д21, Д22].

Д.3. ПРИЛОЖЕНИЯ

Как было отмечено, за последние годы МАИ широко использовался при решении различных задач. Но претендуя здесь на полноту, отошлем читателя к ранее упомянутым обзорным работам [Д6, Д7], а также к сборнику докладов Первого международного симпозиума по МАИ [Д5] и вышедшей в 1989 г. в книге [Д23|, и в данном обзоре остановимся на нескольких, наиболее интересных приложениях.

С помощью МАИ были найдены коэффициенты целевой функции для задачи целевого программирования большой размерности (9060 уравнений, 28730 переменных и 6950 целевых ограничений) [Д24]. В работе представлено интересное сопоставление многомерной теории полезности с МАИ при решении многокритериальных задач. Показано, что трудности, возникающие у аналитиков при непосредственном определении требуемых функций полезности, сильно снижают привлекательность подхода, основанного на теории полезности. В то же время МАИ позволяет аналитику структурировать элементы проблемы довольно быстро и облегчает проведение анализа. Существенные ограничения МАИ, связанные с проведением многочисленных парных сравнений, преодолеваются при использовании предложенной в [Д15] процедуры, значительно снижающей количество необходимых парных сравнений.

Э. Формен (один из авторов программной системы Expert Choice) предложил объединить МАИ с традиционными методологиями исследования операций [Д25]. В работе обосновывается система поддержки принятия решений, которая понятна и релевантна для ЛПР в реальной жизни. Показано, как ЛПР могут разрабатывать, понимать и применять .модели для принятия управленческих решений, что на практике они редко делают. Рассматривается объединение МАИ с линейным программированием, анализом очередей, методом критического пути, прогнозированием и целочисленным линейным программированием для решения ряда практических задач (дизайн новых видов продукции, распределение ресурсов во времени, по деньгам, труду и материалам с целью своевременного выполнения проекта).

Новый подход к оценке риска для международных инвестиций, основанный на МАИ, был предложен в [Д26]. Подход позволяет исследовать факторы как количественно, так и качественно, обеспечивая основу для обсуждения и обмена идеями между ЛПР при анализе риска. В работе исследуются структуры, в пределах которых фирма может анализировать все важнейшие факторы, влияющие на ее бизнес за рубежом, и быстро принимать логические решения.

Метод анализа иерархий успешно применялся при оценке эффективности лекарственных средств [Д27, Д28, Д29]. Методика обработки данных морфологического анализа позволила оценивать как действие отдельного препарата, так и сравнивать эффективность отдельных фармакологических средств при лечении ишемической болезни сердца. Полученные результаты хорошо согласуются с выводами клинических исследований.

Заслуживает интереса возможность приложения МАИ в различных видах спорта, связанная с определением состава эстафетной команды [Д27]. Из заданного множества кандидатов, относительно которых мы располагаем достаточно полной информацией, следует отобрать необходимое число и расставить их по этапам эстафеты (бег 4×100 м). В данном виде спорта оценка подготовки спортсмена производится согласно специальным методикам, выделяющим шесть специальных показателей. Часть этих показателей объективна (получается в результате абсолютных измерений) и измеряется во времени. Есть и такие показатели, которые получаются в результате относительных измерений (например, психологическая подготовка). Кроме того, важность различных этапов также оценивается в результате относительных сравнений, проводимых экспертами (тренерами). Следует отметить возможность получения неожиданных для ЛПР (тренера) решений, в данной задаче. Анализ, который может быть проведен для этого примера, наглядно иллюстрирует теоретические результаты, полученные в [Д11] для условий сохранения и перестановки рангов в случае абсолютных и относительных измерений.

Метод анализа иерархий стал применяться и при построении экспертных систем. Для задач принятие решений классификационного типа в [Д30] описана основанная на фреймах экспертная система с элементами МАИ. Система проводит диагностику текущего состояния затвора плотины и предсказывает его срок службы, основываясь как на структурных, так и на эмпирических точках зрения. Метод также применяется в качестве средства для снижения неопределенности информации в интегрированной системе поддержки приобретения знаний [Д31].

Д.4. ПРОГРАММНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ

В настоящее время имеется несколько программных систем для мини- и микрокомпьютеров, которые реализуют МАИ.

Наиболее известная зарубежная система Expert Choice создана Т. Саати и Э. Форменом [Д32, Д33] Это – система поддержки принятия решений, предназначенная для использования на персональных компьютерах IBM PC типа XT, AT и их клонах. Она требует 256K памяти и один двухсторонний НГМД. Стоимость системы около 500 долларов. Система Expert Choice позволяет:

– структурировать сложную проблему в виде иерархии в диалоговом режиме с редактированием;

– воспринимать как количественные (абсолютные), так и качественные (относительные) суждения при оценках; соответственно имеется возможность переключения с вербальной шкалы на численную и обратно;

– изменять суждения с целью достижения лучшего индекса согласованности для матриц парных сравнений, выявлять наиболее несогласованные суждения;

– синтезировать приоритеты нижнего уровня;

– анализировать чувствительность приоритетов;

– использовать подход ранговой шкалы вместо проведения парных сравнений при большом числе альтернатив (до 100);

– прервать работу и продолжить её с прерванного места.

Отметим, что система нашла довольно широкое распространение в различных правительственных и частных организациях США.

В 1988 г. Х. Голям-Незад из Мурхедского государственного университета (штат Миннесота, США) предложил новую реализацию программной системы, воспроизводящей МАИ, под названием Decide. Это – система поддержки принятия решений, также предназначенная для использования на персональных компьютерах IBM PC типа XT, AT и их семействах. Основной особенностью системы является то, что в ней применяется непрерывная шкала при высказывании суждений, причём она меняется в диапазоне от нуля до пяти.

В Японии компания Sumitomo Computing Service, Inc. модифицировала систему Expert Choice для японских персональных компьютеров NEC PC-9801 и IBM JAPAN-5550. Имеется также японская оригинальная версия программной системы, реализующей МАИ, которая разработана компанией .JUSF. Inc. под руководством К. Тоне для персональных компьютеров серии NEC PC-9801.

Программные реализации МАИ для персональных компьютеров разработаны также и в Китае (см., например, [Д34], где имеются соответствующие ссылки).

В Советском Союзе основанная на МАИ система поддержки принятия решений, предназначенная для использования мини-ЭВМ СМ-4, разработана в 1985 г. [Д35, Д36]. Система под названием «САЭМА», созданная на языке ФОРТРАН IV, позволяет сохранять несколько моделей иерархий, причем реализована парольная система доступа к модели. Предусмотрены средства редактирования соответствующей иерархии и прерывания работы с ней с возможностью ее возобновления во время других сеансов работы с ЭВМ, а также возможность анализа иерархий большого размера.

В настоящее время (1990 г.) в Институте вычислительной математики им. Н. И. Мусхелишвили АН Грузинской ССР разработана система поддержки принятия решений, предназначенная для пользования на персональных компьютерах IBM PC типа XT, AT и их семействах. Система под названием «ПРАИС» .(поддержка решений анализом иерархических структур) построена в виде открытой системы и включает в себя ряд методов, которые могут быть в дальнейшем дополнены.

Система позволяет решить проблему, для которой может быть построена иерархия в смысле МАИ с использованием различных подходов в зависимости от возможностей экспертов или ЛПР. В случае, когда иерархия и соответствующие оценки вводятся в режиме диалога с компьютером, используется некоторый аналог системы САЭМА. Но предусмотрен такой случай, когда часть информации об иерархии имеется в некотором наборе данных (подготовленном заранее или полученном из какой-либо информационной базы). Другими словами, для некоторой исходной иерархии часть информации существует в обработанном виде. Пользователь формирует «личную» иерархию в виде некоторого поддерева исходной. При этом он может расширять исходную иерархию путем добавления вершин на отдельных уровнях. Таким образом, диалог каждый раз «подстраивается» на получение недостающей информации. В системе предусмотрена возможность работы при неполных сравнениях. В случае, когда эксперты не полностью заполняют матрицы парных сравнений по шкале 1–9, используется модификация МАИ согласно [Д15, Д16].

В системе ПРАИС предусмотрена также групповая экспертная процедура МАИ с применением элементов кластерного анализа. И, наконец, в случае, когда эксперты испытывают затруднения в оценках по шкале отношений, оценивая объекты по дихотомической шкале (больше–меньше, лучше–хуже и т. д.), и более того, в некоторых случаях затрудняются вообще высказать какое-либо мнение при парных сравнениях, в системе ПРАИС для анализа иерархий используется подход, основанный на групповой экспертной процедуре [Д37].

Для решения задачи стратегического планирования, описанной в гл. 6 (подробное описание методологии дано в [Д38]), разработан пакет прикладных программ СТРАТЕГ. Система предусматривает два режима работы: 1) непосредственно описанный в [Д38] и 2) так называемый многопользовательский, который предусматривает заполнение матриц попарных сравнений иерархии и оценку переменных состояния для первой итерации прямого процесса как согласованного мнения всей группы экспертов, а в дальнейшем – работу каждого пользователя (эксперта) отдельно на итерациях первого обратного и последующих прямых и обратных процессов. Затем информация, полученная от каждого эксперта, решающего задачу стратегического планирования, обобщается. Система проводит анализ отклонений в мнениях, а также их причины как для каждой матрицы попарных сравнений, так и по структуре иерархии, создаваемых каждым экспертом. Такая организации процесса позволяет исследователям в полной мере учитывать мнения различных сторон, при этом пакет прикладных программ СТРАТЕГ приобретает черты экспертной системы.*

Д.5. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ОЦЕНКИ

Попытаемся дать некоторую общую оценку МАИ как метода принятия решений. Принятие решений складывается в многодисциплинарную область исследований, в которой работают психологи, математики, экономисты, инженеры, программисты. Полностью присоединяясь к мнению С. В. Емельянова и О. И. Ларичева [Д39], отметим, что эта многодисциплинарность является как бы переходным этапом к появлению повой дисциплины, в рамках которой специалисты будут обладать необходимыми научными знаниями из приведенных выше дисциплин, а также новыми знаниями по проблемам, ранее не рассматривавшимся.

Рассмотрим, насколько удовлетворяет МАИ ряду требований к научному обоснованию методов принятия решений, которые выдвигаются в результате накопления опыт я разработки этих методов.

1. В МАИ способы получения информации от эксперта соответствуют данным психологических исследований о возможностях человека переработать информацию. Действительно, аксиома гомогенности и принцип иерархической декомпозиции приводят в соответствие проблему получения оценок с психометрическими возможностями человека.

2. В МАИ имеется возможность проверки экспертной информации на непротиворечивость посредством индекса и отношения согласованности как для отдельных матриц, так и для всей иерархии. В некоторых программных средствах, реализующих МАИ (Expert Choice, ПРАИС), как было уже отмечено, также предусмотрена возможность проверки экспертной информации путём проверки порядковой транзитивности, а также выявления наиболее несогласованных суждений.

3. Любые соотношения между вариантами решений в МАИ объяснимы на основе информации, полученной от экспертов (четвертая аксиома МАИ [Д8]). Так, анализ приоритетов элементов решения по нисходящим уровням иерархии позволяет помять, как получено то или иное значение вариантов решения.

4. Математическая правомочность решающего правила в МАП прозрачна и базируется на методе собственного значения и принципа иерархической композиции, имеющих чёткое математическое обоснование.

Таким образом, МАИ удовлетворяет четырём основным критериям, обеспечивающим согласно [Д39] всестороннюю научную обоснованность метода принятия решений.

Наряду с научным обоснованием корректности МАИ отделенный интерес представляют границы (пределы) применимости метода. Выделяются пределы трех типов:

1. По возможностям экспертов давать непротиворечивую информацию при увеличении параметров проблемы. В МАИ оперируем гомогенными элементами в пределах одного уровня. Иерархическая декомпозиция, присущая методу, позволяет оперировать со значительным числом в общем случае негомогенных элементов.

2. По трудоемкости для экспертов в МАИ этот показатель напрямую зависит от числа уровней иерархии, числа элементов на каждом из уровней и от полноты иерархии. Подсчет трудоемкости для эксперта при применении МАИ легко может по-

* Системы ПРАИС и СТРАТЕГ разработаны Р. Г. Вачнадзе, Н. И. Маркозаишвили, М. О. Карчава и Е. Н. Благидзе в ИВМ АН Груз. ССР.

зволить оценить в каждом конкретном случае целесообразность применения метода для рассматриваемой проблемы.

3. По вычислительной сложности алгоритмов МАИ выгодно отличается от многих методов принятия решений простотой вычислений и наличием надежных программных средств.

Д.6. ТЕМАТИКА ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Ниже перечислены наиболее интересные темы дальнейших исследований по МАИ (некоторые из этих тем предложены в [Д40, Д6]):

1. Углубление исследований по непрерывным суждениям (в отличие от дискретной шкалы 1–9). В этом направлении известна лишь одна статья [Д41].

2. Экспертные суждения в виде интервальных чисел. Представляется перспективным применение методов интервального анализа [Д42] для разработки соответствующих вычислительных процедур МАИ. В этом направлении некоторый путь намечает предложенная в [Д43] процедура, основанная на технике теории ошибок.

3. Оценка метода собственного вектора в ряду методов построения по заданной матрице парных сравнений объектов оптимального в том или ином смысле их линейного упорядочения. Эта оценка может оказаться полезной при определении границ применимости как самого метода собственного вектора, так и МАИ в целом.

4. Проверка различных групповых методов экспертного оценивания на одних и тех же задачах и поиск общих элементов. Здесь имеется некоторый задел в виде теоретической работы

[Д44], а также [Д45]. Заслуживает внимания применение методов кластерного анализа для выявления в группе экспертов однородных (или близких) оценок.

5. Разработка теоретических основ моделирования проблем принятия решений в виде иерархий, которых пока не существует, несмотря на широкое распространение иерархических структур. Возможно, развитие этого подхода будет исходить из областей, в которых применяются иерархические структуры, например моделирование данных в базах данных.

6. Обобщение теоретических результатов, полученных для иерархий и сетевых систем, на многообразия [Д40].

7. Дальнейшее исследование связи главного собственного вектора со степенным законом Вебера–Фехнера. Применение психологических исследований в части адекватного представления человеческих ощущений в числовых шкалах.

8. Исследование чувствительности приоритетов от числа критериев и в более общем случае от размеров и вида иерархии.

9. Исследование структур решения для зависимых от времени и динамических структур. Несмотря на важность этого аспекта для сложных реальных систем, имеющиеся результаты (см., например, [Д46]) все еще не дают практически приемлемых методов.

10. Метод анализа иерархий и анализ риска: развитие теории использования сценариев при анализе риска.

11. Развитие приложений МАИ на теорию игр, в частности, для разрешения конфликтов. Здесь также имеется несколько работ (см., например, [Д47]), которые могли бы стать отправной точкой в исследованиях.

12. Исследование связи МАИ с оптимизацией. В частности, можно ли с помощью МАИ решить общую задачу оптимизации [Д40].

13. Связь МАИ с искусственным интеллектом и экспертными системами. Очевидно, эта тема предоставит широкое поле деятельности для исследователей.

Список литературы к дополнению

Д1. **Берж К.** Теория графов и ее приложения/Пер. с франц. под ред. И. А. Вайнштейна. – М.: ИЛ, 1962. – 319 с.

Д2. **Белкин А. Р.** Желательные свойства оптимальных линейных упорядочений// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1987 – №2.– С. 3–21.

Д3. **Брук Б. Н., Бурков В. Н.** Методы экспертных оценок в задачах упорядочения объектов// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1972 – №3. – С. 3–11.

Д4. **Saaty T. L.** An eigenvalue allocation model for prioritization and planning Energy Management and Policy Center. – University of Pennsylvania, 1972.

Д5. **Proseedings** of International Symposium on the Analytic Hierarchy Process, Tianjin University, Tianjin, China. 6–9 Sept. 1983. – Tianjin, 1988. – 653 p.

Д6. **Zahedi F.** The Analytic Hierarchy Process – a survey of the method and its applications//Interfaces. – 1986, Vol. 16, №4. – P. 96–108.

Д7. **Xu Shubo.** References on the analytic hierarchy process//Institute of Systems Engineering. – Tianjin: Tianjin university, 1986. June, 15 p.

Д8. **Saaty T. L.** Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process//Management Science. 1986, July. – Vol. 32, №7. – P. 841-855.

Д9. **Saaty T. L., Vargas L. C.** Inconsistency and rank preservation//J. of Mathematical Psychology. 1984, June. – Vol. 28. №2. – P. 205—241.

Д10. **Saaty T. L.** Absolute and relative measurement with the AHP: the most livable cities in the U.S.//Socio-Economic Planning Sciences. – 1986. – Vol. 20, No. 6. – P. 327–331.

Д11. **Saaty T. L.** Concepts, theory and techniques: rank generation, preservation and reversal in the analytic hierarchy process//Decision Sciences. – 1987. – Vol. 18. – P. 157–177.

Д12. **Saaty T. L.** Generalization of Perron's theorem to hierarchic composition. – Unpublished manuscript. – University of Pittsburg, 1984.

Д13. **Barbeau E.** Perron's result and decision on admission tests//Mathematics Magazine. – 1986, January. – P. 16–22.

Д14. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

Д15. **Harker P. T.** Alternative models of questioning in the analytic hierarchy process//Mathematical Modelling. – 1987. – Vol. 9. № 3–5.

Д16. **Takeda E., Yu P. L.** Eliciting the relation weights from incomplete reciprocal matrices//Proceedings of International Symposium on the Analytic Hierarchy Process. Tianjin university, Tianjin, China, 6–9 Sept. 1988. – Tianjin, 1988. – P. 192–200.

Д17. **Dubois D., Prade H.** Fuzzy sets and systems: theory and application. – New-York. Academic Press, 1980. – 393 p.

Д18. **Вачнадзе Р. Г.**, **Маркозашвили Н. И.** К вопросу об определении нечетких чисел//Сообщения АН ГССР. – 1982. – Т. 108. №1. – С. 45–48.

Д19. **Vargas L. G.** Reciprocal matrices with random coefficients//Mathematical Modeling. – 1982. – Vol. 3, №1. – P. 69–81.

Д20. **Saaty T. L., Vargas L. G.** Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process//Socio-Economic Planning sciences. – 1986. – Vol. 20, №6.

Д21. **Van Laathoven.** A fuzzy extension of Saaty's priority theory//'Fuzzy Sets and Systems. 1983. – Vol. 11, №3. – P. 229–241.

Д22. **Buckley J. J.** Fuzzy hierarchycal analysis//Fuzzv Sets and Systems. – 1985. – Vol. 17, №3. – P. 233–247.

Д23. The Analytic hierarchy process: applications and studies//B. Golden, E. Wasil, P. Harker, Eds. – New-York: Springer–Verlag. 1989. – 265 p.

Д24. **Gass S. I.** On setting goal-programming weights using the AHP//Proceedings of International Symposium on the Analytic Hierarchy Process, Tianjin university, Tianjin, China, 6–9 Sept. 1988. – Tianjin, 1988. – P. 32–36.

Д25. **Forman E. H.** Integrating AHP and traditional OR/MS methodologies. (//Ibid. – P. 44–62.)
Д26. **Gholam-Nezhad H.** Risk assessment for international investment//Ibid. – P. 371-380.
Д27. **Vachnadze R. G., Markozashvili N. L.** Some applications of the analytic hierarchy process//Mathematical Modelling. – 1987. – Vol. 9. №3–5. – P. 185–191.
Д28. **Вачнадзе Р. Г., Гибрадзе Т. А., Карчава М. О., Маркозашвили С. Г.** Методика оценки эффективности лекарственных средств на основе экспериментальных морфологических данных//Вестник Л.МН СССР. 1988. – №7. – С. 80-83.
Д29 **Вачнадзе Р. Г., Маркозашвили С. Г.** Обработка морфологических данных при помощи методики оценки эффективности лекарственных средств//Тр. ин-та вычислительной математики АН ГССР. – 1988. – Т. XXVII: 2. – С. 21–26.
Д30. **Terano T.** Using the analytic hierarchy process in frame based expert systems//Proceeding of international Symposium on the Analytic Hierarchy Process. Tianjin university, Tianjin, China. 6–9 Sept. 1988 – Tianjin. I988. – P. 638–645.
Д31. **Boose I. H., Brandshaw J. M.** Expertise transfer and complex problems: using AQUINAS as a knowledge-acquisition workbench for knowledge-based systems//Int. J Man–Machine Studies. – 1987. – Vol. 26, №1. – P 3–28.
Д32. **Expert** Choice/E. H. Forman, T. L. Saaty, M. A. Seily, R. Waldron. – Decision Support Software. – McLean: Virginia, 1983.
Д33. **Expert** Choice Manual. Decision Support Software. – McLean, 1986.
Д34. **Liu B.** AHP in China//Proceedings of International Symposium on the Analytic Hierarchy Process. Tianjin University, Tianjin, China, 6–9 Sept. 1988. – Tianjin. 1988. – P. 18–24.
Д35. **Диалоговая** система прогнозирования на основе экспертом информации/ Р. Г. Вачнадзе, М. О. Карчава, Н. И. .Маркозашвили и др.//Вопросы совершенствования планово-управленческой деятельности: Тр. ин-та управления народным хозяйством ГКНТ ГССР. – 1985. – С. 56–63.
Д36. **Карчава М. О., Цигриашвили Э. Н.** Диалоговая система «САЭМА» для анализа взаимодействий в системах с иерархической структурой//Алгоритмы и программы. Информ. бюллетень ВНТИ Центр. – 1986. – №2. –С. 16.
Д37. **Jech T.** The ranking of incomplete tournaments. A mathematician's guide to popular sports//American Mathematical Monthly. – 1983. – Vol. 890, №4. – P. 74-87.
Д38. **Саати Т. Л., Керис К. П.** Аналитическое планирование. Организация систем/Пер. с англ. под ред. И. А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1991, 244 с.
Д39. Емельянов С. В., Ларичев О. И. Многокритериальные методы принятия решений. – М.: Знание, 1985, 32 с. –(Новое в жизни, науке. технике. Сер. Математика, кибернетика; № 10).
Д40 **Saaty R. W.** The analytic hierarchy process: what it as and how it is used?// Mathematical .Modeling. – 1987. – Vol. 9, №3–5.
Д41. **Jensen R. E.** An alternative scaling method for priorities in hierarchical structures//J. of Mathematical Psychilogy.- 1984. September - Vol. 28, №3. P317-332.
Д42. **Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х.** Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, Новосиб. отделение, 1986 – 223 с.
Д43. **Yoon K.** The analytic hierarchy process with bounded interval input//Proceedings of International Symposium on the Analytic Hierarchy Process. Tianjin university, Tianjin, China, 6–9 Sept, 1988. – Tianjin, 1988, P. 149–156.
Д44. **Aczel J., Saaty T. L.** Procedures for synthezing ratio judgements//J. of Mathematical Psuchology. – 1983. – Vol. 27, №1. – P. 93–102.
Д45. **Aczel J., Alsina C.** On synthesis of judgments//Socio-Economic Planning Sciences. – 1986. – Vol. 20, №6. – P. 333–339.

Д46. **Xu Shubo, Liu Bao.** A new dynamic priorities model and an analysis of China's energy study for the future//VII International Conference on Multiple Criteria Decision Making, Kioto, Japan, August, 1986. – 1986.
Д47. **Saaty T. L.** The US-OPEC energy conflict: the pay off matrix by the analytic hierarchy process//International Journal of Game Theory. – 1979. – Vol. 8. №4. – P. 225–234.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II
ПРИЛОЖЕНИЯ

ЧАСТЬ III
ТЕОРИЯ